Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Πεδίο ορισμού - Παραγώγιση

13.11 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \int_1^x \ln(t^2+1)\,dt$

β) $f(x) = \int_2^x \frac{3}{t}\,dt$

γ) $f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{t^2-t}\,dt$

δ) $f(x) = \int_0^{x-1} \frac{dt}{t-2}$

13.12 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \int_2^{\sqrt{4-x}} \frac{t}{\ln t}\,dt$

β) $f(x) = \int_{x^2}^{x+3} \frac{\ln(t^2+1)}{t-4}\,dt$

γ) $f(x) = \int_{5-x}^{\ln x} \sqrt{t-1}\,dt$

δ) $f(x) = \int_{x^2-1}^{2x-4} \sqrt{t^2-4}\,dt$

13.13 Να υπολογίσετε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $g(x) = \int_1^x e^{t^2}\,dt$

β) $g(x) = \int_2^{x^2} \eta\mu t^2\,dt$

γ) $g(x) = \int_{e^{-x}}^{e^x} \ln^2 t\,dt$

δ) $g(x) = \int_{\sigma\upsilon\nu x}^{\eta\mu x} e^{\sqrt{1-t^2}}\,dt, \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

13.14 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f'(x) = 2xf(x),\ x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x^2},\ x \in \mathbb{R}$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x e^{t^2} dt}{x}$,

ii) $B = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2\int_1^x e^{t^2} dt}{x^2 - 1}$

iii) $\Gamma = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^{\frac{1}{x}} e^{t^2} dt$

iv) $\Delta = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^{\frac{1}{x}} x e^{t^2} dt$

13.15 Έστω $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

$$2f'(x) = e^{x - f(x)},\ x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln\left(\dfrac{1 + e^x}{2}\right)$.

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(x - t)\, dt}{\eta\mu x}$$

13.16 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(1) = 1$$

καθώς και η συνάρτηση:

$$g(x) = \int_1^x \frac{f(x - t + 1)}{x - t + 1} dt,\ x > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι $g(x) = \int_1^x \dfrac{f(y)}{y} dy$.

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$A = \lim_{x \to 1} \int_1^x \frac{f(x - t + 1)}{(x - 1)(x - t + 1)} dt$$

13.17 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt,\ x > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι $e^x \ln 2 \leq f(x) \leq e^{2x} \ln 2$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

13.18 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{2x} \dfrac{dt}{t^2 + 1}$

β) $B = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} \dfrac{dt}{\sqrt{t^4 + 1}}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x \to 0^+} \int_x^{3x} \dfrac{e^t}{t} dt$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x \to 1^-} \int_x^{x^2} \dfrac{e^t}{t - 1} dt$

13.19 Δίνεται η συνάρτηση:

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F.

β) Να αποδείξετε ότι $x\ln 2 \leq F(x) \leq x^2 \ln 2,\ x > 1$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim\limits_{x \to 1^+} F(x)$.

13.20 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \quad \text{και} \quad G(x) = \int_x^{x^2} \frac{t}{\ln t} dt$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των F, G.

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x) = \ln 2$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim\limits_{x \to 1^+} G(x)$.

13.21 Δίνεται η συνάρτηση:

$$F(x) = \int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}} \frac{x}{\ln t} dt,\ x > 1$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$-\frac{1}{\ln x} \leq \frac{1}{\ln t} \leq -\frac{1}{\ln 2x},\ x > 1$$

β) Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

13.22 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1},\ x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x \to 0} \int_0^x x f(t)\, dt$

β) $B = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^{e^{-x}} x f(t)\, dt$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{2x} f(t)\,dt$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x e^t f(t)\,dt$

13.23 Να υπολογίσετε το όριο:

$$A = \lim_{x \to 1^+} \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1}\,dt$$

13.24 Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{e^t - 1}{t}\,dt$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

13.25 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x \to 1} \int_{x^2}^{x^3} \frac{\ln t}{t-1}\,dt$

