1η ομάδα βασικών ολοκληρωμάτων

ΤΥΠΟΙ

1. $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = [cx]_{\alpha}^{\beta} = c(\beta - \alpha)$

2. $\int_{\alpha}^{\beta} x^{\nu} dx = \left[\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta^{\nu+1} - \alpha^{\nu+1}}{\nu+1}, \ \nu \in \mathbb{R} - \{-1\}$

3. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_{\alpha}^{\beta} = \ln|\beta| - \ln|\alpha| = \ln\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$

4. $\int_{\alpha}^{\beta} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_{\alpha}^{\beta} = -\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha$

5. $\int_{\alpha}^{\beta} \sigma\upsilon\nu x dx = [\eta\mu x]_{\alpha}^{\beta} = \eta\mu\beta - \eta\mu\alpha$

6. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_{\alpha}^{\beta} = 2\sqrt{\beta} - 2\sqrt{\alpha}$

7. $\int_{\alpha}^{\beta} e^{x} dx = [e^{x}]_{\alpha}^{\beta} = e^{\beta} - e^{\alpha}, \ \int_{\alpha}^{\beta} \ln x dx = [x\ln x - x]_{\alpha}^{\beta} = \beta\ln\beta - \beta - \alpha\ln\alpha + \alpha$

8. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\eta\mu^{2} x} dx = [-\sigma\varphi x]_{\alpha}^{\beta} = -\sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\alpha$

9. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2} x} dx = [\varepsilon\varphi x]_{\alpha}^{\beta} = \varepsilon\varphi\beta - \varepsilon\varphi\alpha$

10. $\int_{\alpha}^{\beta} e^{\lambda x} dx = \left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{e^{\lambda\beta} - e^{\lambda\alpha}}{\lambda}$

11. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\lambda x + \kappa} dx = \left[\frac{\ln|\lambda x + \kappa|}{\lambda}\right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{\lambda}\ln\left|\frac{\lambda\beta + \kappa}{\lambda\alpha + \kappa}\right|$

2η ομάδα βασικών ολοκληρωμάτων

Τα παρακάτω ολοκληρώματα υπολογίζονται με βάση το θεμελιώδες θεώρημα. Η εύρεση αρχικής βασίζεται στον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης ή στην παράγωγο γινομένου ή πηλίκου συναρτήσεων. Λόγω της σπουδαιότητας των μορφών αυτών, συνιστούμε τη σχολαστική μελέτη και την αποστήθιση όλων των τύπων.

1. $\int_{\alpha}^{\beta} e^{f(x)} f'(x)\,dx = \left[e^{f(x)}\right]_{\alpha}^{\beta}$

2. $\int_{\alpha}^{\beta} f^{\nu}(x) f'(x)\,dx = \left[\dfrac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}\right]_{\alpha}^{\beta},\ \nu \neq -1$

3. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) f'(x)\,dx = \left[\dfrac{f^{2}(x)}{2}\right]_{\alpha}^{\beta}$

4. $\int_{\alpha}^{\beta} \dfrac{f'(x)}{f^{2}(x)}\,dx = \left[-\dfrac{1}{f(x)}\right]_{\alpha}^{\beta}$

5. $\int_{\alpha}^{\beta} \dfrac{f'(x)}{f^{\nu}(x)}\,dx = \left[\dfrac{f^{-\nu+1}(x)}{-\nu+1}\right]_{\alpha}^{\beta},\ \nu \neq -1$

6. $\int_{\alpha}^{\beta} \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \left[\ln|f(x)|\right]_{\alpha}^{\beta}$

7. $\int_{\alpha}^{\beta} (\eta\mu f(x)) f'(x)\,dx = \left[-\sigma\upsilon\nu f(x)\right]_{\alpha}^{\beta}$

8. $\int_{\alpha}^{\beta} (\sigma\upsilon\nu f(x)) f'(x)\,dx = \left[\eta\mu f(x)\right]_{\alpha}^{\beta}$

