Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

9.10 Έστω ότι:

$$\int_2^3 f(x)\,dx = 4 \text{ και } \int_2^3 g(x)\,dx = 2$$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_2^3 \big(f(x)+g(x)\big)dx$

β) $B = \int_2^3 \big(f(x)-g(x)\big)dx$

γ) $\Gamma = \int_2^3 \big(2f(x)-g(x)+4\big)dx$

δ) $\Delta = \int_2^3 \big(f(x)+3g(x)-5\big)dx$

9.11 Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_1^4 \frac{3x^2+10}{x^2+2}dx - \int_1^4 \frac{4}{x^2+2}dx = 9$

β) αν $\int_0^\pi f(x)\eta\mu^2 x\,dx = \int_0^\pi f(x)\sigma\upsilon\nu^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$,

τότε $\int_0^\pi f(x)\,dx = \pi$

9.12 Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$. Να γράψετε στη μορφή $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ τις παραστάσεις:

α) $\int_5^{13} f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx$

β) $\int_{-3}^5 f(x)\,dx - \int_{-3}^0 f(x)\,dx + \int_5^6 f(x)\,dx$

9.13 Αν είναι:

$$\int_2^5 f(x)\,dx = -2,\quad \int_8^5 f(x)\,dx = -3 \text{ και}$$

$$\int_8^{10} f(x)\,dx = 4$$

να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_5^8 f(x)\,dx$ **β)** $\int_2^{10} f(x)\,dx$

γ) $\int_5^{10} f(x)\,dx$ **δ)** $\int_2^8 f(x)\,dx$

9.14 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 5]$ και:

$$\int_1^4 f(x)\,dx = 1,\quad \int_2^5 f(x)\,dx = 3,\quad \int_2^4 f(x)\,dx = -3$$

$$\text{και } \int_3^5 f(x)\,dx = 6$$

να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^3 f(x)\,dx = 1$$

9.15 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και α, β, γ, δ∈Δ, να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx\cdot\int_\beta^\delta f(x)\,dx+\int_\delta^\alpha f(x)\,dx\cdot\int_\beta^\gamma f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\cdot\int_\gamma^\delta f(x)\,dx$$

2. Υπολογισμός στοιχειωδών ολοκληρωμάτων

9.16 Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $A=\int_0^1(3x^2+2x+e^x)\,dx$

β) $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\eta\mu x-2\sigma\upsilon\nu x)\,dx$

γ) $\Gamma=\int_2^3\left(e^{x-2}+\frac{1}{x-1}\right)dx$

δ) $\Delta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\eta\mu^2x}-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}\right)dx$

9.17 Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα:

α) $A=\int_1^3 f(x)\,dx,\ \ f(x)=2|x-2|$

β) $B=\int_0^2 f(x)\,dx,\ \ f(x)=3|x^2-1|-3$

γ) $\Gamma=\int_{-1}^1 f(x)\,dx,\ \ f(x)=|e^x-1|$

δ) $\Delta=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx,\ \ f(x)=|2\eta\mu x-1|$

9.18 Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $A=\int_{-1}^3\sqrt{3+2x-x^2}\,dx$

β) $B=\int_3^4\sqrt{-x^2+6x-8}\,dx$

9.19 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=e^{2x}+x-1$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο.

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της βρίσκεται κάτω από αυτήν, εκτός του σημείου επαφής.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$A=\int_{-1}^1|f(x)|\,dx$$

3. Ολοκλήρωμα και ανισότητες

9.20 Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

α) $\int_\alpha^\beta e^x\,dx>\int_\alpha^\beta(x+1)\,dx,\ \ \alpha<\beta$

β) $\int_\alpha^\beta \ln x\,dx<\int_\alpha^\beta(x-1)\,dx,\ \ 0<\alpha<\beta$

9.21 Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις:

$$f,\,g:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^1 f^2(x)\,dx+1\geq 2\int_0^1 f(x)\,dx$

β) $2+\int_0^1 f^2(x)\,dx\geq 2\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$, με $\int_0^1 g^2(x)\,dx=2$

γ) $1+3\int_0^1 f^2(x)\,dx\geq 6\int_0^1 xf(x)\,dx$

9.22 Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις:

$$f,\,g:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$$

για τις οποίες ισχύει:

$$f(x)\leq g(x)\ \text{ για κάθε }\ x\in[\alpha,\beta]$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\leq\int_\alpha^\beta g(x)\,dx$

β) $m(\beta-\alpha)\leq\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\leq M(\beta-\alpha)$

όπου m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f αντίστοιχα στο $[\alpha,\beta]$

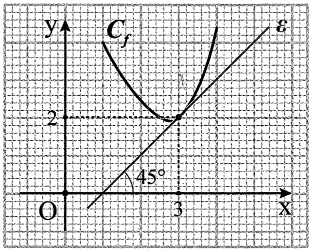
γ) $\frac{m}{M}(\beta-\alpha)^2 \le \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \cdot \int_\alpha^\beta \frac{1}{f(x)}\,dx \le$

$\le \frac{M}{m}(\beta-\alpha)^2$

με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

(Θέμα εξετάσεων)

9.23 Στο διπλανό σχήμα η f είναι κυρτή συνάρτηση και η ε είναι εφαπτομένη. Να αποδείξετε ότι:



