

# Προτεινόμενες ασκήσεις

## 1. Εμβαδόν χωρίου μεταξύ $C_f$ , $x'x$ , $x = \alpha$ , $x = \beta$

**12.15** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  και τον άξονα  $x'x$ .

- α)  $f(x) = -x^2 + 4$       β)  $f(x) = x^2 - 16$   
γ)  $f(x) = x^2 - 3x + 2$     δ)  $f(x) = -x^2 + 5x - 6$   
ε)  $f(x) = x^3 - 4x$   
στ)  $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

**12.16** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = \alpha$  και  $x = \beta$  στις επόμενες περιπτώσεις:

- α)  $f(x) = e^x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$   
β)  $f(x) = \ln x$ ,  $x = 1$ ,  $x = e$   
γ)  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x = -1$ ,  $x = 0$   
δ)  $f(x) = \ln \frac{1}{x}$ ,  $x = 1$ ,  $x = e$   
ε)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$   
στ)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$

ζ)  $f(x) = x^3$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$

η)  $f(x) = -x^3$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$

**12.17** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = \alpha$  και  $x = \beta$  στις παρακάτω περιπτώσεις:

α)  $f(x) = x^3 - 1$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$

β)  $f(x) = x^3 - x$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$

**12.18** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 3x^2 - 3$ . Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που σχηματίζεται:

- α) από τη  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$ , τον άξονα  $y'y$  και την ευθεία  $x = 2$ ,  
β) από τη  $C_f$  και τον άξονα  $x'x$ ,  
γ) από τη  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = 3$ .

**12.19** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + a, & \text{αν } x < 0 \\ -2x + 2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

α) Να βρείτε την τιμή του  $a \in \mathbb{R}$ , ώστε η  $f$  να είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τις ευθείες  $x = -1$ ,  $x = 2$  και τον άξονα  $x'x$ .

**12.20** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^{2(x-1)} - (e^2 + 1)e^{x-2} + 1$$

α) Να βρείτε το πρόσημο της  $f$ .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  μεταξύ της  $C_f$  και του άξονα  $x'x$ .

**12.21** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2(\pi x), & \text{αν } x \leq 1 \\ 1 + \frac{\ln x}{x}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες με εξισώσεις  $x = 0$  και  $x = e$ .

## 2. Εμβαδόν χωρίου μεταξύ $C_f$ , $C_g$ , $x = a$ , $x = \beta$

**12.22** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = 4 - x^2 \text{ και } g(x) = x^2 + 2x$$

**12.23** Δίνονται οι συναρτήσεις:

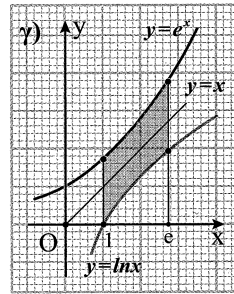
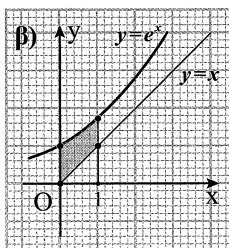
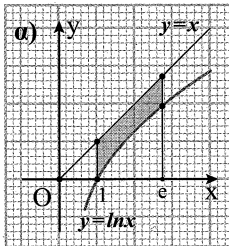
$$f(x) = x^2 + x \text{ και } g(x) = 3 - x$$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που σχηματίζεται:

α) από τις  $C_f$  και  $C_g$ ,

β) από τις  $C_f$ ,  $C_g$  και τις ευθείες με εξισώσεις:  $x = 0$  και  $x = 2$

**12.24** Να υπολογίσετε τα εμβαδά των σκιασμένων χωρίων στις επόμενες περιπτώσεις:



**12.25** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 3 \text{ και } g(x) = 3x^2 - 2x + 3$$

και τις ευθείες με εξισώσεις  $x = -1$  και  $x = 1$ .