9. $\int_{\alpha}^{\beta} (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_{\alpha}^{\beta}$

10. $\int_{\alpha}^{\beta} \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^{2}(x)}\,dx = \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]_{\alpha}^{\beta}$

11. $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + xf'(x))\,dx = \left[xf(x)\right]_{\alpha}^{\beta}$

12. $\int_{\alpha}^{\beta} \left((f'(x))^{2} + f(x)f''(x)\right)dx = \left[f(x)f'(x)\right]_{\alpha}^{\beta}$

13. $\int_{\alpha}^{\beta} e^{x}(f(x) + f'(x))\,dx = \left[e^{x} f(x)\right]_{\alpha}^{\beta}$

14. $\int_{\alpha}^{\beta} e^{\lambda x}(\lambda f(x) + f'(x))\,dx = \left[e^{\lambda x} f(x)\right]_{\alpha}^{\beta}$

15. $\int_{\alpha}^{\beta} \dfrac{f(x)f''(x) - (f'(x))^{2}}{f^{2}(x)}\,dx = \left[\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]_{\alpha}^{\beta}$

Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Το θεμελιώδες θεώρημα - Εύρεση ολοκληρώματος

10.31 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_1^2 (2x+1)\,dx$

β) $B = \int_0^1 (3x^2+2x+3)\,dx$

γ) $\Gamma = \int_0^\pi (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)\,dx$

δ) $\Delta = \int_1^2 \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

ε) $E = \int_0^1 (e^x+4x^3-2)\,dx$

στ) $Z = \int_3^4 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-2}\right)dx$

10.32 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^1 (3x^2+2x+e^x)\,dx$

β) $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x)\,dx$

γ) $\Gamma = \int_2^3 \left(e^{x-2}+\frac{1}{x-1}\right)dx$

δ) $\Delta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\eta\mu^2 x}-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)dx$

10.33 Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $A=\int_1^9 \sqrt{x}\,dx$ β) $B=\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx$

γ) $\Gamma=\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+1}{x}dx$

δ) $\Delta=\int_0^3 \frac{\sqrt{x+1}+1}{x+1}dx$

10.34 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A=\int_1^2 \frac{2(x-2)^2}{x}dx$

β) $B=\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx$

10.35 Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi x\,dx$ β) $B=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi x\,dx$

γ) $\Gamma=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\varepsilon\varphi^2 x)\,dx$

δ) $\Delta=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\varepsilon\varphi^4 x+\varepsilon\varphi^2 x)\,dx$

10.36 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση:

$f: \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x)=3x^2+2x+\int_0^2 f(x)\,dx,\ x\in\mathbb{R}$

β) $f(x)=2x^3+x\int_0^1 f(x)\,dx,\ x\in\mathbb{R}$

γ) $f(x)=e^x+\frac{1}{e}\int_0^1 f(x)\,dx,\ x\in\mathbb{R}$

10.37 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A=\int_0^1 f^3(x)f'(x)\,dx$ με $f(0)=0,\ f(1)=4$

β) $B=\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ με $f(1)=e,\ f(2)=1$

γ) $\Gamma=\int_0^1 f'(x)e^{f(x)}dx$ με $f(1)=0,\ f(0)=1$

δ) $\Delta=\int_2^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx$ με $f(2)=1,\ f(4)=4$

ε) $E=\int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx$ με $f(0)=1,\ f(1)=2$

στ) $Z=\int_0^1 \left[(f'(x))^2+f(x)f''(x)\right]dx$ με $f(0)=f(1)=0$

10.38 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A=\int_0^1 2xe^{x^2}dx$ β) $B=\int_0^1 3x^2e^{x^3}dx$

γ) $\Gamma=\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx$

δ) $\Delta=\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx$

10.39 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A=\int_0^{\pi} e^{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x\,dx$

