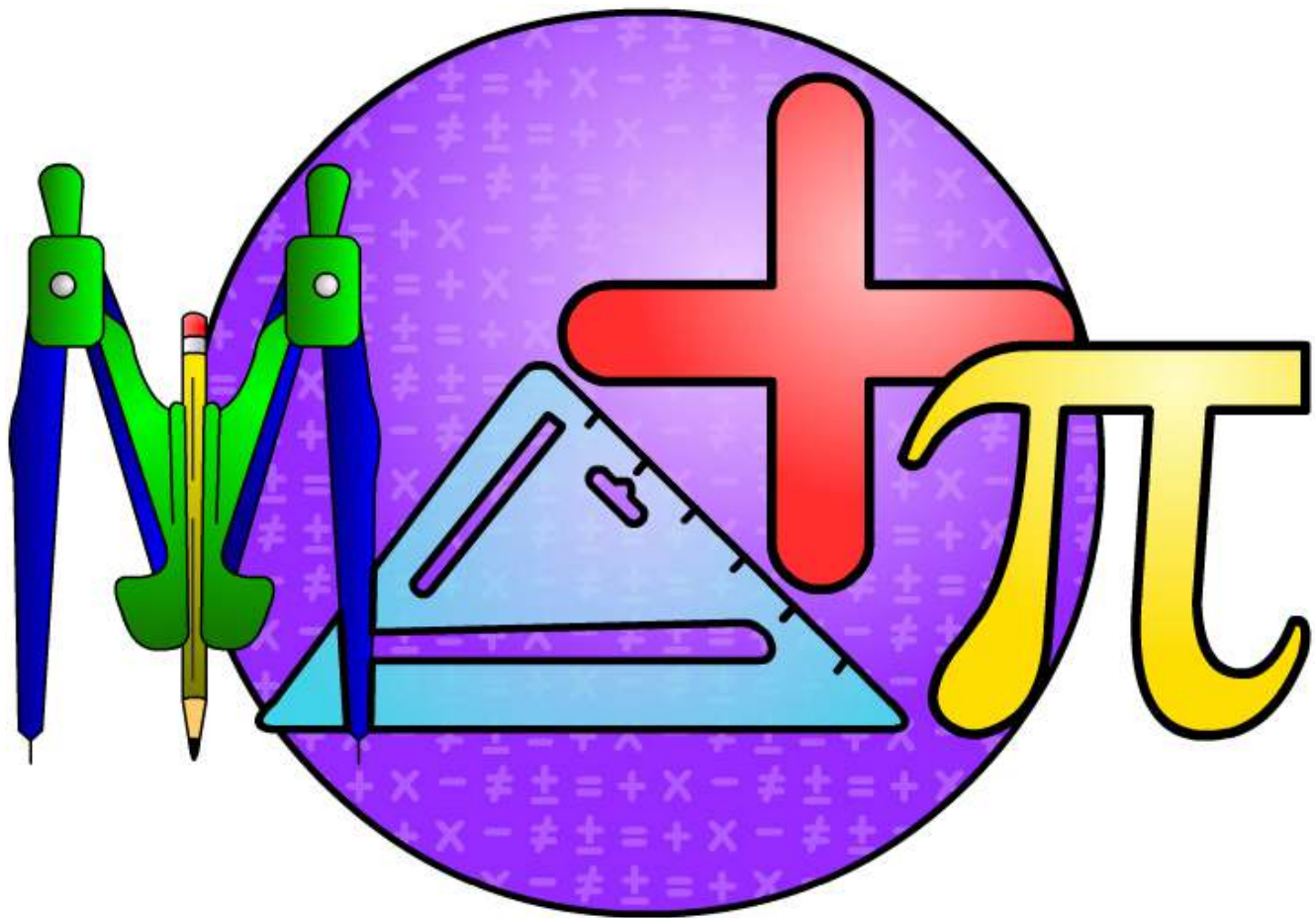




1. Εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης

5.8 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{1-x} - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να ορίσετε την f^{-1} .

δ) Να βρείτε τα σημεία που η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$.

ε) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις C_f , $C_{f^{-1}}$.

