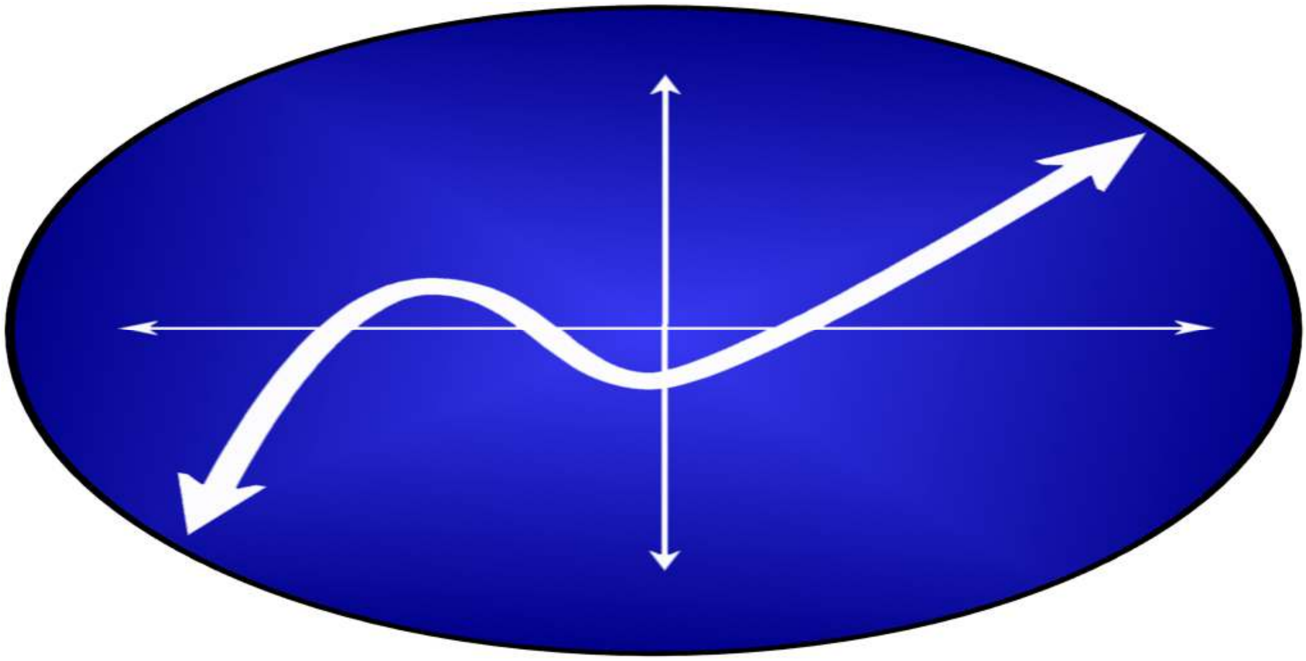


1. Συνάρτηση "1 − 1"

4.8 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι "1 − 1".

α) $f(x) = 5x - 7$ **β)** $f(x) = \dfrac{3}{x}$

γ) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$ **δ)** $f(x) = (x-1)^3 - 2$

ε) $f(x) = \sqrt{3-x} + 5$

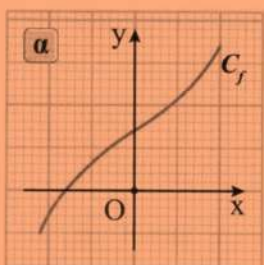
στ) $f(x) = 3\ln(x-1) + 12$

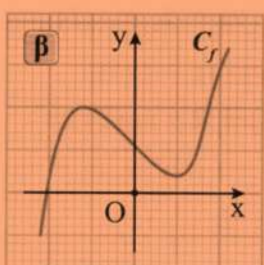
ζ) $f(x) = 5e^{2x-3} + 2$ **η)** $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x + 1}$

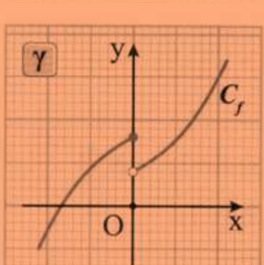
θ) $f(x) = \ln\dfrac{1-e^x}{e^x}$

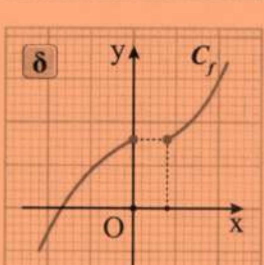
ι) $f(x) = x^2 - 4x + 4,\ x \geq 2$

4.9 Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις ανήκουν σε συναρτήσεις που είναι "1 − 1".









4.10 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι "1 − 1".

α) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2,\ x \in \mathbb{R}$

β) $g(x) = 2 - x - x^3 - \ln x,\ x > 0$

γ) $h(x) = e^x + x^3 + x + 2,\ x \in \mathbb{R}$

δ) $\varphi(x) = \ln x - \dfrac{1}{x},\ x > 0$

4.11 Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι "1 − 1" και ποιες όχι.

α) $f(x) = (x-1)(x+3) + 2$

β) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$

γ) $f(x) = x^{2008} - x^{2006} + x^2 + 1$

δ) $f(x) = (x-1)^5 + x^3 + x + 1$

ε) $f(x) = (x-2014)^2(x-2016)^3 + 1$

στ) $f(x) = \eta\mu x + \eta\mu 3x + 2$

4.12 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι "1 − 1" στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(f(x)) = x - 2,\ x \in \mathbb{R}$

β) $g(f(x)) = x - 3,\ x \in \mathbb{R}$

γ) $f^3(x) + 2f(x) = 2 - x,\ x \in \mathbb{R}$

δ) $f^5(x) - 3f^3(x) = x^7,\ x \in \mathbb{R}$

4.13 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι "1 − 1" στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(f(x)) = x - 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) $(f \circ f)(x) + f^{2007}(x) = x^{2007}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) $(g \circ f)(x) = x^3 + 3f(x) + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

4.14 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

δεν είναι "1 − 1" στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(f(x)) = 1,\ x \in \mathbb{R}$

β) $f(f(x)) = x^2 - x + 1,\ x \in \mathbb{R}$

γ) $f^2(x) + 2f(x^2) + 1 = 0,\ x \in \mathbb{R}$

4.15 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1 − 1" στις επόμενες περιπτώσεις:

α) $f(f(x)) = x - 1,\ x \in \mathbb{R}$

β) $f(f(x)) = e^x + f^5(x),\ x \in \mathbb{R}$

γ) $f(x) = x - \ln f(x),\ x \in \mathbb{R}$, με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) $f(f(x)) = x + f(x),\ x \in \mathbb{R}$

ε) $g(f(x)) = 2x^3 + e^{f(x)} + 5,\ x \in \mathbb{R}$

στ) $x^3 + f(x) + e^{f(x)} = 0,\ x \in \mathbb{R}$

2. Λύση εξισώσεων και συνάρτηση "1 - 1"

4.16 Αν η f είναι γνησίως μονότονη, να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $f(2 - x) = f(x - 4)$ **β)** $f(x^2 - 3) = f(1)$

γ) $f(e^x + 2) = f(3)$ **δ)** $f(\ln x + 1) = f(2)$

4.17 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι "1 − 1".

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^x = 1 - x$.

4.18 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 1$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $x^5 + x^3 + 2x - 4 = 0$.

4.19 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^5 + x^3 + x - 3$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $x^5 + x^3 + x = 3$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{5x} + e^{3x} + e^x < 3$.

4.20 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2 - x - \ln x$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $x + \ln x > 1$.

4.21 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^{x-1} + x + 2$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι "1 − 1".

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 4$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x-1} + x - 2 > 0$.

4.22 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$$

η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln\left[\frac{(3x-2)^2 + 1}{x^4 + 1}\right]$$

(Εξετάσεις 2010)

4.23 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + x^3 + x + 1$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι "1 − 1".

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{x^2 - x} + (x^2 - x)^3 + x^2 - 2x = e^{x+3} + (x+3)^3 + 3$$

4.24 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι "1 − 1".

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(2x^3 + x) = f(4 - x),\ x \in \mathbb{R}$$

4.25 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$(f \circ g)(x) = x + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να λύσετε την εξίσωση:

$$g(4^x - 2^{x+1} + 4) = g(2^{x+2} - 4)$$

4.26 Έστω $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύουν:

- $2g(x)+f(x^3+1)=g\big(g(x)\big)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,
- η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι "1 − 1".

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$g(e^x+1+x)=g(2-x^3)$$

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(e^x+2x)\geq f(e^{-x})$$

4.27 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\alpha^x+(\alpha-1)x-2\alpha+1 \quad (0<\alpha\neq 1)$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

4.28 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^9+x^7+x^5+x^3+x=5$

β) $e^{x-1}+\ln x+x=2$

γ) $\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x+\varepsilon\varphi x+x+1=0,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

4.29 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $(2^{x^2}+x^2+1)^3+2^{x^2}+x^2+1=$
$=(2^{x+2}+x+3)^3+4\cdot 2^x+x+3$

β) $(e^{x-1}+x-3)^5+(e^{x-1}+x-3)^3+$
$+e^{x-1}+x=0$

3. Θεωρητικές ασκήσεις

4.30 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. Αν ορίζονται οι συνθέσεις $f\circ g$ και $g\circ f$ στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α) αν οι f, g είναι "1 − 1", τότε η $f\circ g$ και η $g\circ f$ είναι "1 − 1",

β) αν η $f\circ g$ είναι "1 − 1", τότε και η g είναι "1 − 1",

γ) αν είναι $(f\circ f)(x)=x f(x)$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε η f είναι "1 − 1".