β) $B=\int_{-\pi}^{\pi} e^{\sigma\upsilon\nu x}\eta\mu x\,dx$

γ) $\Gamma=\int_0^{\pi} \eta\mu^4 x\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx$

δ) $\Delta=\int_{-\pi}^{\pi} \sigma\upsilon\nu^3 x\cdot\eta\mu x\,dx$

ε) $E=\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu^3 x\,dx$ στ) $Z=\int_0^{\pi} \eta\mu^3 x\,dx$

10.40 Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^2 x\,dx$ β) $B=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi^2 x\,dx$

10.41 Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο [0, 2] με $f(0)=0$ και $f(2)=e^2$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A=\int_0^2 e^x(f'(x)+f(x))\,dx$

β) $B=\int_0^2 e^{-x}(f'(x)-f(x))\,dx$

γ) $\Gamma=\int_0^2 e^{2x}(f'(x)+2f(x))\,dx$

δ) $\Delta=\int_0^2 e^{-3x}(f'(x)-3f(x))\,dx$

10.42 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A=\int_1^3 f(x)\,dx,\ f(x)=2|x-2|$

β) $B=\int_0^2 f(x)\,dx,\ f(x)=3|x^2-1|-3$

γ) $\Gamma = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx, \;\; f(x) = |e^x - 1|$

δ) $\Delta = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx, \; f(x) = |2\eta\mu x - 1|$

10.43 Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^2 \frac{dx}{1+e^x} + \int_0^2 \frac{dx}{1+e^{-x}} = 2$

β) $\int_0^\pi \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x}dx + \int_0^\pi \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{-x}}dx = 0$

10.44 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\int_\alpha^\beta f(x)\left[\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right]dx = 5\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - 6$

β) $\int_\alpha^\beta \left[\int_\alpha^\beta f(x)f(u)\,dx\right]du = 2\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

10.45 Έστω $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_1^2 f(x+3)\,dx = \int_4^5 f(x)\,dx$

β) $\int_2^3 (f(x+5) - f(x+4))\,dx =$

$= \int_4^5 (f(x+3) - f(x+2))\,dx$

2. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

10.46 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^1 xe^x\,dx$ β) $B = \int_0^1 x^2 e^x\,dx$

γ) $\Gamma = \int_0^1 xe^{-x}\,dx$ δ) $\Delta = \int_0^1 xe^{2x}\,dx$

ε) $E = \int_0^1 x^2 e^{2x}\,dx$ στ) $Z = \int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$

ζ) $H = \int_0^1 x^2 e^{-3x}\,dx$ η) $\Theta = \int_0^1 x^3 e^{-x}\,dx$

10.47 Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^\pi x\sigma\upsilon\nu x\,dx$ β) $B = \int_0^\pi x\eta\mu x\,dx$

γ) $\Gamma = \int_0^\pi x^2\sigma\upsilon\nu x\,dx$ δ) $\Delta = \int_{-\pi}^\pi x^2\eta\mu x\,dx$

ε) $E = \int_0^\pi x\eta\mu 2x\,dx$

στ) $Z = \int_0^\pi x^2\sigma\upsilon\nu 2x\,dx$

ζ) $H = \int_0^\pi x^2\eta\mu 3x\,dx$

η) $\Theta = \int_{-\pi}^\pi x^2\sigma\upsilon\nu 3x\,dx$

10.48 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_1^e \ln x\,dx$ β) $B = \int_1^e x\ln x\,dx$

γ) $\Gamma = \int_1^e x^2\ln x\,dx$ δ) $\Delta = \int_1^e \ln^2 x\,dx$

ε) $E = \int_1^e x^2\ln^3 x\,dx$ στ) $Z = \int_1^e x^3\ln^2 x\,dx$

10.49 Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^1 (x+1)e^x\,dx$

β) $B = \int_0^2 \ln(x+1)\,dx$

γ) $\Gamma = \int_0^1 2x\ln(x^2+1)\,dx$

δ) $\Delta = \int_1^e (2x+1)\ln^2 x\,dx$

10.50 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$ β) $B = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\eta\mu^2 x}dx$