β) $B = \lim\limits_{x \to 0} \int_x^{2x} \frac{e^t - 1}{t}\,dt$

3. Εύρεση συνάρτησης

13.26 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $1 + \int_0^x f(t)\,dt = f(x),\ x \in \mathbb{R}$

β) $ημx + \int_0^x e^{x-t} f(t)\,dt = xe^x - f(x),\ x \in \mathbb{R}$

13.27 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$1 + f(x) = e^x + \int_x^{2x} f(t-x)\,dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^x + \int_0^x f(u)\,du - 1,\ x \in \mathbb{R}$$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^x,\ x \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

13.28 Έστω $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα:

$$f(x) = x\int_0^1 f(xt)\,dt + e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f.

4. Ανισότητες

13.29 Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_\alpha^\beta (x^4 + 1)\,dx > 0$ για κάθε $\alpha < \beta$

β) $\int_\alpha^\beta (x^6 + x^4 + 1)\,dx \geq 0$ για κάθε $\alpha \leq \beta$

13.30 Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_{2014}^{2004} (e^{x^2} + 1)\,dx < 0$

β) $\int_{2000}^{1000} (\ln^2 x + e^x)\,dx < 0$

γ) $\int_\alpha^\beta (e^{-x^2} + 2)\,dx \leq 0$ για κάθε $\alpha \geq \beta$

δ) $\int_\beta^\alpha \sqrt{x^2 + 1}\,dx \leq 0$ για κάθε $\beta \geq \alpha$

13.31 Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_2^5 (3x^2 - 4x + 3)\,dx < \int_2^5 (2x^2 + 3x - 7)\,dx$

β) $\int_2^3 \frac{x^2 + x}{x^2 - 6x + 5}\,dx < 0$

13.32 Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^1 \frac{ημx}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx < \sqrt{2} - 1$

β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xημx\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - συνx)\,dx$

γ) $48 < \int_0^8 \sqrt{x^2 + 36}\,dx < 80$

δ) $\int_0^2 \ln\left(\frac{1 + e^x}{2}\right)dx < 2\ln\left(\frac{1 + e^2}{2}\right)$

13.33 Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_1^{e^2} \ln x^2 dx > \int_1^{e^2} \ln^2 x\, dx$

β) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} x^{\ln x} dx \leq e^2 - 1$

13.34 Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{1}{e+1} \leq \int_0^1 \frac{x^2+1}{e^x+1} dx \leq 1$

β) $\frac{e-1}{e^2} \leq \int_1^e \frac{x+\ln^2 x}{x^2} dx \leq e^2 - 1$

13.35 Έστω $f\colon [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}^*$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$\int_0^3 f^2(x)\, dx = 1$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^3 \frac{1}{f^2(x)} dx \geq 5$ **β)** $\int_0^3 f^2(x) e^x dx \geq 1$

13.36 Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^{\pi} \eta\mu x\, dx > \int_0^{\pi} x\sigma\upsilon\nu x\, dx$

β) $\int_0^2 (2e^x - 2)\, dx > \int_0^2 (x^2 + 2x)\, dx$

γ) $\int_1^e 2\ln x dx < \int_1^e (x^2 - 1)\, dx$

δ) $\int_0^{\pi} 2\sigma\upsilon\nu x\, dx > \int_0^{\pi} (2 - x^2)\, dx$

13.37 Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_{\alpha}^{\beta} (e^x - x^2)\, dx > \int_{\alpha}^{\beta} (2 - e^{-x})\, dx,\ \alpha < \beta$

β) $\int_{\alpha}^{\beta} (x^2\eta\mu x + 2x\sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x)\, dx > 0,$

$0 \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$

γ) $\int_{\alpha}^{\beta} x^x dx > \int_{\alpha}^{\beta} e^{x-1} dx,\ \alpha < \beta$

δ) $\int_{\alpha}^{\beta} (x^2+1)^{x^2+1} dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} e^{x^2} dx,\ \alpha < \beta$

