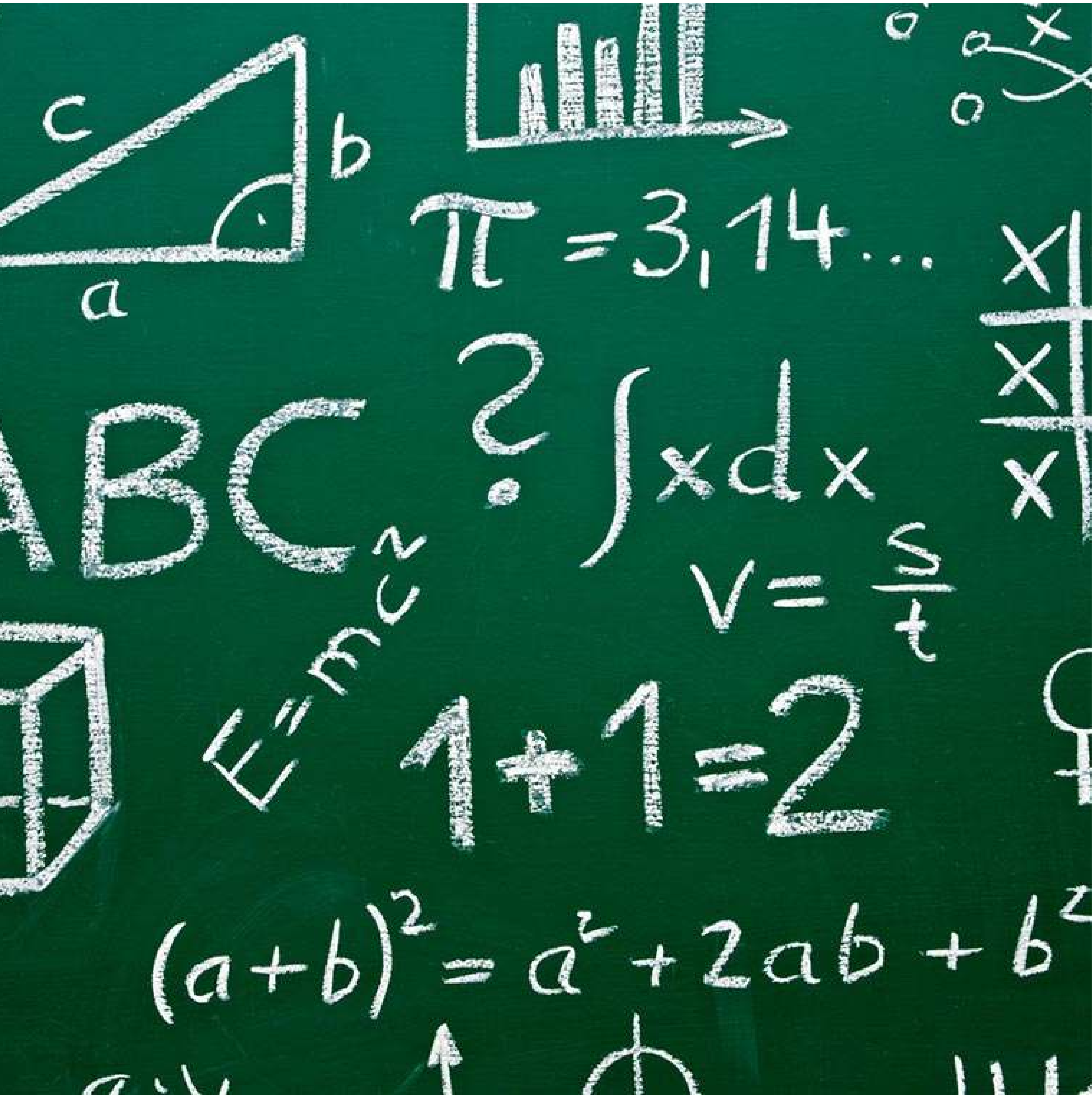


1. Εύρεση μονοτονίας

3.10 Να εξετάσετε ποιες από τις επόμενες συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες γνησίως φθίνουσες.