γ) $\Gamma = \int_0^{\ln 2} e^x\ln(1+e^x)\,dx$

δ) $\Delta = \int_{-1}^1 x\ln(x^2+3)\,dx$

10.51 Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x \cdot \ln(1+\sigma\upsilon\nu x)\,dx$

β) $B = \int_0^\pi \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln(1+\eta\mu x)\,dx$

γ) $\Gamma = \int_0^\pi \eta\mu x \cdot \ln(1+\eta\mu x)\,dx$

δ) $\Delta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln(1+\sigma\upsilon\nu x)\,dx$

10.52 Να βρείτε την τιμή f(1), αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα [0, 1] και:

$$\int_0^1 x^2 f'(x)\,dx = 2004 - 2\int_0^1 x f(x)\,dx$$

10.53 Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο με:

$$f(\pi) = 3 \ \text{ και}$$

$$\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x))\eta\mu x\,dx = 7$$

να αποδείξετε ότι $f(0) = 4$.

3. Η μορφή I = f(I) – Ολοκλήρωση στον έναν όρο

10.54 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^{\pi} e^x \eta\mu x\,dx$

β) $B = \int_0^{\pi} e^x \sigma\upsilon\nu x\,dx$

γ) $\Gamma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \eta\mu x\,dx$

δ) $\Delta = \int_0^{\pi} e^{2x} \sigma\upsilon\nu x\,dx$

10.55 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \eta\mu 2x\,dx$

β) $B = \int_0^{\pi} e^{3x} \sigma\upsilon\nu 3x\,dx$

γ) $\Gamma = \int_0^{\pi} e^{-x} \sigma\upsilon\nu 2x\,dx$

δ) $\Delta = \int_1^{e^{\pi}} \sigma\upsilon\nu(\ln x)\,dx$

10.56 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_1^{e} e^x \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)dx$

β) $B = \int_1^{e} e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)dx$

10.57 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_1^{e} \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}}\,dx$

β) $B = \int_1^{e} \frac{1 + x\ln x}{x} e^x\,dx$

4. Η μέθοδος της αντικατάστασης

10.58 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_{-3}^{0} x\sqrt{1-x}\,dx$

β) $B = \int_2^{5} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

γ) $\Gamma = \int_1^{4} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

δ) $\Delta = \int_2^{7} \frac{x+1}{\sqrt{x+2}}\,dx$

ε) $E = \int_2^{5} x\sqrt{x-1}\,dx$

στ) $Z = \int_0^{7} x\sqrt[3]{x+1}\,dx$

10.59 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^{\pi^2} \sigma\upsilon\nu\sqrt{x}\,dx$ β) $B = \int_0^{\pi^2} \eta\mu\sqrt{x}\,dx$

γ) $\Gamma = \int_0^{1} x^3 e^{x^2}\,dx$ δ) $\Delta = \int_0^{3} e^{\sqrt{x+1}}\,dx$

10.60 Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^1 x^7 e^{x^4}\,dx = \frac{1}{4}$ β) $\int_0^1 x^5 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}$

10.61 Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^{1} x\sqrt{1-x}\,dx$ β) $B = \int_2^{5} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

γ) $\Gamma = \int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ δ) $\Delta = \int_1^{2} e^{x^2+\ln x}\,dx$

10.62 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^{\pi} \eta\mu^3 x\,dx$ β) $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^3 x\,dx$

10.63 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu^3 x + \eta\mu^4 x)\sigma\upsilon\nu x\, dx$

β) $B = \int_0^{\pi} (\sigma\upsilon\nu^4 x + \eta\mu^2 x)\eta\mu x\, dx$

γ) $\Gamma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^5 x\, \sigma\upsilon\nu^2 x\, dx$

δ) $\Delta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^4 x\, \sigma\upsilon\nu^3 x\, dx$

