Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Το $I=\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και η αντικατάσταση $x=\alpha+\beta-u$

11.24 Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^\alpha f(x)g(\alpha-x)dx=\int_0^\alpha f(\alpha-x)g(x)dx$

β) $\int_0^2 x^\nu(2-x)^\kappa dx=\int_0^2 x^\kappa(2-x)^\nu dx,\ \kappa,\nu\in\mathbb{N}^*$

11.25 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)+f(-x)=2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-1}^1 f(-x)dx=\int_{-1}^1 f(x)dx$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$A=\int_{-1}^1 f(x)dx$$

11.26 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$f(x)+f(1-x)=4030 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 f(x)dx$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$A=\int_0^1 f(x)dx$$

11.27 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{2^x+1}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)+f(-x)=x^2+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{-\alpha}^\alpha f(x)dx,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

11.28 Αν είναι:

$$\int_1^2 f(x)dx=5$$

να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$A=\int_1^2 x\big(f(x)+f(3-x)\big)dx$$

11.29 **α)** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x)\neq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta \frac{f(x-\alpha)}{f(x-\alpha)+f(\beta-x)}dx=\frac{\beta-\alpha}{2}$$

β) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα $[0,\alpha]$ και για κάθε $x\in[0,\alpha]$ ισχύει:

$$f(x)=f(\alpha-x),\ g(x)+g(\alpha-x)=\beta$$

να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^\alpha f(x)g(x)dx=\frac{\beta}{2}\int_0^\alpha f(x)dx$$

11.30 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_0^3\frac{1}{1+3^{2x-3}}dx$$

11.31 Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{συν}x}{1+e^x}dx$

β) $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2^{\text{ημ}x}}{2^{\text{ημ}x}+2^{\text{συν}x}}dx$

γ) $\Gamma=\int_0^{2\alpha}\frac{f(x)}{f(x)+f(2\alpha-x)}dx$

δ) $\Delta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\alpha\text{ημ}x+\beta\text{συν}x}{\text{ημ}x+\text{συν}x}dx$

11.32 Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x+\text{ημ}x}dx=\frac{\pi}{4}$

β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ημ^2 x + συν^ν x}{1 + ημ^ν x + συν^ν x} dx = \frac{\pi}{4}$

11.33 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^2 \frac{1}{1 + e^{\sqrt{2-x} - \sqrt{x}}} dx$

β) $B = \int_0^2 \ln \frac{e^x + e^2}{e^x + 1} dx$

11.34 Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^{\pi} συν^7 x \, dx = 0$

β) $\int_0^{2\pi} συν^7 x \, dx = 0$

γ) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) dx = 0$

δ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ημx - συνx}{1 + ημxσυνx} dx = 0$

11.35 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{συν^7 x}{ημ^7 x + συν^7 x} dx$

β) $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{ημx}}{\sqrt[3]{ημx} + \sqrt[3]{συνx}} dx$

11.36 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + συν^ν x}{2 + ημ^ν x + συν^ν x} dx, \quad ν \in \mathbb{N}^*$$

11.37 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 3xy$$

να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx = 1$$

11.38 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και ισχύει:

$$f(x) + f(α + β - x) = c \quad \text{για κάθε } x \in [α, β]$$

να αποδείξετε ότι:

$$\int_α^β f(x) dx = (β - α) f\left(\frac{α + β}{2}\right) = \frac{β - α}{2}[f(α) + f(β)]$$

11.39 α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-α, α]$ και ισχύει:

$$f(x) \neq -1 \text{ και } f(x)f(-x) = 1$$
$$\text{για κάθε } x \in [-α, α]$$

να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{-α}^{α} \frac{x^{2ν}}{1 + f(x)} dx$$

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[α, β]$ και ισχύει ότι:

$$f(α + β - x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι:

$$\int_α^β x f(x) dx = \frac{α + β}{2} \int_α^β f(x) dx$$

11.40 Δίνεται η συνεχής και άρτια συνάρτηση f στο διάστημα $[-1, 1]$ και το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^{\frac{2\pi}{ν}} x f(συν(νx)) dx, \quad ν \in \mathbb{N}^*$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $I = \frac{\pi}{ν} \int_0^{\frac{2\pi}{ν}} f(συν(νx)) dx$