γ) $f(x) = \frac{5}{x}$

ε) $f(x) = e^{x-1} - 2$

ζ) $f(x) = x^3 - 1$

η) $f(x) = x^2 - 6x + 10$, $x \geq 3$

θ) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

δ) $f(x) = \ln x - 3$

στ) $f(x) = \sqrt{x-5} - 2$

ι) $f(x) = \ln \frac{x+1}{1-x}$

5.9 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1) + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να ορίσετε την f^{-1} .

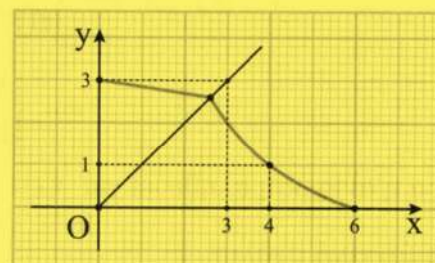
δ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις C_f , $C_{f^{-1}}$.

5.10 Να ορίσετε την αντίστροφη της συνάρτησης f , όταν:

α) $f(x) = x - 5$

β) $f(x) = 3x - 2$

5.11 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



α) Να εξετάσετε αν η f είναι "1-1".

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f^{-1} .

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = f^{-1}(3)(f \circ f)(6) + (f \circ f^{-1})(2)$$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 4$.

ε) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1} .

5.12 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".

β) Να ορίσετε την f^{-1} .

5.13 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 2, & \text{αν } 0 < x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

β) Να βρείτε την αντίστροφη της f .

5.14 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ e^x + 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να ορίσετε την f^{-1} .

γ) Να σχεδιάσετε τη C_f και τη $C_{f^{-1}}$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

5.15 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x|x|$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".

β) Να ορίσετε την f^{-1} .

5.16 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3 - 2x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

γ) Να ορίσετε την f^{-1} .

5.17 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{αν } x < 1 \\ x^2 + a, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

α) Να βρείτε τις τιμές του a , ώστε η f να αντιστρέφεται.

β) Για $a = 4$ να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f .

5.18 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις αντιστρέφονται και να βρείτε τις αντίστροφές τους.

α) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$

β) $g(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

γ) $h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ δ) $\varphi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

2. Οι εξισώσεις $f^{-1}(x) = x$, $f(x) = x$, $f^{-1}(x) = f(x)$

5.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$.

5.20 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x - 3$.

α) Να βρείτε τη μονοτονία της f .

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

γ) Να υπολογίσετε το $f^{-1}(-3)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

στ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με την $C_{f^{-1}}$.

5.21 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 8x - 8$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) > 1$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

δ) Να υπολογίσετε την τιμή $f^{-1}(-8)$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f^{-1}(x) > 1, \quad x \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

5.22 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta \mu x + x + \epsilon \varphi x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

5.23 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^{-x} - x \text{ με } f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 1 - x$.
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) \leq 1 - x$.

5.24 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x + e^x \text{ με } f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η f^{-1} .
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x - 1$.
- δ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x - 1$.

5.25 α) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

$$f(x) = f^{-1}(x) \text{ και } f(x) = x$$

είναι ισοδύναμες.

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^9 + 4x + 4$.

- i) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
- ii) Να υπολογίσετε το $f^{-1}(9)$.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}(x^2 - 3x + 11) = 1$$

iv) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

3. Αντίστροφη συνάρτηση και συναρτησιακές σχέσεις

5.26 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$(f \circ f)(x) + 3f(x) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- β) Αν η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να εκφράσετε την f^{-1} ως συνάρτηση της f .

5.27 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^5(x) + 2f(x) - x = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$.
- γ) Να βρείτε τον τύπο της f^{-1} .

5.28 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \text{ και}$$

$$(f \circ f + g \circ f)(x) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R}$,
- β) ισχύει $f^{-1}(x) = f(x) + g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5.29 Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f^3(x) - \ln(x - 1) = 4 \text{ για κάθε } x > 1$$

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- β) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
- γ) Να βρείτε τον τύπο της f^{-1} .

5.30 Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(f(x)) = x + f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι:

- α) η f είναι αντιστρέψιμη,
- β) $f(0) = 0$,
- γ) $f^{-1}(x) = f(x) - x$ για κάθε $x \in f(\mathbb{R})$.

5.31 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο τιμών το $(1, +\infty)$ και ισχύει:

$$f^2(x) + 1 = 2f(x) + e^{2x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- β) Να αποδείξετε ότι η f είναι " $1-1$ ".
- γ) Να βρείτε τον τύπο της f^{-1} .