10.64 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^4 x} dx$ **β)** $B = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\eta\mu^4 x} dx$

5. Ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησής

10.65 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-x+3} dx$

β) $B = \int_0^2 \frac{3x-2}{x^2+x-12} dx$

γ) $\Gamma = \int_0^1 \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2} dx$

δ) $\Delta = \int_0^1 \frac{2x^3-3x^2-11x+1}{x^2-x-6} dx$

10.66 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^1 \frac{3x^2+6}{x^3+6x+10} dx$

β) $B = \int_0^1 \frac{x^3+2x}{x^2+x+1} dx$

γ) $\Gamma = \int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2} dx$

δ) $\Delta = \int_3^4 \frac{2x^3-3x^2-4x+2}{x^2-3x+2} dx$

ε) $E = \int_2^3 \frac{6x^2+x-3}{x^2(x-1)} dx$

στ) $Z = \int_0^1 \frac{3x^2+4x+2}{(x+1)(x^2+x+1)} dx$

10.67 Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^1 \frac{4x+7}{x^2+x-6} dx$

β) $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sigma\upsilon\nu x+7}{\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu x-6} \eta\mu x\, dx$

γ) $\Gamma = \int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2} dx$

δ) $\Delta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x+3\eta\mu x+2} dx$

ε) $E = \int_0^1 \frac{2x^2-5x}{x^2-5x+6} dx$

στ) $Z = \int_0^1 \frac{2e^{3x}-5e^{2x}}{e^{2x}-5e^x+6} dx$

6. Αναγωγικοί τύποι

10.68 Δίνεται το ολοκλήρωμα:

$$I_\nu = \int_0^1 \frac{t^{2\nu+1}}{t^2+1} dt,\ \nu \in \mathbb{N}$$

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I_0.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2} - I_\nu,\ \nu \in \mathbb{N}$$

γ) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα I_1, I_2.

10.69 Δίνεται ότι:

$$I_\nu = \int_1^e \ln^\nu x\, dx \ \text{ και } \ K_\nu = \int_1^e x \ln^\nu x\, dx,\ \nu \in \mathbb{N}^*$$

α) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα I_1, K_1.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$I_\nu = e - \nu I_{\nu-1} \ \text{ για κάθε } \ \nu \geq 2$$

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$2K_\nu + \nu K_{\nu-1} = e^2 \ \text{ για κάθε } \ \nu \geq 2$$

δ) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$I_2,\ I_3,\ K_2,\ K_3$$

10.70 Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα:

$$I_\nu = \int_{-1}^1 (1-x^2)^\nu dx$$

ικανοποιεί τον αναγωγικό τύπο:

$$I_\nu = \frac{2\nu}{2\nu+1} I_{\nu-1} \text{ για κάθε } \nu \geq 2$$

10.71 Αν είναι:

$$I_\nu = \int_1^e \frac{\ln^\nu x}{x^2} dx, \text{ όπου } \nu \in \mathbb{N}^*$$

να αποδείξετε ότι:

α) $I_\nu = -\frac{1}{e} + \nu I_{\nu-1},\ \nu \geq 2$ **β)** $I_3 = 6 - \frac{16}{e}$

10.72 Να αποδείξετε τους παρακάτω αναγωγικούς τύπους:

α) Αν $I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^\nu x\, dx$, τότε:

$$\nu I_\nu = (\nu-1) I_{\nu-2},\ \nu \geq 2$$

β) Αν $J_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^\nu x\, dx$, τότε:

$$\nu J_\nu = (\nu-1) J_{\nu-2},\ \nu \geq 2$$

10.73 Αν είναι:

$$I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^\nu x\, dx \text{ και } A_\nu = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi^\nu x\, dx$$

να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 3$ ισχύει:

α) $I_\nu = \frac{1}{\nu-1} - I_{\nu-2}$ **β)** $A_\nu = \frac{1}{\nu-1} - A_{\nu-2}$