13.38 Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι:

$$f(x)\int_0^x e^{\eta\mu t} dt > \int_0^x f(t) e^{\eta\mu t} dt,\ x > 0$$

13.39 Έστω f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

α) Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx$$

β) Αν m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε:

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \leq M(\beta - \alpha)$$

γ) Αν $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i) $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$,

ii) $\frac{2}{3} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1.$

13.40 Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\int_{x+2}^{x+4} f(t)\, dt > \int_{x^2}^{x^2+2} f(t)\, dt$

β) $\int_{5x}^{5x+2} f(t)\, dt \leq \int_{x^2+6}^{x^2+8} f(t)\, dt$

13.41 Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $[0, \alpha]$, $\alpha > 0$. Έστω ακόμη η συνάρτηση g, με:

$$g(x) = \int_0^x f(t)\, dt - xf\left(\frac{x}{2}\right) \text{ για κάθε } x \in [0, \alpha]$$

α) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\alpha} f(t)\, dt < \alpha f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

13.42 Δίνεται η παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) + f(\alpha + \beta - x) \geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

β) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \geq (\beta - \alpha) f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

13.43 **α)** Να αποδείξετε ότι:

$$t^2\int_1^2 e^{2x} dx - 2t\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx + \int_1^2 \frac{dx}{x^2} \geq 0$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx \leq \frac{e\sqrt{e^2-1}}{2}$$

13.44 Έστω $f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ μια θετική και συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι:

α) $t^2 \int_0^1 f(x)\,dx - 2t + \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \geq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$

β) $\int_0^1 f(x)\,dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx \geq 1$

13.45 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: [0, 1] \longrightarrow [0, +\infty)$$

με συνεχή παράγωγο τέτοια, ώστε:

$$f(x) \leq x \text{ για κάθε } x \in [0, 1]$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 \frac{f'(x)}{x+1}\,dx \leq \ln 2$$

13.46 Έστω η κυρτή συνάρτηση:

$$f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(x)\,dx \leq f(-1) + f'(1)$$

13.47 Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(\alpha-1)^2}{4} + \alpha - 1 > \sqrt{2}\int_1^\alpha \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx, \quad \alpha > 1$$

13.48 Έστω οι συναρτήσεις $f, h: [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα και $f(x) = \int_\alpha^x h(t)\,dt$. Να αποδείξετε ότι:

$$(x-\alpha)h(\alpha) \leq f(x) \leq (x-\alpha)h(\beta)$$

13.49 Έστω ότι η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και κυρτή.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$(\beta-\alpha)f(\alpha) < \int_\alpha^\beta f(t)\,dt < (\beta-\alpha)\cdot\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

β) Αν $f(x) \geq 0$, να σχεδιάσετε κατάλληλο σχήμα και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά την παραπάνω ανισότητα.

13.50 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$0 < f(x) < 1 \text{ για κάθε } x \in [0, 1]$$

Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$.

β) Ισχύει $\int_0^1 f(x)\,dx < 1$.

γ) Η ευθεία $y = 2x$ τέμνει τη γραφική παράσταση της $h(x) = \int_0^x f(t)\,dt + 1$ σε ένα και μόνο σημείο.

13.51 Έστω $f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και ισχύει:

$$f(x) > -1 \text{ για κάθε } x \in [0, 1]$$

Να αποδείξετε ότι:

α) Ισχύει $\int_0^1 f(x)\,dx > -1$.

β) Η συνάρτηση $g(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$, $\alpha \in [0, 1]$ είναι συνεχής.

γ) Υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^{x_0} f(t)\,dt + 2x_0 = 1 + \int_{x_0}^1 f(t)\,dt$$

δ) Το x_0 του ερωτήματος (γ) είναι μοναδικό.

13.52 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f: [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$\int_0^1 f(x)\,dx + 2016\int_1^2 f(x)\,dx = 0$$

Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $g(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$, $\alpha, x \in [0, 2]$ είναι παραγωγίσιμη.

β) Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 2)$ τέτοια, ώστε:

$$f(x_1) + f(x_2) = \int_0^2 f(x)\,dx$$

γ) Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σε ένα σημείο.