**12.26** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  όταν:

α)  $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 1$  και  $g(x) = 3x^2 - x + 1$

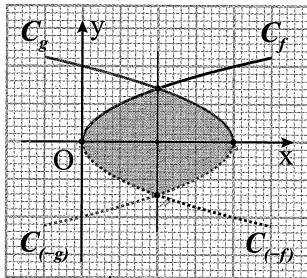
β)  $f(x) = e^{2x-1} - e^x + 2$ , και  $g(x) = 1 + e^{x-1}$

γ)  $f(x) = \eta \mu x$  και  $g(x) = \frac{2}{\pi} x$

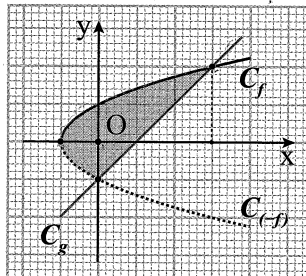
δ)  $f(x) = x e^x + 1$  και  $g(x) = x + e^x$

**12.27** Να υπολογίσετε τα εμβαδά των σκιασμένων χωρίων στις επόμενες περιπτώσεις:

α)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \sqrt{4-x}$



β)  $f(x) = \sqrt{x+1}$ ,  $g(x) = x-1$



### 3. Εμβαδόν σύνθετου χωρίου

**12.28** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x$ .

α) Να βρείτε την εφαπτομένη  $\epsilon$  της  $C_f$  που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

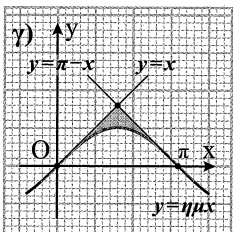
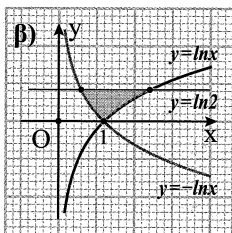
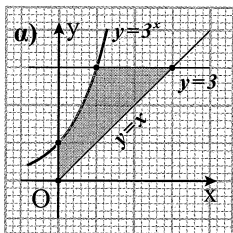
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$ , την εφαπτομένη  $\epsilon$  και τον άξονα  $y'y$ .

**12.29** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x$ .

α) Να βρείτε την εφαπτομένη  $\epsilon$  της  $C_f$  που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$ , την εφαπτομένη  $\epsilon$  και τον άξονα  $x'x$ .

**12.30** Να υπολογίσετε τα εμβαδά των σκιασμένων χωρίων στα παρακάτω σχήματα:



**12.31** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3$ .

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο:  $A(1, 1)$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$  και την εφαπτομένη.

**12.32** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 3x^2$ .

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $\epsilon: y = 6x - 3$  εφαπτεται στη  $C_f$ .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την εφαπτομένη  $\epsilon$  και τον άξονα  $x'x$ .

**12.33** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$ .

α) Να βρείτε την εφαπτομένη  $\epsilon$  της  $C_f$  στο σημείο:  $A(4, f(4))$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$ , τον άξονα  $y'y$  και την ευθεία  $\epsilon$ .

**12.34** Δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $x^2 = 4y$ .

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  της παραβολής, που άγονται από το σημείο:  $K(-2, -3)$

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της παραβολής και των  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$ .

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή και τις  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$ .

**12.35** Από το σημείο  $A(1, -8)$  φέρνουμε τις εφαπτομένες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  προς την παραβολή με εξίσωση  $y = x^2 - 2x - 3$ . Να βρείτε:

- α) τις εξισώσεις των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ ,  
 β) το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από την παραβολή και τις  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ ,  
 γ) τον λόγο του εμβαδού του χωρίου  $\Omega$  και αυτού που περικλείεται από την παραβολή και τον άξονα  $x'x$ .

$$f(x) = 4 - x^2 \quad \text{και} \\ g(x) = -x^2 + 8x - 20$$

Να βρείτε:

- α) την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης  $\varepsilon$  των  $C_f$  και  $C_g$ ,  
 β) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις  $C_f$ ,  $C_g$  και την  $\varepsilon$ .

**12.36** Δίνονται οι συναρτήσεις:

#### 4. Εμβαδόν μεταβλητού χωρίου - όρια

**12.37** Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{e}{x} \quad \text{και} \quad g(x) = \ln x$$

- α) Να αποδείξετε ότι οι  $C_f$ ,  $C_g$  έχουν μοναδικό κοινό σημείο.  
 β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E(\lambda)$  του χωρίου που περικλείεται από τις  $C_f$ ,  $C_g$  και την ευθεία:

$$x = \lambda, \quad \lambda > 0$$

- γ) Να υπολογίσετε το όριο  $A = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$ .