β) $\int_0^{\frac{2\pi}{ν}} f(συν(νx)) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{ν}} f(συν(νx)) dx$

γ) $\int_0^{\frac{2\pi}{ν}} x f(συν(νx)) dx = \frac{4\pi}{ν} \int_0^{\frac{\pi}{2ν}} f(ημ(νx)) dx$

11.41 α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{\pi} x f(ημx) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(ημx) dx$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{xημx}{3 + ημ^2 x} dx$$

2. Ολοκλήρωμα της αντίστροφης συνάρτησης

11.42 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{-1}^{1} f^{-1}(x)\,dx$$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$.

11.43 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^2 \quad \text{με} \quad x\ge 0$$

Να αποδείξετε ότι:

α) ορίζεται η $f^{-1}\colon [0,+\infty)\longrightarrow \mathbb{R}$,

β) $\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 f^{-1}(x)\,dx=1$.

11.44 Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx+\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)\,dx=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)$$

Μπορείτε να αποδείξετε γεωμετρικά την παραπάνω ισότητα στην περίπτωση που $f(x)\ge 0$;

11.45 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=e^x+x-1,\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$A=\int_0^e f^{-1}(x)\,dx$$

11.46 Έστω η συνάρτηση:

$$f(x)=\eta\mu x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\,dx$$

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\,dx+2\int_{-1}^{1} x f^{-1}(x)\,dx=\pi$$

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^\nu(x)\,dx+\nu\int_{-1}^{1} x^{\nu-1} f^{-1}(x)\,dx=\pi$$

όπου ν άρτιος φυσικός με $\nu\neq 0$.

11.47 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x+\eta\mu x,\ x\in[0,\pi]$$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=x$.

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_0^\pi f^{-1}(x)\,dx$$

ε) Να αποδείξετε ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν μοναδικά κοινά σημεία τα $O(0,0)$ και $A(\pi,\pi)$.

3. Ολοκλήρωμα άρτιας ή περιττής συνάρτησης

11.48 Έστω $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση.

α) Αν η f είναι περιττή, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$A=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$B=\int_{-3}^{3} x^3\left(e^{x^2}+1\right)dx$$

11.49 Έστω $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση.

α) Αν η f είναι άρτια, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx=2\int_0^\alpha f(x)\,dx$$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1-x^2}{1+x^2}dx=2\int_0^1\frac{1-x^2}{1+x^2}dx$$

11.50 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A=\int_{-2}^{2} x^5\sqrt{x^2+1}\,dx$

β) $B=\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{x^4+1}dx$

γ) $\Gamma=\int_{-\pi}^{\pi}\eta\mu^3 x\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$

δ) $\Delta=\int_{-\pi}^{\pi} x^3(1+\sigma\upsilon\nu 2x)^8\,dx$

11.51 Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_{-2}^{2} x^2\sqrt{1+x^2}\,dx = 2\int_{0}^{2} x^2\sqrt{1+x^2}\,dx$

β) $\int_{-1}^{1} \frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{e^{x^2}}\,dx = 2\int_{0}^{1} e^{-x^2}(1+\sigma\upsilon\nu x)\,dx$

11.52 Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$, η f είναι άρτια και η g είναι περιττή, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1}\,dx = \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$$

11.53 α) Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και συνεχής στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{e^{x}+1}\,dx = \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$$

β) Αν $\alpha > 1$ και f, g συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[-1, 1]$, από τις οποίες η f είναι άρτια και η g περιττή, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\alpha^{g(x)}+1}\,dx = \int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

4. Ολοκλήρωση ειδικών συναρτήσεων

11.54 Έστω $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(1) = e$ και:

$$f'(x) = 2e^{x^2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

11.55 Έστω μια συνάρτηση $f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, 1]$ και:

$$f(1) = f'(1) = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} x^2 f''(x)\,dx$$