δ) Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο.

13.53 Έστω $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $g(x) = \int_x^{x+2} f(t)\,dt$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε:

$$g(x_0) = \frac{g(1) + g(3)}{2}$$

γ) Η εξίσωση:

$$\int_1^3 f(t)\,dt + \int_3^5 f(t)\,dt = 2\int_x^{x+2} f(t)\,dt$$

έχει μία τουλάχιστον λύση.

13.54 Έστω $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με:

$$\int_0^2 (t-2)f(t) = 0$$

F μια αρχική της f και G μια αρχική της συνάρτησης $g(x) = xf(x)$, με $F(0) = G(0) = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$H(x) = \begin{cases} \dfrac{G(x)}{x} - F(x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση H είναι συνεχής.

β) Η συνάρτηση H είναι παραγωγίσιμη με:

$$H'(x) = -\frac{G(x)}{x^2}, \ x \neq 0$$

γ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $G(\alpha) = 0$.

δ) Υπάρχει $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιο, ώστε:

$$\alpha \int_0^{\xi} t f(t)\,dt = \xi^2 \int_0^{\alpha} f(t)\,dt$$

Θέματα για τις εξετάσεις

Τα επόμενα θέματα μπορούν να αξιοποιηθούν για τη γενική επανάληψη της ενότητας ή για την προετοιμασία του σχετικού επαναληπτικού διαγωνίσματος.

Θ13.1 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sqrt{e^t + 1}\,dt$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) = \sqrt{e^{x+1} + 1} - \sqrt{e^x + 1}$$

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\int_{x+1}^{x+2} \sqrt{e^t + 1}\,dt > \int_{x^2-1}^{x^2} \sqrt{e^t + 1}\,dt$$

Θ13.2 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f'(x) = e^{2x} f(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$
- $g(x) = f(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f''(x) + f(x) = 2f'(x), \ x \in \mathbb{R}$$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^x, \ x \in \mathbb{R}$$

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^{\ln x} f(t)\,dt \leq \int_1^{x-1} f(t)\,dt \ \text{ για κάθε } x > 0$$

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\int_1^{e^x} f(t)\,dt > \int_1^{1-x} f(t)\,dt$$

ε) Να υπολογίσετε το όριο:

$$A = \lim_{x \to +\infty} \int_{3x}^{5x} f(t)\,dt$$

Θ13.3 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases} \quad \text{και}$$

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_1^x t\ln t\,dt, & \text{αν } x > 0 \\ \alpha, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

β) Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η F να είναι συνεχής.

γ) Να αποδείξετε ότι η F είναι μια αρχική της f.

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx$$

Θ13.4 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \int_0^{\ln x} \sqrt{1+t^2}\,dt$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται και να βρείτε την παράγωγό της.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

δ) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

ε) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\int_1^x \sqrt{1+t^2}\,dt > \int_1^{\ln(1-x)} \sqrt{1+t^2}\,dt$$

Θ13.5 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^{x-1} - \ln x,\ x > 0$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε τα ακρότατα της f.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)\,dt = \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t)\,dt + \int_2^4 f(t)\,dt$$

Θ13.6 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(x^2+1) - x$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα.

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\int_{x^2}^{x^2+1} f(t)\,dt > \int_{x+2}^{x+3} f(t)\,dt$$

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+1} f(t)\,dt > \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f(t)\,dt \quad \text{για κάθε } \alpha\in\mathbb{R}$$

Θ13.7 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}, & \text{αν } x < 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$.