**12.38** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2}$ .

- α) Να βρείτε το εμβαδόν  $E(\lambda)$  του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες με εξισώσεις:

$$x = 1 \quad \text{και} \quad x = \lambda, \quad 0 < \lambda \neq 1$$

- β) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$ , ώστε  $E(\lambda) = 3$ .

- γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} E(\lambda) \quad \text{και} \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$$

**12.39** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ .

- α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E(\lambda)$  του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$ , την ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$  και τις ευθείες:

$$x = 0 \quad \text{και} \quad x = \lambda, \quad -1 < \lambda \neq 0$$

- γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$i) A = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) \quad ii) B = \lim_{\lambda \rightarrow -1} E(\lambda)$$

**12.40** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  από τις οποίες η  $f$  είναι άρτια και η  $g$  περιττή. Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f(x) + g(x) = e^x$ , να υπολογίσετε:

- α) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις  $C_f$ ,  $C_g$  και τις ευθείες με εξισώσεις:

$$x = 0 \quad \text{και} \quad x = \lambda, \quad \text{όπου} \quad \lambda > 0$$

- β) το  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$ .

**12.41** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta \mu x \cdot \ln(\sin x), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Να βρείτε:

- α) το εμβαδόν  $E(a)$  του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες με εξισώσεις  $x = -a$  και  $x = a$ ,  $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,

- β) το  $\lim_{a \rightarrow \frac{\pi}{2}} E(a)$ .

**12.42** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2$  και οι ευθείες  $y = 1$  και  $y = a^2$  με  $0 < a < 1$ . Η ευθεία  $y = a^2$  χωρίζει το χωρίο που δημιουργείται από τη συνάρτηση  $f$  και την ευθεία  $y = 1$  σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Να αποδείξετε ότι  $a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ .

**12.43** Δίνονται τα σημεία:

$$M(a, a^3) \quad \text{και} \quad N(a, 0), \quad a > 0$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^3$  χωρίζει την επιφάνεια του τριγώνου OMN σε δύο ισοδύναμα μέρη, όπου O η αρχή των αξόνων του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων.

**12.44** Έστω E το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , τις ευθείες  $x = 1$ ,  $x = 3$  και τον άξονα  $x'x$ . Να προσδιορίσετε την ευθεία  $x = a$  που χωρίζει το E σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

**12.45** Το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 5x^4 + 1$$

και την ευθεία με εξίσωση  $y = 6$  χωρίζεται από την ευθεία με εξίσωση  $y = 5a^4 + 1$ ,  $a > 0$ , σε δύο ισοδύναμα χωρία. Να υπολογίσετε το  $a$ .

## 5. Εμβαδόν και αντίστροφη συνάρτηση

**12.46** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x + x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

β) Να εξετάσετε αν η  $f$  αντιστρέφεται και αν ναι, να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}$ .

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_{f^{-1}}$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = e + 1$ .

**12.47** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = xe^{x^2}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_{f^{-1}}$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες με εξισώσεις  $x = 0$  και  $x = e$ .

**12.48** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^5 + x^3 + x$ .

α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει αντίστροφη συνάρτηση.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$f(e^x) \geq f(1+x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $O(0, 0)$  είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της  $f$  και της  $f^{-1}$ .

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$ , τον άξονα των  $x$  και την ευθεία με εξίσωση  $x = 3$ .

(Θέμα εξέτασεων)

## 6. Συνδυαστικά θέματα

**12.49** Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^x(x^2 + 2) \text{ και}$$

$$g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$$

α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

β) Να βρείτε το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$ ,  $g$ , την ευθεία  $x = 1$  και τον άξονα  $x'x$ .

**12.50** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) \leq 0 \text{ για κάθε } x \in [-1, 1]$$

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τις ευθείες  $x = -1$ ,  $x = 1$  και τον άξονα  $x'x$ .

**12.51** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{x^2 + 2x}$$

α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$  και τον άξονα  $x'x$ .

**12.52** Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$  μια συνεχής συνάρτηση και  $F$  μια αρχική της  $f$ . Η  $C_f$  διέρχεται από το σημείο  $A(1, 2)$  και:

$$\int_{F(3)}^{4+F(2)} f(x) dx = 0$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 2$ ,  $x = 3$ .