4.31 Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A\longrightarrow\mathbb{R}$ και $g: f(A)\longrightarrow\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση $g\circ f$ είναι "1 − 1", να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι "1 − 1",

β) η g είναι "1 − 1".

4.32 Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β με $\beta\neq 0$ και οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, ώστε:

$$(g\circ g)(x)=\alpha g(x)+\beta f(x^3+x+2000) \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Αν η f είναι "1 − 1", να αποδείξετε ότι και η g είναι "1 − 1".

4.33 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$(f\circ f)(x)=x^2-x+1,\ x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1)=1$,

β) η συνάρτηση $g(x)=x^2-x f(x)+1,\ x\in\mathbb{R}$, δεν είναι "1 − 1".

4.34 Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός $\alpha\neq 0$ και οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

$$(f\circ f)(x)=x^2-(2\alpha-1)x+\alpha^2 \quad \text{και}$$
$$g(x)=x^2-x f(x)+\alpha \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(\alpha)=\alpha=g(\alpha)$,

β) η g δεν είναι "1 − 1".

4.35 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, η οποία είναι "1 − 1" και ικανοποιεί τη σχέση $2f(x^4)-f^2(x^2)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

4.36 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει "1 − 1" συνάρτηση $f: \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f^2(x)\leq f(x)f(\alpha-x) \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

όπου α σταθερός μη μηδενικός πραγματικός αριθμός.

4.37 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}^*$ με την ιδιότητα:

$$f(xy)=f(x)f(y) \quad \text{για κάθε } x, y\in\mathbb{R}^*$$

Η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία με εξίσωση $y=x$ το πολύ σε ένα σημείο. Να αποδείξετε ότι:

α) αν η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική ρίζα, τότε η f είναι "1 − 1",

β) η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x\in\mathbb{R}^*$, είναι "1 − 1".

4.38 Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(xy)=f(x)f(y)+\lambda \quad \text{για κάθε } x, y\in\mathbb{R}$$

Αν η f είναι "1 − 1", να αποδείξετε ότι:

α) $f(1)=1$ και $\lambda=0$,

β) $f(0)=0$,

γ) η f είναι περιττή,

δ) $f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{f(x)}{f(y)}$ για κάθε $y\neq 0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

4.39 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$(f\circ f)(x)=-x^3 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Θέματα για τις εξετάσεις

Τα επόμενα θέματα μπορούν να αξιοποιηθούν για τη γενική επανάληψη της ενότητας ή για την προετοιμασία του σχετικού επαναληπτικού διαγωνίσματος.

Θ4.1 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\ln x-1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι "1 − 1".

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2)>0$.

δ) Να βρείτε τον αριθμό $\alpha\in\mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει ότι $\alpha^2+2\ln\alpha-2=\alpha+\ln(\alpha+2)$.

Θ4.2 Δίνεται η εξίσωση:

$$9^x-5^x-4^x=2\sqrt{20^x} \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f(x)=\left(\frac{5}{9}\right)^x+\left(\frac{4}{9}\right)^x-1$$

είναι γνησίως μονότονη.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

γ) Να βρείτε τις λύσεις της αρχικής εξίσωσης (1).

Θ4.3 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\left(\frac{2014}{2015}\right)^{\frac{x}{3}}+\left(\frac{1}{2015}\right)^{\frac{x}{3}}-1$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2014^{\frac{x}{3}}+1=2015^{\frac{x}{3}}$.

δ) Να βρείτε τις τιμές του α, αν ισχύει ότι:

$$2015^{\alpha}-2014^{\alpha}=1+3\left(2014^{\frac{\alpha}{3}}+2014^{\frac{2\alpha}{3}}\right)$$

Θ4.4 Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f^3(x+y)+f^3(x-y)=$$
$$=\big(f(x)+f(y)\big)^3+\big(f(x)-f(y)\big)^3$$
$$\text{για κάθε } x, y\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι περιττή,

β) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$,

γ) αν $f(x)>0$ για κάθε $x>0$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα,

δ) αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα, τότε η εξίσωση $f(x^2)=f(x+6)$ έχει δύο ακριβώς ρίζες, τις οποίες και να βρείτε.

Θ4.5 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f\big(xf(y)\big)+f\big(yf(x)\big)=2xy \quad \text{για κάθε } x, y\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι "1 − 1".

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

γ) Να βρείτε την τιμή f(1).

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)} \quad \text{για κάθε } x\neq 0$$

ε) Να βρείτε τη συνάρτηση f.