β) Έστω:

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt,\ x \le 0$$

i) Να βρείτε τη συνάρτηση F, όταν $x < 0$.

ii) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^-} F(x)$ καθώς και τον τύπο της F στο $(-\infty, 0]$.

iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$$

Θ13.8 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)\big(f(x) - x\big) = f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(0) = 3$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+9},\ x\in\mathbb{R}$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\alpha = \int_x^{x+1} f(t)\,dt \quad \text{και} \quad \beta = \int_{x+1}^{x+2} f(t)\,dt,\ x\in\mathbb{R}$$

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\int_{x^2}^{x^2+2} f(t)\,dt > \int_{x^4}^{x^4+2} f(t)\,dt$$

Θ13.9 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x\ln(x+1) - (x+1)\ln x,\ x > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\alpha > 0$, ώστε:

$$(\alpha+1)^{\alpha} = \alpha^{\alpha+1}$$

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^2 f(t)\,dt > \int_2^3 f(t)\,dt$$

ε) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\int_{x^2+x+1}^{x^2+x+3} f(t)\,dt < \int_{x^4+x^2+1}^{x^4+x^2+3} f(t)\,dt$$

Θ13.10 Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

με $f(0) = 1$ έχει την ιδιότητα:

$$f'(x) + 2x = 2x\big(f(x) + x^2\big),\ \ x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^{x^2} - x^2,\ \ x \in \mathbb{R}$$

β) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)\,dt + \int_6^4 f(t)\,dt < 0$$

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Θ13.11 Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

με $f(0) = 1$ έχει την ιδιότητα:

$$\big(f'(x) - 1\big)\big(f(x) - x\big) = x \ \text{ για κάθε } \ x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\int_{x^2}^{x^2+2} f(t)\,dt > \int_{x^4}^{x^4+2} f(t)\,dt$$

ε) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+1} f(t)\,dt < \int_{\alpha+2}^{\alpha+3} f(t)\,dt,\ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

στ) Αν $0 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{f(\alpha) - 1}{\alpha} < \frac{f(\beta) - 1}{\beta}$$

Θ13.12 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x, & \text{αν } \ x > 0 \\ 0, & \text{αν } \ x = 0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

δ) Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x) \ \text{ για κάθε } \ x > 0$$

ε) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

E2.1 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f^3(x) + 2f(x) = x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

γ) Να ορίσετε την αντίστροφη της f.

E2.2 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x-y) = f(x) - f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$f(\nu x) = \nu f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } \nu \in \mathbb{N}^*$$

ε) Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μόνο μία λύση, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

στ) Αν η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

ζ) Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

η) Αν ισχύει ότι $f(1) = 1$ και $x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

E2.3 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f^3(x) + f(x) = 2x + 6 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι "$1-1$".

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε την f^{-1}.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\big(f(x-1) - 2\big) = f(x)$$

E2.4 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$e^{f(x)} + f(x) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να εξετάσετε αν η f είναι αντιστρέψιμη.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών και την f^{-1}.

ε) Να αποδείξετε ότι $0 < f(2) < 1$.

E2.5 Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) = x^3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $A = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^3}$ **ii)** $B = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

E2.6 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f^3(x) + f(x) = 2e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε την τιμή της f στο $x_0 = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της f.

δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $\ln f(x) < 0$.

στ) Να βρείτε το όριο $A = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

E2.7 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(1) = 2 \text{ και}$$

$$|xf(y) - yf(x)| \leq 2 \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0) = 0$

β) $f(x) = 2x, \ x \in \mathbb{R}$

E2.8 Έστω συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

Να αποδείξετε ότι:

α) αν $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, τότε $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = 0$,

β) αν $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, τότε $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} = 1$.

Β. Θέματα από τη συνέχεια και τα θεωρήματα

E2.9 Για μια συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - x^2 + h^2}{h^2 x + h} = 2x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

α) τον τύπο της f,

β) το όριο:

$$A = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x\eta\mu\frac{1}{x}}{x^2 + x + 1} f(x) \right)$$

γ) το όριο:

$$B = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + 3}{f(x) + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 2}$$

E2.10 Δίνονται οι συνεχείς, γνησίως μονότονες και θετικές συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(1)f(2) = g(1)g(2)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει $\alpha \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f^2(\alpha) = g(1)g(2)$$

β) υπάρχουν $\beta, \gamma \in (1, 2)$ τέτοια, ώστε:

$$f(\beta) = g(\gamma)$$

γ) η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[1, 2]$.