β) Αν $f''(x) = \dfrac{6}{\sqrt{x^3+1}}$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

11.56 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α) $\int_{0}^{2\alpha} f(x)\,dx = \int_{0}^{\alpha} \big(f(x) + f(2\alpha - x)\big)\,dx$

β) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma\upsilon\nu x)\,dx$

γ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma\upsilon\nu x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\eta\mu x)\,dx$

δ) $\int_{-\pi}^{\pi} f(\sigma\upsilon\nu x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} f(\sigma\upsilon\nu x)\,dx$

11.57 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, να αποδείξετε ότι:

α) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\eta\mu x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x)\,dx$

β) $\int_{0}^{\pi} f(\eta\mu x)\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x)\,dx$

11.58 Αν είναι:

$$f'(x) = \sqrt{1+f^2(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
$$\text{και } f(0) + f(1) = 0$$

τότε:

α) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία,

β) να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$A = \int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

11.59 Έστω f άρτια συνάρτηση και συνεχής στο $[-2, 2]$. Αν F είναι μια αρχική της f και:

$$F(-2) = F(2) - 2008$$

να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{0}^{2} f(x)\,dx$$

11.60 Αν $f(x+T) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{0}^{3T} f(x)\,dx = 3\int_{0}^{T} f(x)\,dx$$

11.61 Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και:

$$f(x) + f(x+1) + f(x+2) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι περιοδική με περίοδο $T = 3$,

β) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} f(x+2)\,dx$.

11.62 **α)** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$A = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

με την αντικατάσταση:

$$x = \varepsilon\varphi y,\ \ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$B = \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

με την αντικατάσταση:

$$x = 2\varepsilon\varphi y,\ \ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

11.63 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x}\,dx$ **β)** $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx$

11.64 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$ **β)** $B = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$

11.65 Δίνεται το ολοκλήρωμα:

$$A = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx$$

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα Α.

11.66 Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$xf(x) - f(-x) = x + 1$$
$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^2+1},\ \ x \in \mathbb{R}$$

β) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $A = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$ **ii)** $B = \int_0^1 f(x)\,dx$

5. Συμπληρωματικές ασκήσεις

11.67 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α) $\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

β) $\int_{\alpha+\gamma}^{\beta+\gamma} f(x-\gamma)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

γ) $\int_{\alpha\gamma}^{\beta\gamma} f\left(\frac{x}{\gamma}\right)dx = \gamma\int_\alpha^\beta f(x)\,dx,\ \ \gamma \neq 0$

δ) $\int_{\frac{\alpha}{\gamma}}^{\frac{\beta}{\gamma}} f(x\gamma)\,dx = \frac{1}{\gamma}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx,\ \ \gamma \neq 0$

ε) $(\beta-\alpha)\int_0^1 f(\alpha+(\beta-\alpha)x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

11.68 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[1, 3]$, $f(3) = 31$, $f(1) = 6$ και:

$$f'(x) \geq 3x^2 \ \text{ για κάθε } x \in [1, 3]$$

11.69 Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = 2x + \int_1^3 f(t)\,dt \ \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

11.70 Δίνεται το ολοκλήρωμα:

$$I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\sigma\upsilon\nu^\nu x\,dx$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$I_\nu = \frac{\nu-1}{\nu}I_{\nu-2} - \frac{1}{\nu^2},\ \ \nu \in \mathbb{N} \ \text{ με } \nu \geq 3$$

β) Να υπολογίσετε το I_3.