α) $f(x) = 6 - 2x$ **β)** $f(x) = 3 + 5x$

γ) $f(x) = 2x^3 - 1$ **δ)** $f(x) = 5 - 4x^3$

ε) $f(x) = \sqrt{6 - 2x} + 3$ **στ)** $f(x) = 2\ln x - 3$

ζ) $f(x) = 2e^{x-1} + 1$

η) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

3.11 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

α) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, +\infty)$,

β) $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$, όχι όμως γνησίως μονότονη στο D_g.

3.12 Να αποδείξετε ότι οι επόμενες συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες:

α) $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{αν } x \le 2 \\ x^2, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$

β) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \le 1 \\ x^2 - 2x + 3, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

3.13 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x}, & \text{αν } x > 0 \\ -\dfrac{3}{x}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

β) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{αν } x \ge 0 \\ x + 3, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων.

2. Ανισώσεις - Εξισώσεις

3.14 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $f(8 - x^2) > f(-1)$ β) $f(2^x + 3) \le f(5)$

3.15 Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $f(x^2 - 4x) \ge f(x - 6)$

β) $f(\ln x) \le f(1)$

γ) $f(e^{2-x} + 3) < f(4)$

δ) $f(\ln(x^2 + 1)) > f(\ln 5)$

3.16 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $f(x^2 - 3x) = f(2x - 6)$

β) $f(\ln x + 2) = f(3)$

3.17 Μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και $f(1) - f(3) > 0$.

α) Να βρείτε τη μονοτονία της f.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 - x) > f(2x - 2)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x) = f(1)$.

3.18 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^{-x} - x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{-x} - 1 \ge x$.

3.19 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^x + x^5 + x^3 + x - 1 \quad \text{και}$$
$$g(x) = 2 - x - x^3 - \ln x$$

α) Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι γνησίως μονότονες.

β) Να λύσετε τις ανισώσεις $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$.

3.20 Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $x^3 \ge 1 - \ln x$ β) $\dfrac{1}{x} \le \ln x + 1$

γ) $e^{1-x} > 1 + \ln x$ δ) $e^x + 2\ln x < e$

3.21 Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη συνάρτηση με την ιδιότητα:

$$f(4 - x) + f(2 + x) = 0 \quad \text{και} \quad f(1) > f(2)$$

Να λύσετε:

α) την εξίσωση $f(x) = 0$,

β) την ανίσωση $f(x^2 - 6) > 0$.

3.22 Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση με $f(5) < f(4)$.

α) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(1)$, $f(3)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(2^x) < f(1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(3) > f(5) + f(7)$.

3.23 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + x - 1$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^x + x > 1$.

δ) Να βρείτε το πρόσημο της f.

3.24 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x^{11} + 2x^7 + 3x^5 + 5x^3 + 7x < 18$

β) $συνx - ημx - 2εφx - x - 1 < 0, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

γ) $3^x + 4^x + 5^x > 6^x$!!

δ) $\ln\dfrac{3^x + 4^x}{5^x} < e^{5^x} - e^{3^x + 4^x}$

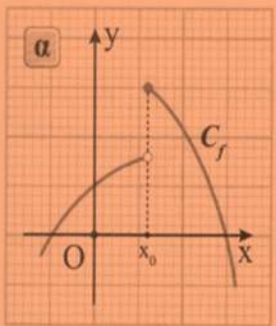
3. Ακρότατα συνάρτησης

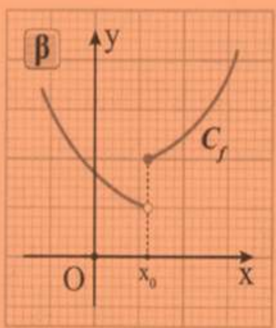
3.25 Ένας μαθητής βρήκε ότι για μια συνάρτηση $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

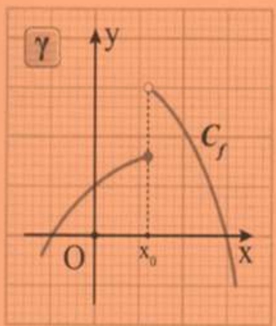
$$-2014 \le f(x) \le 2014 \ \text{ για κάθε } x \in A$$

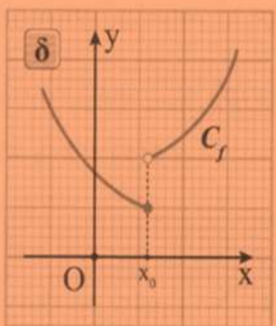
Συμπέρανε έτσι ότι η f έχει ελάχιστο το -2014 και μέγιστο το 2014. Είχε δίκιο;

3.26 Να εξετάσετε σε ποιες από τις επόμενες περιπτώσεις η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_0 ακρότατο.