E2.11 Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f^2(x) - 2f(x)\eta\mu x = \eta\mu^4 x + \eta\mu^2 x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{και } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$$

α) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, το οποίο και να βρείτε.

β) Να βρείτε το $f(0)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$h(x) = f(x) - \eta\mu x, \ x \in \mathbb{R}$$

διατηρεί σταθερό πρόσημο.

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \eta\mu^2 x + \eta\mu x + 1, \ x \in \mathbb{R}$$

ε) Να υπολογίσετε το όριο:

$$A = \lim_{x \to +\infty} \frac{xf(x)}{x^2 + 1}$$

E2.12 Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$f(g(x)) = x^3 + x + 1 + g(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση $x^3 + x + 1 = 0$ έχει μοναδική λύση,

β) η συνάρτηση g αντιστρέφεται,

γ) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = x_0$$

E2.13 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$|f(x) - f(y)| \geq \frac{1}{\theta}|x - y|$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $\theta \in (0, 1)$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f αντιστρέφεται,

β) $|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leq \theta |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

γ) η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,

δ) η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Ε2.14 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(x+1)f(x) = 2x^2 + x + \alpha \text{ για κάθε } x \neq -1$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -\eta\mu x^2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$.

δ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$A = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^\nu}$$

όπου ν φυσικός αριθμός με $\nu \geq 1$.

Γ. Θέματα από τη μελέτη συνάρτησης

Ε2.15 Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f(f'(x)) \geq (x-1)^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ και η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(0) \neq 0$,

β) η εφαπτομένη της $C_{f'}$ στο $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Ε2.16 Έστω $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) - f(\alpha) \geq f'(\beta)(x - \alpha)$$

για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Ε2.17 Αν η γραφική παράσταση της:

$$f(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + x + 1$$

έχει σημεία καμπής, να αποδείξετε ότι $3\alpha^2 > 8\beta$.

Ε2.18 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)},\ x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι "1 − 1".

β) Αν το $A(x_0, y_0)$ είναι σημείο καμπής της C_f, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο με τετμημένη x_0 σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45°.

Ε2.19 Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και:

$$f'(x) > 2x - \sigma\upsilon\nu x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) > x^2 - \eta\mu x \text{ για κάθε } x > 0$$

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + \eta\mu x = x^2$$

Ε2.20 Έστω $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

$$f(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

β) Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Ε2.21 Έστω f μια συνάρτηση, δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, +\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f(0) = f'(0) = 1$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$
- $f''(x)f(x) < (f'(x))^2$ για κάθε $x > 0$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση:

$$h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $[0, +\infty)$.

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) < e^x \text{ για κάθε } x > 0$$

Ε2.22 Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) \geq \frac{2x + f(1) - 1}{2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1) = 1$,

β) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0) = 0$.

Ε2.23 Για μια συνάρτηση f γνωρίζουμε ότι:

$$f^{(3)}(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta]$$
$$f''(\gamma) = 0, \ f'(\alpha) = f'(\delta) = 0$$
$$\text{και } f(\alpha) = f(\beta) = 0$$

όπου $\alpha < \gamma < \delta < \beta$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα.

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta)$$

Ε2.24 Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ έχει την ιδιότητα:

$$f'(x)\left(1 + |x|\right) = 1 + |f(x)| \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

α) τη μονοτονία της f, **β)** τον τύπο της f.

Ε2.25 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1 + e^x}{1 + e^{x+1}}, \ x \in \mathbb{R}$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

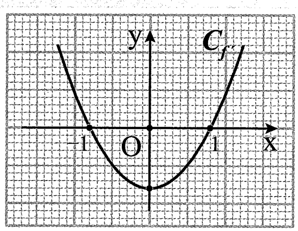
β) Για κάθε $x < 0$ να αποδείξετε ότι:

$$f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$$

γ) Να βρείτε μια συνάρτηση $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με:

$$g'(x) = \frac{1}{f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Ε2.26 Να σχεδιάσετε προσεγγιστικά μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ για την οποία η γραφική παράσταση της παραγώγου της έχει τη μορφή του σχήματος.