11.71 Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και περιοδική, να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_\beta^{\beta+T} f(x)\,dx$$
$$\text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

11.72 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^3 \frac{(3-x)^{2014}}{(3+x)^{2016}}dx$$

11.73 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_{\sqrt{2}-2}^{\sqrt{2}} \frac{\ln(x+1)}{x^2+x+1}dx$

β) $B = \int_{\log e}^{\ln 10} \frac{x\ln x}{(x^2+x+1)^2}\left(e^x + e^{\frac{1}{x}}\right)dx$

11.74 Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $A = \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$

β) $B = \int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$

γ) $\Gamma = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

δ) $\Delta = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

11.75 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{1}{x^2\sqrt{9+x^2}}dx$

β) $B = \int_{2\sqrt{3}}^{4} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}dx$

11.76 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x}dx$

β) $B = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

γ) $\Gamma = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$

δ) $\Delta = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(1+x^2)(1+e^x)}dx$

11.77 Αν $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^{\alpha} x^2\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx = \frac{\pi\alpha^4}{16}$

β) $\int_{\alpha}^{\alpha\sqrt{3}} x\sqrt{\alpha^2+x^2}\,dx = \frac{2}{3}\alpha^3\left(4-\sqrt{2}\right)$

11.78 Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{1+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}dx$

β) $B = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{12}{3\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^3 x}dx$

11.79 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}\,dx, \ \alpha < \beta$$

Η κατανόηση της θεωρίας

11.80 Να απαντήσετε στις επόμενες ερωτήσεις:

α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $\alpha, x \in \Delta$, ποια είναι η παράγωγος της συνάρτησης $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt, \ x \in \Delta$;

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη, ποια είναι η παράγωγος της συνάρτησης:

$$h(x) = \int_{\alpha}^{g(x)} f(t)\,dt$$

στο πεδίο ορισμού της;

γ) Αν G είναι μια αρχική της συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, με τι ισούται το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$;

δ) Να γράψετε τον κανόνα της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)\,dx$$

ε) Ποια μορφή παίρνει το ολοκλήρωμα:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\left(g(x)\right)g'(x)\,dx$$

όπου f, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις;

11.81 **Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις ή σχέσεις:**

α) $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\right)' = \dots\dots\dots\dots\dots$ και

$\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

β) Αν $g(x) = \int_{\varphi(x)}^{\omega(x)} f(t)\,dt$, τότε:

$g'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

με την προϋπόθεση ότι η f είναι συνεχής και οι φ, ω είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

γ) Αν G είναι αρχική της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

δ) Ισχύει ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)\,dx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

ε) Είναι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)\,dx = \dots\dots\dots$$

όπου:

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

11.82 Ένας μαθητής στην προσπάθειά του να υπολογίσει το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

έθεσε $x = \frac{1}{u}$ και έγραψε:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\frac{1}{u^2}+1}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du =$$

$$= -\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+u^2}\,du = -I$$

Άρα:

$$I = -I \iff 2I = 0 \iff I = 0$$

Παρατήρησε όμως ότι:

$$\frac{1}{x^2+1} > 0 \text{ για κάθε } x \in [-1, 1]$$

οπότε:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx > 0$$

και κατέληξε σε αντίφαση.

α) Σε ποια από τις δύο σκέψεις έχει κάνει λάθος;

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I.

Θέματα για τις εξετάσεις

Τα επόμενα θέματα μπορούν να αξιοποιηθούν για τη γενική επανάληψη της ενότητας ή για την προετοιμασία του σχετικού επαναληπτικού διαγωνίσματος.

Θ11.1 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1},\ x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)\,dx$$

Θ11.2 Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x - \eta\mu x$$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}(x) = x$$

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{\pi} f^{-1}(x)\,dx = \int_0^{\pi} f(x)\,dx + 4$$

Θ11.3 Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει:

$$f'(x) = f'(\alpha + \beta - x)$$

να αποδείξετε ότι:

α) $f(\alpha) + f(\beta) = c$

β) $\dfrac{1}{\beta - \alpha}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \dfrac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$

γ) $\dfrac{1}{(\beta - \alpha)^3}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(\beta - x) f(x)\,dx =$

$= \dfrac{f(\alpha) + f(\beta)}{12}$

Θ11.4 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x + \ln x, \ \ x > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}(x) = x$$

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^{e} f(x)\,dx + \int_1^{e+1} f^{-1}(x)\,dx = e^2 + e - 1$$

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f^{-1}(x) > x$$