10.74 Να αποδείξετε τους παρακάτω αναγωγικούς τύπους:

α) Αν $I_\nu = \int_1^e x^2 \ln^\nu x\, dx$, τότε:

$$3I_\nu = e^3 - \nu I_{\nu-1},\ \nu \geq 2$$

β) Αν $I_\nu = \int_0^1 x^\nu \sqrt{1-x}\, dx$, τότε:

$$I_\nu = \frac{2\nu}{2\nu+3} I_{\nu-1},\ \nu \geq 2$$

Συμπληρωματικές ασκήσεις

10.75 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^1 xe^{-x} dx$ **β)** $B = \int_0^\pi x \cdot \sigma\upsilon\nu 3x dx$

γ) $\Gamma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \eta\mu 2x\, dx$

δ) $\Delta = \int_0^1 (x^2+2x+1)e^{-2x} dx$

10.76 Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $A = \int_{-1}^0 x^2 e^{-x} dx$

β) $B = \int_0^\pi x^2 \eta\mu 2x\, dx$

γ) $\Gamma = \int_0^\pi x^2 \sigma\upsilon\nu 3x\, dx$

δ) $\Delta = \int_1^e x \ln^2 x\, dx$

10.77 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_1^e \ln 2x\, dx$ **β)** $B = \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx$

γ) $\Gamma = \int_1^e \ln^2 x\, dx$ **δ)** $\Delta = \int_1^e x^2 \ln^3 x\, dx$

ε) $E = \int_1^2 e^{x+\ln x} dx$

στ) $Z = \int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) dx$

10.78 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}} dx$ **β)** $B = \int_1^{\sqrt{2}} e^{x^2+\ln x} dx$

γ) $\Gamma = \int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2} dx$ **δ)** $\Delta = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x+1} dx$

10.79 Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο με $f(1) = f'(1) = 0$, να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^1 f(x)\, dx = \int_1^0 xf'(x)\, dx$

β) $\int_0^1 x^2 f''(x)\, dx = 2\int_0^1 f(t)\, dt$

10.80 Μια συνάρτηση f με $f(0)=1$ και $f(1)=2$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$. Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^1 x^2 \left(3f(x) + xf'(x)\right) dx$

β) $B = \int_0^1 \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} dx$

10.81 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x)=\begin{cases}\ln x-1, & \text{αν } x\geq e\\ 1-\ln x, & \text{αν } 0<x<e\end{cases}$, $A=\int_1^{e^3} f(x)\,dx$

β) $f(x)=3|x^2-4|+2x$, $B=\int_0^4 f(x)\,dx$

γ) $f(x)=|\ln x|$, $\Gamma=\int_{\frac{1}{e}}^{e} f(x)\,dx$

δ) $f(x)=|e^x-x-1|$, $\Delta=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

10.82 Έστω $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και $\alpha, \beta, \gamma, \delta\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta \big(f(x+\delta)-f(x+\gamma)\big)dx=$$
$$=\int_\gamma^\delta \big(f(x+\beta)-f(x+\alpha)\big)dx$$

10.83 Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[0, 2]$ και:

$$\int_0^2 xf'(x)\,dx=4\alpha-\int_0^2 f(x)\,dx$$

να αποδείξετε ότι $f(2)=2\alpha$.

10.84 Η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο με $f(\pi)=1$ και:

$$\int_0^\pi \big(4f(x)+f''(x)\big)\eta\mu 2x\,dx=2$$

Να αποδείξετε ότι $f(0)=2$.

10.85 Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $[0, \pi]$, η C_f διέρχεται από το σημείο $A(\pi, 1)$ και ισχύει:

$$\int_0^\pi \big(f(x)+f''(x)\big)\sigma\upsilon\nu x\,dx=1$$

να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από το σημείο $B(0, -2)$.

10.86 Έστω f μια συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$. Αν ισχύουν:

$$f'(2)=0,\ f(0)=-2 \text{ και}$$
$$\int_0^2 [xf''(x)+3f'(x)]dx=4034$$

να βρείτε το $f(2)$.