**12.53** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\sin x + \eta \mu x + 1}{1 + \eta \mu x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$ .

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία με εξίσωση  $x = a$ , όπου  $a$  είναι θέση σημείου καμπής της  $C_f$ .

### 12.54 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + x \text{ και } g(x) = (x + 1)\ln(x + 1)$$

- α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq g(x)$  για κάθε  $x > -1$ .  
β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις  $C_f$ ,  $C_g$  και την ευθεία με εξίσωση  $x = 1$ .

### 12.55 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με:

$$f''(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0 = 0$  με τιμή μηδέν και  $f(1) + f(-1) = 3$ , να βρείτε το

εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f'$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες με εξισώσεις  $x = -1$  και  $x = 1$ .

### 12.56 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f$ για την οποία ισχύει $f(0) = 1$ και:

$$f'(x) = (x + 2)e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = xe^x + e^x, x \in \mathbb{R}$$

- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$ , τους άξονες  $x'x$ ,  $y'y$  και την ευθεία  $x = 1$ .

## 7. Συμπληρωματική ομάδα

### 12.57 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + x - 2 \text{ και}$$

$$g(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από:

- α) τη  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες με εξισώσεις  $x = 0$  και  $x = 2$ ,  
β) τη  $C_g$  και τον άξονα  $x'x$ .

### 12.58 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^3 + x - 2 \text{ και } g(x) = 2x^2 - 2$$

Να υπολογίσετε:

- α) το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  μεταξύ της  $C_f$ , του άξονα  $x'x$  και του άξονα  $y'y$ ,  
β) το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  μεταξύ της  $C_g$  και του άξονα  $x'x$ ,  
γ) το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  μεταξύ των  $C_f$  και  $C_g$ .

### 12.59 Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται ανάμεσα στη $C_f$ και τον άξονα $x'x$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- α)  $f(x) = \eta\mu x, x \in [0, 2\pi]$   
β)  $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x$   
γ)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$   
δ)  $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$   
ε)  $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{5}{4}x^2 + 4$

### 12.60 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ , ο άξονας $x'x$ και οι ευθείες με εξισώσεις $x = \alpha$ και $x = \beta$ όταν:

- α)  $f(x) = x^3 - x, \alpha = -2$  και  $\beta = 2$   
β)  $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2, \alpha = -1$  και  $\beta = 2$   
γ)  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+3}, \alpha = 0$  και  $\beta = 2$   
δ)  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \alpha = e$

### 12.61 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \alpha$ και $x = \beta$ όταν:

- α)  $f(x) = \frac{\ln^3 x}{x}, \alpha = 1$  και  $\beta = e$   
β)  $f(x) = 2 \cdot \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} \cdot \eta\mu x, \alpha = 0$  και  $\beta = \frac{\pi}{2}$   
γ)  $f(x) = e^{-x} \sin x, \alpha = 0$  και  $\beta = \pi$   
δ)  $f(x) = \frac{\sin x}{\eta\mu^2 x + 3\eta\mu x + 2}, \alpha = 0$  και  $\beta = \pi$   
ε)  $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}, \alpha = 0$  και  $\beta = 1$

### 12.62 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3, g(x) = -x^3$ και την ευθεία με εξίσωση $7x + 3y - 10 = 0$ .

**12.63** Έστω  $f$  μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & \text{αν } x \leq 3 \\ \frac{1 - e^{x-3}}{x-3}, & \text{αν } x > 3 \end{cases}$$

α) Αν η  $f$  είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι:

$$a = -\frac{1}{9}$$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(4, f(4))$ :

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες:

$$x = 1 \text{ και } x = 2$$

(Θέμα εξετάσεων)

**12.64** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{e^x}, & \text{αν } x < 1 \\ \frac{\ln^2 x}{x}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες με εξισώσεις  $x = 0$  και  $x = e$ .

**12.65** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{2-x}}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

β) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της  $C_f$ , του άξονα  $x'x$  και της ευθείας  $x = 1$ .

**12.66** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x-1}, \quad x \geq 1$$

α) Να βρείτε την εφαπτομένη  $\varepsilon$  της  $C_f$  στο σημείο:

$$A(5, f(5))$$

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της  $f$  και της ευθείας  $\varepsilon$ .