α) $f(x) \ge x - 1,\ x \in \mathbb{R}$

β) $\int_2^4 f(x)\,dx \ge 4$

9.24 Δίνεται η κοίλη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(0) = 1 \text{ και } f'(0) = 2$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) \le 2x + 1$ **β)** $\int_0^3 f(x)\,dx \le 12$

9.25 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και:

$$|f'(x)| \le 1 \text{ για κάθε } x \in [0, 1]$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $-x \le f(x) \le x$ για κάθε $x \in [0, 1]$

β) $\int_0^1 f(x)\,dx \le \frac{1}{2}$

9.26 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x},\ x > 0$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$x^x \ge e^{x-1} \text{ για κάθε } x > 0$$

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{2016}^{2017} x^x\,dx > \int_{2016}^{2017} e^{x-1}\,dx$$

9.27 Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις:

$$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

με $f(0) = g(0) = 0$ και:

$$f'(x) = g'(x) + e^{2x} - 2x - 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο A,

β) Να αποδείξετε ότι στο σημείο A οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη.

γ) Αν $0 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$$

9.28 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + e^{-x} - x^2 - 2,\ x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα μόνο σημείο.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$e^x > 2x + e^{-x} \text{ για κάθε } x > 0$$

γ) Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta (e^x - x^2)\,dx > \int_\alpha^\beta (2 - e^{-x})\,dx$$

9.29 Δίνεται η κυρτή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(0) = f'(0) = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) \ge 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

β) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\int_x^{x^3} f(t)\,dt \le 0$$

9.30 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f, g: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

για τις οποίες ισχύει:

$$f(0) = 0,\ g(0) = 2 \text{ και } f(1) = g(1)$$

Αν η f είναι κυρτή και η g είναι κοίλη, να αποδείξετε ότι:

α) $g(x) - f(x) \ge -2x + 2,\ x \in [0, 1]$

β) $\int_0^1 g(x)\,dx \ge \int_0^1 f(x)\,dx + 1$

4. Εύρεση συνάρτησης

9.31 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα Δ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\int_1^2 f^2(x)dx \le 0, \ \ \Delta=[1,2]$

β) $\int_0^1 (f^2(x)-2f(x)+1)dx \le 0, \ \ \Delta=[0,1]$

γ) $\int_0^1 (4xf(x)-f^2(x)-4x^2)dx = 0, \ \ \Delta=[0,1]$

δ) $\int_2^4 (2xf(x)-f^2(x)-x^2)dx \ge 0, \ \ \Delta=[2,4]$

9.32 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα Δ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\int_0^1 f^2(x)dx + 1 \le 2\int_0^1 f(x)dx, \ \ \Delta=[0,1]$

β) $\int_0^1 f^2(x)dx + \frac{1}{12} \le \int_0^1 xf(x)dx, \ \ \Delta=[0,1]$

γ) $4\int_0^3 xf(x)dx = \int_0^3 f^2(x)dx + 36, \ \ \Delta=[0,3]$

δ) $2\int_0^1 xf(x)dx \ge \int_0^1 f^2(x)dx + \frac{1}{3}, \ \ \Delta=[0,1]$

9.33 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = x^2 + 4\int_1^2 tf(t)dt$

β) $\int_0^1 e^{1-t}f(t)dt = f(x) + e^x$

γ) $f(x) = 4x - xf'(x) + \int_0^2 f(t)dt$

δ) $f(x) = (3x^2+1)\int_0^1 f(t)dt - 1$

9.34 Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) = (10x^3+3x)\int_0^2 f(t)dt - 45$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = 20x^3 + 6x - 45$$

β) Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$g''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$$

γ) Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2} = f(x)+45$$

και $g(0)=g'(0)=1$, τότε να αποδείξετε ότι:

i) $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$,

ii) η συνάρτηση g είναι "1 − 1".

(Εξετάσεις 2008)

Η κατανόηση της θεωρίας

9.35 Να απαντήσετε στις επόμενες ερωτήσεις:

α) Να περιγράψετε την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

β) Να γράψετε τις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

γ) Τι εκφράζει γεωμετρικά το ολοκλήρωμα:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

όταν είναι $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$;

δ) Τι συμπεραίνετε για το:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

αν $f(x)\ge 0$ στο $[\alpha,\beta]$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha,\beta]$;

9.36 Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες προτάσεις ή σχέσεις:

α) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

όπου $\Delta x = \ldots\ldots\ldots$

β) Ισχύει ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\text{και } \int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \dots$$

γ) Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ και η f είναι συνεχής στο Δ, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

δ) Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \ \dots\dots$$

Αν επιπλέον η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha, \beta]$ και είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε ....

ε) Ισχύει ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)\,dx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \text{και}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

<u>9.37</u> **Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):**

α) Ισχύει ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$$

$$\text{και } \int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$$

β) Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$$

γ) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και όχι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx > 0$$

δ) Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ με $\alpha < \beta$.

Για να ισχύει η ιδιότητα:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx$$

πρέπει $\alpha < \gamma < \beta$.

ε) Αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και f, g συνεχείς, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$$

στ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx$$

(Εξετάσεις 2008)