3.27 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^2 - 4$

β) $g(x) = -x^2 + 2x + 3$

γ) $h(x) = 2ημx$

δ) $φ(x) = 3συνx - 1$

ε) $ω(x) = \ln(x - 2) + 1$

στ) $κ(x) = e^{x+2} - 3$

3.28 Δίνεται συνάρτηση $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $f(A)$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(A) = [-3, +\infty)$

β) $f(A) = (-\infty, 2]$

γ) $f(A) = [-7, 8] \cup (9, 17]$

δ) $f(A) = (-5, 14]$

ε) $f(A) = (-4, 4)$

στ) $f(A) = [-5, 3) \cup [7, +\infty)$

3.29 Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(x) = 2x - 3, \ D_f = [-1, 3]$

β) $g(x) = 3 - 5x, \ D_f = [-2, 5)$

γ) $h(x) = \dfrac{10}{x + 3}, \ x \in [-1, 2]$

δ) $φ(x) = 2\ln x + 3, \ x \in [1, e]$

4. Θεωρητικές ασκήσεις

3.30 Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα A. Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $λf$, $λ \in \mathbb{R}^*$, είναι:

i) γνησίως αύξουσα στο A αν $λ > 0$,

ii) γνησίως φθίνουσα στο A αν $λ < 0$.

β) η συνάρτηση $\dfrac{1}{f}$ είναι:

i) γνησίως φθίνουσα στο A αν:

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in A$$

ii) γνησίως φθίνουσα στο A αν:

$$f(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in A$$

3.31 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: A \longrightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες είναι γνησίως μονότονες στο διάστημα A. Να αποδείξετε ότι:

α) αν οι f, g είναι γνησίως αύξουσες, τότε και η $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα,

β) αν οι f, g είναι γνησίως φθίνουσες, τότε και η $f+g$ είναι γνησίως φθίνουσα,

γ) αν οι f, g είναι γνησίως αύξουσες, $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα,

δ) αν οι f, g είναι γνησίως αύξουσες, $f(x) < 0$ και $g(x) < 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η $f \cdot g$ είναι γνησίως φθίνουσα,

ε) αν η f είναι γνησίως αύξουσα με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα με $g(x) > 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η $\frac{f}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα.

3.32 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Αν ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ στο $\mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα, τότε η $g \circ f$ και η $f \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσες.

β) Αν οι f, g είναι γνησίως αύξουσες, τότε η $g \circ f$ και η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσες.

γ) Αν οι f, g είναι γνησίως φθίνουσες, τότε η $g \circ f$ και η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσες.

3.33 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

α) Αν η f έχει μέγιστο και η g είναι γνησίως αύξουσα, τότε η $g \circ f$ έχει μέγιστο.

β) Αν η f έχει ελάχιστο και η g είναι γνησίως φθίνουσα, τότε η $g \circ f$ έχει μέγιστο.

3.34 Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή και έχει ελάχιστο, να αποδείξετε ότι έχει και μέγιστο.

3.35 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Αν το $f(\alpha)$ είναι μέγιστο της f και υπάρχει $\beta \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $g(\beta) = \alpha$, να αποδείξετε ότι η $h = f \circ g$ έχει μέγιστο.

3.36 Δίνεται μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ και $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \gamma]$, γνησίως αύξουσα στο $[\gamma, \beta]$ και $f(\gamma) = 0$, να αποδείξετε ότι:

α) το $x = \gamma$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης:

$$f(x) = 0, \quad x \in [\alpha, \beta]$$

β) το 0 είναι ελάχιστο της f στο $[\alpha, \beta]$.

3.37 Έστω $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^5(x) + e^{f(x)} = x - 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

3.38 Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f(x) < f(x+y)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $y > 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

3.39 Έστω $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση.

α) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(e^x - 1) - f(2 + e^{-x})$$

β) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση:

$$h(x) = f(x^3 + 1) - f(3 - e^x)$$

είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

3.40 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(x) + x \leq x^2 + 1 \leq f(x+1) - x$$
$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f.