10.87 Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν συνεχή δεύτερη παράγωγο και:

$$f(\alpha)=f(\beta)=g(\alpha)=g(\beta)=0$$

να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f''(x)g(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(x)g''(x)\,dx$$

10.88 Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 f(1-x)\,dx$

β) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x^2}f(x)\,dx$

10.89 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A=7\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\varepsilon\varphi^8 x+\varepsilon\varphi^6 x)\,dx$

β) $B=\int_0^1 \frac{2x^3+7x^2+12x+9}{x^2+3x+2}dx$

10.90 Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $A=\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$

β) $B=\int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{e^x+1}\,dx$

γ) $\Gamma=\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$

10.91 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A=\int_0^{\ln 2} \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$

β) $B=\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$

γ) $\Gamma=\int_5^{12} \frac{1+\sqrt{x+4}}{x}dx$

δ) $\Delta=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x+3\eta\mu x+2}dx$

10.92 Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $A=\int_1^e \frac{\ln x}{x(1+\sqrt{\ln x})}dx$

β) $B=\int_{\ln 3}^{3\ln 2} \sqrt{e^x+1}\,dx$

10.93 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{ημx}dx$ **β)** $B = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{ημ^3 x}dx$

10.94 Αν η f είναι συνεχής και:

$$\int_0^1 x^3 f(x^4)\,dx = 2$$

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2\int_0^1 xf(x^2)\,dx + 3\int_0^1 x^2 f(x^3)\,dx$$

10.95 Αν η συνάρτηση $f: [0, 1] \longrightarrow (0, +\infty)$ έχει συνεχή παράγωγο, $f(0) = 1$ και $f(1) = 2$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x) + f(x)}dx$$

10.96 **α)** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$A = \int_3^4 \frac{x+4}{x^2-4}dx$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$B = \int_5^{12} \frac{1+\sqrt{x+4}}{x}dx$$

10.97 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{12}{3συνx + συν^3 x}dx, \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

β) $I = \int_0^2 \ln\frac{e^x + e^2}{e^x + 1}dx$

10.98 Δίνεται το ολοκλήρωμα:

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)}dx$$

Να υπολογίσετε:

α) την τιμή $I(\alpha)$, **β)** το $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$.

10.99 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^1 \frac{x\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx$

β) $B = \int_{-1}^1 \frac{1}{(e^x+1)(x^2+1)}dx$

10.100 Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^e \left(x^{\ln x} + e^{\sqrt{\ln x}}\right)dx = e^2 - 1$$

10.101 Έστω $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$. Η F είναι αρχική της συνάρτησης $\frac{f(x)}{x}$ στο $(0, +\infty)$.

α) Να βρείτε μια αρχική της συνάρτησης:

$$\frac{f(\lambda x)}{x}, \text{ με } \lambda \neq 0, \text{ στο } (0, +\infty)$$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^2 \left(\int_3^4 f'(xt)\,dt\right)dx = \int_3^4 \left(\int_1^2 f'(xt)\,dt\right)dx$$

10.102 Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 0$, έχει την ιδιότητα:

$$f'(x) + f(x) = ημx \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I(x) = \int_0^x e^t ημt\,dt, \ x \in \mathbb{R}$$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{1}{2}(ημx - συνx + e^{-x}), \ x \in \mathbb{R}$$

10.103 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{ημx}{x} - συνx, \ x \in (0, \pi)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, \pi)$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{f^2(x)}dx$$

10.104 Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

με συνεχή παράγωγο στο 0, έχει την ιδιότητα:

$$f(x) = xf'(x) + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

β) $B = \int_0^1 f(x)\,dx$, όταν $f(1) = \sqrt{2}$

10.105 Αν η $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^3 \frac{f(4x) - f(2x)}{x}dx = \int_2^4 \frac{f(3x) - f(x)}{x}dx$$