

Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Εύρεση αρχικής συνάρτησης

8.12 Να βρείτε μια αρχική των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = 2x - 3$

β) $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$

γ) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1$

δ) $f(x) = 24x^5 + 20x^4 - 12x^3$

8.13 Να βρείτε μια παράγουσα της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = e^x + 3x^2$

β) $f(x) = 2e^{2x} + 4x^3$

γ) $f(x) = -e^{-x} + 2x$

δ) $f(x) = 4e^{-2x} + 6x$

8.14 Να βρείτε μια αρχική των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sin x - \eta\mu x$

β) $f(x) = 2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x$

γ) $f(x) = 4\eta\mu 2x + 3\sigma\upsilon\nu 3x$

δ) $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x + 3\eta\mu 3x$

ε) $f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}, x \in (0, \frac{\pi}{2})$

8.15 Να βρείτε μια αρχική των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}, x > 0$

β) $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^3}, x > 0$

γ) $f(x) = \frac{x+2}{x} + \frac{x+1}{x^2}, x > 0$

δ) $f(x) = \frac{2x^2+x}{x^3} + \frac{3}{x^4}, x > 0$

8.16 Να βρείτε μια παράγουσα της συνάρτησης f .

α) $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}, x > 0$

β) $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3}, x > 2$

γ) $f(x) = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{2-x}, x < 2$

δ) $f(x) = \frac{x+2}{x+1} + \frac{x+5}{x+2}, x > -1$

8.17 Να βρείτε τις αρχικές των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3}, x > 3$

β) $f(x) = \frac{1}{x-4} + \frac{3}{3-x}, x > 4$

γ) $f(x) = \frac{6}{3x-2} + \frac{3}{3-x}, x > 3$

δ) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 4}, x > 2$

8.18 Να βρείτε τις αρχικές των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2x, x > 0$

β) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0$

γ) $f(x) = \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x}, x > 0$

δ) $f(x) = (3+\sqrt{x})^2, x > 0$

8.19 Να βρείτε τη συνάρτηση f , αν:

α) $f'(x) = 5x^4 + 2x + 1, x \in \mathbb{R}$,
και $f(0) = 1$

β) $f'(x) = e^x + \sin x - \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$,
και $f(0) = 3$

$$\gamma) f'(x) = \frac{(x + \sqrt{x})^2}{x}, x > 0, \text{ και } f(1) = -\frac{1}{6}$$

$$\delta) f'(x) = \frac{(2x+1)^2 + \sqrt{x}}{x^2}, x > 0, \text{ και } f(1) = 5$$

8.20 Να βρείτε την αρχική F της συνάρτησης f , όταν:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 5, & \text{αν } x \leq 1 \\ 2x + 4, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{και } F(1) = 6$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} x^2 e^x + 2xe^x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ \eta \mu x - \sigma \nu \eta x + 2, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{και } F(0) = 1$$

2. Η ... αξία της αρχικής συνάρτησης

8.21 Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο με τιμή -14 και ισχύει $f''(x) = 24x^2 + 24x + 2$.

8.22 Να βρείτε τη συνάρτηση f , αν:

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

και τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-1, 3)$ ανήκουν στη γραφική της παράσταση.

8.23 Να βρείτε τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν η γραφική της παράσταση έχει ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y = 3x + 4$ και ισχύει:

$$f''(x) = \frac{4}{x^3} \text{ για κάθε } x > 0$$

8.24 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, αν η εφαπτομένη της C_f στο τυχαίο σημείο $M(x, f(x))$ έχει κλίση $\frac{e^{2x}}{f(x)}$ και το σημείο $A(0, 1)$ ανήκει στη C_f .

8.25 Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν $f'(x) = 2xe^{-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

8.26 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και θετική στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και:

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2x}{f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

8.27 Να βρείτε τη συνάρτηση f στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\alpha) x^2 f'(x) + 2xf(x) = 1 - f'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = \frac{1}{2}$$

$$\beta) f'(x)\eta \mu x = \eta \mu^2 x + f(x)\sigma \nu \eta x \text{ για κάθε } x \in (0, \pi) \text{ και } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\gamma) \frac{f'(x)}{f(x) + 2} = -\frac{\eta \mu x}{2 + \sigma \nu \eta x}, f(x) \geq -1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1$$

$$\delta) f'(x) = \frac{2f^2(x)}{x^3}, f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = 1$$

$$\epsilon) f'(x) = 2xe^{x^2 - f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0$$

$$\sigma\tau) f'(x) = \frac{1}{e^x + 1} f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = \frac{1}{2}$$

8.28 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

με $f(3) = 7$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) = \frac{2 + f(x)}{x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

α) Να υπολογίσετε μια αρχική G της συνάρτησης:

$$g(x) = \frac{2}{x^2}, x > 0$$

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f .