Ε2.27 Να συγκρίνετε τους αριθμούς α και β στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\alpha = e^{\pi}, \ \beta = \pi^{e}$

β) $\alpha = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}, \ \beta = \left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$

Ε2.28 Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{e^{\beta} - e^{\alpha}}{\beta - \alpha} < \frac{e^{\alpha} + e^{\beta}}{2}$$

Ε2.29 Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α και β με $\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\ln\alpha^{\alpha} + e^{\beta - 1} \geq \alpha\beta$$

Ε2.30 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x^3(f(x) - x^2) = f(x)\eta\mu^3 x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x - \eta\mu x}, \ B = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2 + x\eta\mu x + \eta\mu^2 x}$$

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

Ε2.31 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 2$ και:

$$f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = 2x, \ x \in \mathbb{R}$$

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$A = \lim_{x \to 1} \frac{e^{f(x)} - e^{2x}}{f(x) - 2x}$$

Ε2.32 Να βρείτε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{y \to 0} (\sigma\upsilon\nu^2 y)^{\frac{1}{y^2}}$

β) $B = \lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2 \sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{x}}$

Ε2.33 Έστω $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x \neq y$ υπάρχει μοναδικό $\gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\gamma)$$

να αποδείξετε ότι η f είναι ή κυρτή ή κοίλη.

Ε2.34 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^3}$

β) $f(x)=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}\right)e^{-x}$

γ) $f(x)=\dfrac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

δ) $f(x)=x^{\frac{3}{2}}\left(\ln x-\dfrac{2}{3}\right)-3x(\ln x-1)$

Ε2.35 **α)** Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $xe^{\frac{x}{2}}+1=e^x$

ii) $\frac{1}{3}\varepsilon\varphi x+\frac{2}{3}\eta\mu x=x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

β) Να αποδείξετε τις ανισότητες:

i) $xe^{\frac{x}{2}}-e^x+1<0,\ x\neq 0$

ii) $\frac{1}{3}\varepsilon\varphi x+\frac{2}{3}\eta\mu x>x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Ε2.36 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)e^{-x}\ \text{ και}$$

$$g(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right)e^{-x}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\leq e^x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

γ) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}\leq e^x \text{ για κάθε } x\geq 0$$

Ε2.37 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+1$$

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει πεδίο ορισμού το:

$$A=\mathbb{R}$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+1\geq\sqrt{1+x^2}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

Ε2.38 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=e^x-\lambda x \text{ με } \lambda>0$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα.

β) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του λ για την οποία είναι:

$$e^x\geq\lambda x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

γ) Για την παραπάνω τιμή του λ να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=\lambda x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=e^x$ και να βρείτε το σημείο επαφής.

Ε2.39 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=xe^{x-\frac{1}{x}} \text{ και}$$

$$g(x)=x^4+2x^3+2x^2+1$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$g(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$f''(x)=\frac{f(x)g(x)}{x^4},\ x\neq 0$$

και να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα. Έχει η C_f σημεία καμπής;

Ε2.40 Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f''(0)=2$ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$2f(x)-xf'(x)=x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f''(x)=2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα x΄x.

δ) Να βρείτε τους αριθμούς α, β και γ για τους οποίους ισχύει:

$$f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)=-\frac{3}{4}$$

Ε2.41 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^{-x} \text{ και } g(x) = -x^2 - 2$$

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση:

$$h(x) = \ln 2x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{x}{2},\ x > 0$$

και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να βρείτε το πλήθος των κοινών εφαπτομένων των C_f και C_g.

Ε2.42 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε τα όρια:

$$A = \lim_{x \to -1} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Αν $x < 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{x+1} \cdot \ln(x+1) > x$$

ε) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Ε2.43 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x - \ln(e^x + 1) + 2$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$x + 2 = \ln(e^x + 1)$$

Ε2.44 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x\ln(1+x) - x + \ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f, την f' και την f''.