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$ , την  $\varepsilon$  και τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

**12.67** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με:

$$f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$$

όπου  $m \in \mathbb{R}$  και  $m > 0$ .

α) Να βρείτε τον  $m$ , ώστε:

$$f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

β) Αν  $m = 10$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες:

$$x = 0 \text{ και } x = 1$$

(Θέμα εξετάσεων)

**12.68** Έστω  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(2) = 1$  και:

$$f'(x) = \frac{x+3}{x^2-1} f(x) \text{ για κάθε } x > 1$$

α) Να αποδείξετε ότι:

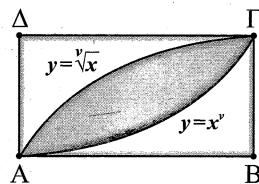
$$f(x) = \frac{3(x-1)^2}{x+1}$$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες:

$$x = 2 \text{ και } x = 3$$

**12.69** Μια εταιρεία

κατασκευάζει πλακάκια δαπέδου, σχήματος ορθογωνίου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε την τιμή



του  $v \in \mathbb{N}^*$  για την οποία η λευκή επιφάνεια του πλακιδίου είναι ισοδύναμη με την γκριζα.

**12.70** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = \ln^2 x$ .

**12.71** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις παραβολές με εξισώσεις  $y^2 = ax$  και  $x^2 = ay$ ,  $a > 0$ , είναι ίσο με  $\frac{a^2}{3}$  τετραγωνικές μονάδες.

**12.72** Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται ανάμεσα στις καμπύλες με εξισώσεις:

α)  $y^2 = 4x$ ,  $x^2 = 4y$

β)  $y^2 = 4x$ ,  $y^2 = \frac{16}{7}(x+3)$

**12.73** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = -x^2 + x + 2$$

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$  και τον άξονα  $x'x$ .

β) Να βρείτε το διάστημα  $[a, \beta]$  στο οποίο το ολοκλήρωμα  $\int_a^\beta f(x) dx$  παίρνει μέγιστη τιμή.

**12.74** Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση  $x^2 + y^2 = 8$  και η παραβολή με εξίσωση  $y = -\frac{1}{2}x^2$ .

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία του κύκλου και της παραβολής.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση των δύο κοινών τομών.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις του κύκλου και της παραβολής.

**12.75** Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση  $x^2 + y^2 = 8$  και η παραβολή με εξίσωση  $y^2 = 2x$ . Να βρείτε:

α) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και την παραβολή,

β) το εμβαδόν του τμήματος του κυκλικού δίσκου που δεν περιέχεται στην παραβολή,

γ) τον λόγο των δύο παραπάνω εμβαδών.

## Θέματα για τις εξετάσεις

Τα επόμενα θέματα μπορούν να αξιοποιηθούν για τη γενική επανάληψη της ενότητας ή για την προετοιμασία του σχετικού επαναληπτικού διαγωνίσματος.

**Θ12.1** Δίνεται συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα:

$$f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x \leq f(x) - 1 \text{ για κάθε } x > 0$$

α) Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$ , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και την παραπάνω εφαπτομένη.

**Θ12.2** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:

$$f(x) = e^{\lambda x}, \lambda > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$ , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η  $y = \lambda e x$ . Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής  $M$ .

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν  $E(\lambda)$  του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της  $f$ , της εφαπτομένης της στο ση-

μείο  $M$  και του άξονα  $y'y$ , είναι:

$$E(\lambda) = \frac{e - 2}{2\lambda}$$

δ) Να υπολογίσετε το:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2 + \eta \mu \lambda}$$

(Εξετάσεις 2005)

**Θ12.3** Έστω  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις με:

$$f(0) = g(0), f'(0) = 1 + g'(0)$$

και

$$(f'(x) - g'(x))(f''(x) - g''(x)) = -e^{-2x}$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) - g'(x) = e^{-x}, x \in \mathbb{R}$$

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις  $C_f$ ,  $C_g$  και τις ευθείες με εξισώσεις  $x = 0$  και  $x = 1$ .