3. Αρχική σύνθετων συναρτήσεων

8.29 Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ , να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης g .

$$\alpha) g(x) = f'(x)f(x)$$

$$\beta) g(x) = f'(x)f^3(x)$$

$$\gamma) g(x) = \frac{f'(x)}{f(x) + 1}$$

$$\epsilon) g(x) = \frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

$$\delta) g(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$$

$$\sigma\tau) g(x) = f'(x)e^{f(x)+2}$$

$$\zeta) g(x) = f'(x)\eta\mu f(x) \quad \eta) g(x) = f'(x)\sigma\upsilon\nu f(x)$$

8.30 Η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . Να βρείτε τις αρχικές της συνάρτησης g στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\alpha) g(x) = (f'(x))^2 + f(x)f''(x)$$

$$\beta) g(x) = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)}$$

$$\gamma) g(x) = \frac{(f'(x))^2 - f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}$$

$$\delta) g(x) = x(xf'(x) + 2f(x))$$

8.31 Να βρείτε μια αρχική των συναρτήσεων:

$$\alpha) g(x) = e^x(f(x) + f'(x))$$

$$\beta) h(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x))$$

$$\gamma) \phi(x) = e^{2x}(f'(x) + 2f(x))$$

$$\delta) \omega(x) = \frac{f'(x) + 3f(x)}{e^{-3x}}$$

8.32 Να βρείτε τις αρχικές των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\beta) f(x) = \frac{1-\eta\mu x}{x+\sigma\upsilon\nu x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\gamma) f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\delta) f(x) = \frac{2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\varepsilon) f(x) = \frac{(1+\ln x)^3}{x}, \quad x > 0$$

$$\sigma\tau) f(x) = (e^x + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)(e^x + \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\zeta) f(x) = e^{x^2+\ln x}, \quad x > 0$$

$$\eta) f(x) = 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x e^{1+\eta\mu^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

8.33 Να βρείτε τις αρχικές των επόμενων συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{1}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\beta) f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

8.34 Να βρείτε τις αρχικές συναρτήσεις F της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\alpha) f(x) = \frac{\varepsilon\phi x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\beta) f(x) = \frac{\sqrt{\varepsilon\phi x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\gamma) f(x) = \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\delta) f(x) = e^{x^3+2\ln x}, \quad x > 0$$

$$\varepsilon) f(x) = \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}, \quad x > 0$$

$$\sigma\tau) f(x) = \frac{3\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

8.35 Να βρείτε μια αρχική των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{x^2+x-5}{x^2(x-5)}, \quad x > 5$$

$$\beta) f(x) = \frac{x^2+5x+4}{x(x+2)^2}, \quad x > 0$$

8.36 Να βρείτε την αρχική F της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{e^x(x-2)}{x(e^x+x^2)}, \quad x > 0$$

4. Αρχική συνάρτηση και βασικά θεωρήματα

8.37 Η F είναι αρχική της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και ισχύει:

$$F(2-x) + F(x^2-4) = 6x-2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$\alpha)$ Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(2)$.

$\beta)$ Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σ' ένα σημείο.

8.38 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας μια αρχική συνάρτηση F έχει την ιδιότητα:

$$F(1-x) + F(x^2-1) = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$\alpha)$ Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$ και $f(1) = -1$.

$\beta)$ Αν η f είναι παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = -2$.

8.39 Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει άρτια παράγουσα, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

8.40 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, έχει αρχική συνάρτηση F και ισχύει:

$$f(x)F(1-x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $F(x)f(1-x) = 1$ β) $[F(x)F(1-x)]' = 0$

γ) $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ δ) $F(x)F(1-x) = 1$

ε) $F(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ στ) $F(x) = e^{x-\frac{1}{2}}$

ζ) $f(x) = e^{x-\frac{1}{2}}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

8.41 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(1) = 2$ και F αρχική της με την ιδιότητα:

$$f(x) = 2xe^{x^2-F(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να βρείτε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$.

8.42 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και F μια αρχική της. Αν $f(1) = 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = e^{x-F(x)}$, να βρείτε την f .

8.43 Έστω F μια παράγουσα της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(x) = F(x) - F(-x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

γ) Να βρείτε τον τύπο της f .

8.44 Έστω $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και F μια παράγουσα της f . Αν $F(0) = 0$ και:

$$f(x) = e^{-F(x)} \text{ για κάθε } x > -1$$

τότε:

α) να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) = -f^2(x) \text{ για κάθε } x > -1$$

β) να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f ,

γ) να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((\eta\mu 3x)f^2(x))$.

8.45 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και F μια αρχική της με την ιδιότητα:

$$2aF(x^2) \geq a^2 + F^2(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

όπου $a \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι:

α) $F(0) = a$ και $F(1) = a$,

β) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

8.46 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ και F μια αρχική της f με την ιδιότητα:

$$f(x)F(2-x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(2-x)F(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$F(x)F(2-x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

γ) Να βρείτε τον τύπο της f .