β) Να βρείτε τη μονοτονία της f'.

γ) Να υπολογίσετε τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στην αρχή των αξόνων.

δ) Να προσδιορίσετε το πρόσημο της f'.

ε) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο, το οποίο και να βρείτε.

στ) Να αποδείξετε ότι:

$$x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) \geq \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

για κάθε $x > -1$.

ζ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$

Ε2.45 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^{x-1} - x\ln x - 1$$

α) Να υπολογίσετε τις $f'(x)$, $f''(x)$ και $f^{(3)}(x)$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-1} = x\ln x + 1$.

ε) Αν $x > 1$, να αποδείξετε ότι $e^{x-1} > x\ln x + 1$.

στ) Να εξετάσετε αν ορίζεται η f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Ε2.46 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ \alpha - 2, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε την $f'(x)$.

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο:

$$M(0, f(0))$$

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$xe^x + 1 \geq e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ε) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

στ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ζ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln f(x)}{x}$.

Ε2.47 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (1-x)\ln x + \frac{1}{x} + x - 2$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

γ) Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$ και να βρείτε το πρόσημο της f.

στ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

ζ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

η) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$(x-x^2)\ln x - \lambda x = 2x - x^2 - 1, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

θ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και την ευθεία $x=2$.

E2.48 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{\ln x - \ln \alpha}{x-\alpha}, \ \alpha>0$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A και την παράγωγο της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Δ. Θέματα από τα ολοκληρώματα

E2.49 Έστω συνάρτηση $f\colon [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(0)=0, \ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2} \ \text{και}$$

$$f''(x)+f(x)=2\text{συν}x \ \text{για κάθε} \ x\in[0,\pi]$$

α) Αν είναι:

$$g(x)=f'(x)\text{ημ}x - f(x)\text{συν}x \ \text{με} \ x\in[0,\pi]$$

να αποδείξετε ότι $g(x)=\text{ημ}^2x$.

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και την ευθεία:

$$x=\pi$$

E2.50 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)e^{-x}, & \text{αν} \ x\le 1\\ \dfrac{\ln^2 x}{x}, & \text{αν} \ x>1\end{cases}$$

Να βρείτε τις αρχικές της f.

E2.51 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=(10x^3+3x)\int_0^2 f(t)\,dt - 45$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=20x^3+6x-45$$

β) Να εξετάσετε αν η f αντιστρέφεται και αν ναι, να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

γ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

$$f^{-1}(x)=x$$

E2.52 Έστω $f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ συνάρτηση με:

$$f(1)=0 \ \text{και} \ f'(x)=e^{x^2} \ \text{για κάθε} \ x\in\mathbb{R}$$

A. Να βρείτε:

α) το πρόσημο της f,

β) το εμβαδόν μεταξύ των x΄x, C_f, $x=0$ και $x=1$.

B. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)>\frac{1}{3}(x^3-1) \ \text{για κάθε} \ x>1$$

E2.53 Έστω συνάρτηση f, συνεχής στο $[0,1]$ με:

$$f(0)=0 \ \text{και} \ \int_0^1 f(x)\,dx = f(1)$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με:

$$f'(\xi)=f(\xi)$$

E2.54 Μια πολυωνυμική συνάρτηση:

$$f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0 \ \text{με} \ \alpha_\nu\in\mathbb{N}^*$$

έχει την ιδιότητα:

$$f(f'(x))=f'(f(x)) \ \text{για κάθε} \ x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu^{\nu+1}\cdot\nu^\nu=\alpha_\nu^\nu\cdot\nu, \ \nu\in\mathbb{N}^*$.

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f(x).

γ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$I(x)=\int_{-x}^{x} f^5(t)\ln(1+e^t)\,dt$$

E2.55 Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και ισχύει:

$$f(\alpha)=f(\beta)=0$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\lambda f^2(\xi)$$