**Θ12.4** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$$



όπου  $\theta \in \mathbb{R}$  μια σταθερά με:

$$\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

**α)** Να αποδείξετε ότι η  $f$  παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμψής.

**β)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

**γ)** Αν  $x_1, x_2$  είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και  $x_3$  η θέση του σημείου καμψής της  $f$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία:

$$A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)) \text{ και } \Gamma(x_3, f(x_3))$$

βρίσκονται στην ευθεία  $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ .

**δ)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και την ευθεία  $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ .

(Εξετάσεις 2007)

**Θ12.5** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $\Delta = (-1, +\infty)$  για την οποία ισχύει:

$$f(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x+1}F(x), \quad x \in \Delta$$

όπου  $F$  είναι αρχική της  $f$  με  $F(1) = 0$ .

**α)** Να υπολογίσετε το  $f(1)$ .

**β)** Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = 3x - 1$ .

**γ)** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$ .

**δ)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 2$  και  $x = 4$ .

(Θέμα εξετάσεων)

**Θ12.6 α)** Έστω δύο συναρτήσεις  $h, g$  συνεχείς στο διάστημα  $[a, \beta]$ . Να αποδείξετε ότι αν:

$$h(x) > g(x) \text{ για κάθε } x \in [a, \beta]$$

τότε και:

$$\int_a^\beta h(x) dx > \int_a^\beta g(x) dx$$

**β)** Δίνεται η παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση  $f$ , που ικανοποιεί τις σχέσεις  $f(0) = 0$  και:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

**i)** Να εκφράσετε την  $f'$  ως συνάρτηση της  $f$ .

**ii)** Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) \text{ για κάθε } x > 0$$

**iii)** Αν  $E$  είναι το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τις ευθείες  $x = 0, x = 1$  και τον άξονα  $x'x$ , να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2}f(1)$$

(Θέμα εξετάσεων)

**Θ12.7** Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^x \text{ και } g(x) = e^{-x}$$

**α)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E(t)$  του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των  $f, g$  και την ευθεία  $x = t, t > 0$ .

**β)** Να υπολογίσετε το όριο:

$$A = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E(t)}{t + e^t}$$

**γ)** Να βρείτε την τιμή του  $t > 0$ , ώστε:

$$E(t) + 2 = e^2 + e^{-2}$$

**δ)** Η ευθεία  $y = 1$  χωρίζει το εμβαδόν  $E(t)$  σε δύο χωρία  $\Omega_1, \Omega_2$ .

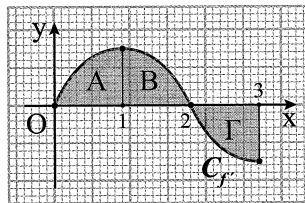
**i)** Να βρείτε τα  $E(\Omega_1), E(\Omega_2)$ .

**ii)** Να αποδείξετε ότι το ένα μόνο από αυτά τα εμβαδά τείνει να γίνει ίσο με το εμβαδόν του  $\Omega$  καθώς  $t \rightarrow +\infty$ .

**Θ12.8** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$$

με  $f(0) = 0$ . Στο επόμενο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της  $f'$ .



Τα χωρία  $A, B$  και  $\Gamma$  έχουν εμβαδόν ίσο με τη μονάδα.

**α)** Να βρείτε τις τιμές  $f(1), f(2), f(3)$ .

**β)** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα τοπικά ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**γ)** Να κάνετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

**δ)** Αν η  $C_f$  είναι συμμετρική ως προς το σημείο  $M(1, 1)$  για κάθε  $x \in [0, 2]$ , τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες:

$$x = 0 \quad \text{και} \quad x = 2$$

**Θ12.9** Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

♦  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$

♦  $f'(0) < f(1) - f(0)$  και

♦  $f''(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**α)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = 0$ .

**β)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ .

**γ)** Έστω ότι  $g(x) = f(x) - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**ι)** Να αποδείξετε ότι η  $g$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{xg(x)}$$

**ii)** Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^2 f(x) dx > 2$$

**iii)** Αν το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες με εξισώσεις  $x = 0$  και  $x = 1$  είναι:

$$E(\Omega) = e - \frac{5}{2}$$

τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 f(x) dx$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (1, 2)$  τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^{\xi} f(t) dt = 2$$

*(Εξετάσεις 2011)*

**Θ12.10** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

**α)** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής.

**β)** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$  και τον άξονα  $x'x$ .

**γ)** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$x = e^{\frac{\lambda}{x}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$