β) Να βρείτε το ελάχιστο της f.

γ) Πού παρουσιάζεται το ελάχιστο της f;

3.41 Έστω $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση. Τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(5, 2)$ ανήκουν στη γραφική της παράσταση.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(f(e^x)\right) < 2$.

δ) Να αποδείξετε ότι:

$f(x) + f(2x) > f(3x) + f(4x)$ για κάθε $x > 0$

ε) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(e^x) + f(e^{3x}) = f(e^{2x}) + f(e^{4x}),\ x\in\mathbb{R}$$

3.42 Αν για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι $f(2015) = 1$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = f^2(x) - 2f(x) + 3$ έχει ελάχιστο,

β) να βρείτε το ελάχιστο της g.

3.43 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f^2(x) + g^2(x) = 1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Αν $h(x) = f(x)f(2-x) + g(x)g(2-x)$, τότε:

α) να βρείτε την τιμή $h(1)$,

β) να αποδείξετε ότι η h έχει μέγιστο, το οποίο και να βρείτε.

3.44 Οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχουν την ιδιότητα:

$$f^2(x) + g^2(x) = 4 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Αν οι γραφικές τους παραστάσεις C_f, C_g τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = 3$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x)g(x)$ έχει μέγιστο, το οποίο και να βρείτε.

3.45 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{x^2 + 1}$ να έχει ελάχιστο το -1 και μέγιστο το 4.

3.46 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{4f(x)}{1 + f^2(x)}$ έχει ελάχιστο το -2 και μέγιστο το 2.

3.47 Έστω $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση.

α) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι:

i) $f(2x) < f(3x)$ για κάθε $x > 0$

ii) $f(x) + f(2x) < f(3x) + f(4x)$ για κάθε $x > 0$

β) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, να αποδείξετε ότι:

i) $f(e^x) > f(e^{2x})$ για κάθε $x > 0$

ii) $f(e^{2x}) + f(e^{3x}) > f(e^{4x}) + f(e^{5x})$ για κάθε $x > 0$

iii) $f(2\ln x) > f(3\ln x)$ για κάθε $x > 1$

3.48 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\lambda x - 2, & \text{αν } x < 0 \\ \lambda x - 2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

α) Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε $f(1) = 2$.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε η f να είναι γνησίως μονότονη.

γ) Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-2, 6)$, να λύσετε:

i) την εξίσωση $f(x) = 6$,

ii) την ανίσωση $f(x) \geq 6$.

Η κατανόηση της θεωρίας

3.49 Να απαντήσετε στις επόμενες ερωτήσεις:

α) Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται:

i) γνησίως αύξουσα; **ii)** αύξουσα;

iii) γνησίως φθίνουσα; **iv)** φθίνουσα;

v) γνησίως μονότονη; **vi)** μονότονη;

β) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει: **i)** μέγιστο στο Α; **ii)** ελάχιστο στο Α;

(Θέμα εξετάσεων)

3.50 Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες προτάσεις ή σχέσεις:

α) Η συνάρτηση $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ μέγιστο, αν .... για κάθε $x \in A$ και ελάχιστο στο $x_0 \in A$, αν .... για κάθε $x \in A$.

β) Αν η συνάρτηση $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα, τότε $f(\alpha) < f(\beta) \iff$ ...... ενώ αν είναι γνησίως αύξουσα, τότε $f(\alpha) < f(\beta) \iff$ ....

3.51 Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

α) Κάθε συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

β) Αν για μια συνάρτηση $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία $f(\alpha) < f(\beta) \iff \alpha > \beta$ για κάθε α, β, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Αν $f(x) \leq \mu$ για κάθε $x \in D_f$, τότε η f έχει μέγιστο.

δ) Αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε και η $-f$ είναι γνησίως μονότονη, με αντίθετο είδος μονοτονίας.

ε) Αν οι f, g είναι γνησίως μονότονες με το ίδιο είδος μονοτονίας, τότε και η $f + g$ είναι επίσης γνησίως μονότονη και έχει τη μονοτονία των f, g.

στ) Αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει το πολύ μία λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ζ) Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $(0, +\infty)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα και στο:

$$(-\infty, 0] \cup (0, +\infty) = \mathbb{R}$$