5.32 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(f(x)) = 2 - x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) η f είναι " $1-1$ ",
- β) η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$,
- γ) $f(1) = 1$,
- δ) $f^{-1}(x) = 2 - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5.33 Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση με την ιδιότητα $(f \circ f)(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

- α) $f(0) = 0$,
 β) η f είναι αντιστρέψιμη,
 γ) η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$,
 δ) η f είναι περιττή,
 ε) $f^{-1}(x) = -f(x)$, $x \in \mathbb{R}$,
 στ) η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

5.34 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$(f \circ f)(x) = 1001x + 2000 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$,
 β) ορίζεται η $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 γ) υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(a) = a$.

5.35 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ είναι περιττή με $f(1) = 1$ και ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\frac{f^2(x)}{y} + \frac{f^2(y)}{x} \leq \frac{(f(x) + f(y))^2}{x + y}$$

για κάθε $x, y > 0$

- α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
 β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1} .
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$. Τι συμπεραίνετε;

5.36 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(f(x) - 2) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 β) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
 γ) Να βρείτε τον τύπο της f^{-1} ως συνάρτηση του τύπου της f .
 δ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = f(x+2) - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

4. Συνδυαστικά θέματα

5.37 Δίνεται μια γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(5, 9)$, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(2 + f^{-1}(x^2 + x)) = 9$$

β) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(f^{-1}(x^2 - 8x) - 2) < 2$$

5.38 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 0)$ και $B(-1, 2)$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(f^{-1}(e^x + 1) + 2) = 0$$

 γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
 δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f^{-1}(f(\ln(x+1)) + 2) < -1$$

5.39 Έστω $f(x) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{\eta \mu x} + \eta \mu x = \sqrt{e} + \frac{1}{2} \text{ με } x \in [0, \pi]$$

- γ) Να αποδείξετε ότι $e^x - e^e > e - \pi$.
 δ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.
 ε) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f^{-1} βρίσκεται κάτω από την ευθεία:

$$y = x$$

 στ) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) > 0$.

5.40 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - x$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
 β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η f^{-1} .
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 1 - x$.
 δ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) \leq 1 - x$.

5.41 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + e^x$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 β) Να λύσετε τις εξισώσεις:
 i) $f^{-1}(x) = x$ ii) $f^{-1}(x) = x - 1$

γ) Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $f^{-1}(x) \leq x$ ii) $f^{-1}(x) \geq x - 1$

δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

ε) Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

στ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(2^x) + f(5^x) = f(3^x) + f(7^x)$$

5.42 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 8$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) < x$.

δ) Να βρείτε την τιμή $f^{-1}(-8)$.

ε) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f και της $C_{f^{-1}}$.

στ) Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ζ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(e^{3x} + 1) \leq 2$.

5.43 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

♦ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

♦ η f είναι περιττή

♦ η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι περιττή.

δ) Να βρείτε τη σχετική θέση της $C_{f^{-1}}$ με τον άξονα $x'x$.

5.44 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(2, 3)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f .

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

$$f^{-1}(x) = f(x) \text{ και } f(x) = x$$

είναι ισοδύναμες στο $\mathbb{R}$.

δ) Αν $f(-1) = 0$, να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημό της.

ε) Αν $f(0) = 1$, να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f^{-1} .

5.45 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

γ) Να βρείτε για ποια x η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = x$.

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\ln \frac{e}{\pi} < \pi - e$$

ε) Να λύσετε την ανίσωση $\ln x > 1 - x$.

στ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(\ln x) \geq f\left(\frac{e}{x}\right) \text{ με } x > 1$$

5.46 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(f \circ f)(x) = 2 - x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το $f(1)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) + f^{-1}(x) = 2, x \in \mathbb{R}$$

ε) Να αποδείξετε ότι η C_f δεν τέμνει την ευθεία:

$$y = x$$

στ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(e^{x-1} + x - 1) = 1$$

5.47 Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) = 2e^x + x, x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε το $f(0)$.

γ) Αν η f είναι γνησίως μονότονη, να βρείτε το είδος της μονοτονίας της.