δ) Να βρείτε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \eta\mu f(x)$.

8.47 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει θετική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας μια αρχική συνάρτηση F να ικανοποιεί τη σχέση:

$$F^2(x) \leq F(x)F(a-x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

όπου $a \in \mathbb{R}^*$.

5. Προβλήματα

8.48 Μια εταιρεία έχει διαπιστώσει ότι το οριακό ημερήσιο κόστος λειτουργίας της είναι:

$$(0,015x^2 - 2x + 80) \text{ €}$$

όπου x ο αριθμός των μονάδων προϊόντος που παράγονται ημερησίως. Αν η εταιρεία έχει πάγια έξοδα 1000 € την ημέρα, να βρείτε:

α) το ημερήσιο κόστος παραγωγής x μονάδων του προϊόντος,

β) την αύξηση του κόστους, αν αντί για 30 μονάδες παραχθούν 60 μονάδες προϊόντος σε μία ημέρα.

8.49 Ένας ζωικός πληθυσμός αυξάνεται με ρυθμό: $(200 + 50t)$ μονάδες ετησίως

(t είναι ο χρόνος σε έτη). Να βρείτε πόσο θα αυξηθεί ο πληθυσμός στο διάστημα ανάμεσα στο τέταρτο και το δέκατο έτος.

8.50 Σε ένα εθνικό ζωολογικό πάρκο ο ρυθμός αύξησης του πλήθους $N(t)$ των ζώων ανά έτος είναι αντιστρόφως ανάλογος του αριθμού των ζώων που ήδη υπάρχουν στο πάρκο, όπου t είναι ο χρόνος σε έτη αρχίζοντας από το 2016. Την 1/1/2016 υπήρχαν στο πάρκο 50 ζώα και εκτιμάται ότι την 1/7/2021 θα υπάρχουν 60 ζώα.

α) Να αποδείξετε ότι $N(t) = \sqrt{200t + 2500}$, $t \geq 0$.

β) Να βρείτε πόσα ζώα θα υπάρχουν στο πάρκο την 1/1/2028.

γ) Να βρείτε ποιο έτος θα υπάρχουν στο πάρκο 90 ζώα.

8.51 Ο πληθυσμός $\Pi(t)$ ενός νησιού μεταβάλλεται με ρυθμό που είναι ανάλογος του πληθυσμού που ήδη υπάρχει και t είναι ο χρόνος σε έτη.

Ο πληθυσμός του νησιού είναι σήμερα 2000 κάτοικοι και εκτιμάται ότι σε 20 χρόνια θα είναι 1800 κάτοικοι.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\Pi(t) = 2000 \left(\frac{9}{10} \right)^{\frac{t}{20}}, \quad t \geq 0$$

β) Να βρείτε τον πληθυσμό του νησιού μετά από 40 χρόνια.

Θέματα για τις εξετάσεις

Τα επόμενα θέματα μπορούν να αξιοποιηθούν για τη γενική επανάληψη της ενότητας ή για την προετοιμασία του σχετικού επαναληπτικού διαγωνίσματος.

Θ8.1 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^{\ln x} (2 \ln x + 1), \quad x > 0$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι:

i) $e^{x-1} \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

ii) $e^{-(x-1)^2} f(x) \leq 2x - 1$ για κάθε $x > 0$.

Θ8.2 Αν F είναι αρχική της συνεχούς συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x)F(-x) = 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και $f(0) = 1$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$,

β) να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων,

γ) να αποδείξετε ότι:

$$\frac{e^a + e^b}{2} \geq e^{\frac{a+b}{2}} \quad \text{για κάθε } a, b \in \mathbb{R}$$

Θ8.3 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και F μια αρχική της με την ιδιότητα:

$$f(x)F(x) = -e^{-2x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν $f(0) = 1$, να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει σταθερά c , ώστε:

$$F^2(x) = e^{-2x} + c$$

β) $F(x) = -e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$,

γ) $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$,

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f(x)) = 0$.

Θ8.4 Έστω μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με:

$$f(1) = e \quad \text{και} \quad f'(1) = 0$$

Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι $x^3 f''(x) = e^{\frac{1}{x}}$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$,

β) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα,

γ) να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{x}{e} \right)^x \geq \frac{1}{e} \quad \text{για κάθε } x > 0$$

δ) να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f ,

ε) να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Θ8.5 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x - y) = f(x) - f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

β) Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση, τότε η f είναι "1-1".

γ) Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

δ) Αν η f είναι συνεχής στο a , τότε είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

ε) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, τότε είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

στ) Αν η f έχει αρχική και F είναι μια αρχική της, τότε:

i) $F(x + y) - F(x) = xf(y) + F(y) - F(0)$
για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = \alpha x$ με $\alpha \in \mathbb{R}$