5.48 Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + 2f(x) = 3 - x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 3$.
 γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

δ) Αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε:

- i) να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f ,
 ii) να λύσετε την ανίσωση:

$$f(e^{x-1} + \ln x) > f(2 - x)$$

Η κατανόηση της θεωρίας

5.49 Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

- α) Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται "1-1";
 (Εξετάσεις 2005)
 β) Σε ποιες περιπτώσεις μια συνάρτηση είναι "1-1";
 γ) Πώς διαπιστώνουμε από τη C_f αν η συνάρτηση f είναι "1-1";
 δ) Ποια πρόταση συνδέει τις γνησίως μονότονες και τις "1-1" συναρτήσεις;
 ε) Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Πότε ορίζεται η f^{-1} , από ποια σχέση και ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;
 στ) Τι γνωρίζετε για τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} ;
 ζ) Ποια θεμελιώδη πρόταση γνωρίζετε για τις εξισώσεις $f^{-1}(x) = x$ και $f(x) = x$;

5.50 Να συμπληρώσετε τα επόμενα κενά με λέξεις ή μαθηματικά σύμβολα, ώστε να προκύψουν αληθείς μαθηματικές προτάσεις:

- α) Αν η $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι "1-1", τότε για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ είναι
 β) Αν η $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι "1-1", τότε:
 $f(a) = f(b) \Leftrightarrow \dots$ για κάθε $a, b \in A$
 γ) Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι "1-1", τότε η εξίσωση $y = f(x)$ έχει λύση για κάθε $y \in f(A)$ και αντιστρόφως.
 δ) Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι "1-1", τότε κάθε ευθεία στον άξονα τέμνει τη C_f το σε ένα σημείο.
 ε) Αν η $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι "1-1", τότε ορίζεται η f^{-1} με πεδίο ορισμού το, σύνολο τιμών το ... και

ισχύει $f(x) = y \Leftrightarrow \dots$

στ) Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέφεται, τότε:

$$\diamond (f \circ f^{-1})(y) = \dots \text{ για κάθε } y \in \dots$$

$$\diamond (f^{-1} \circ f)(x) = \dots \text{ για κάθε } x \in \dots$$

ζ) Οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι
 ως προς την ευθεία με εξίσωση

η) Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι εξισώσεις $f(x) = x$ και $f^{-1}(x) = x$ είναι

5.51 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

α) Αν η f είναι "1-1", τότε:

$$a \neq b \Leftrightarrow f(a) \neq f(b) \text{ για κάθε } a, b \in D_f$$

β) Αν η $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι "1-1", τότε:

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$$

γ) Για κάθε συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x) = f(1) \Leftrightarrow x = 1$$

δ) Αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι και "1-1".

ε) Αν η f είναι "1-1", τότε είναι γνησίως μονότονη.
 (Θέμα εξετάσεων)

στ) Δεν υπάρχει "1-1" συνάρτηση, η οποία να είναι άρτια.

5.52 Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

α) Αν η f είναι "1-1", τότε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

β) Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f .

γ) Είναι $(f \circ f^{-1})(x) = x$ για κάθε $x \in D_f$.

δ) Οι C_f και $C_{f^{-1}}$ τέμνουν την ευθεία $y = x$ στα ίδια σημεία.

ε) Οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.

στ) Τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = x$.

ζ) Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $A = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Αν η f είναι "1-1" στο Δ_1 , "1-1" στο Δ_2 και ισχύει $f(\Delta_1) \cap f(\Delta_2) = \emptyset$, τότε η f είναι "1-1" στο A .

η) Η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι "1-1", αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει:

$$\text{αν } x_1 = x_2, \text{ τότε } f(x_1) = f(x_2)$$

(Θέμα εξετάσεων)

θ) Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

(Θέμα εξετάσεων)

ι) Αν η C_f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το A ανήκει και στη γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της f^{-1} .
(Εξετάσεις 2005)

Θέματα για τις εξετάσεις

Τα επόμενα θέματα μπορούν να αξιοποιηθούν για τη γενική επανάληψη της ενότητας ή για την προετοιμασία του σχετικού επαναληπτικού διαγωνίσματος.

Θ5.1 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^{1-x} - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

β) Να εξετάσετε αν η f αντιστρέφεται.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $e^{1-x} = x$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{1-x^2} + x = x^2 + e^{1-x}$$

Θ5.2 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + \ln(x+1) + 2$$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x^2) = e + 2 + \ln 2$$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) \leq f(x+2)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{x^2} + \ln(x^2 + 1) = e^{2x+3} + \ln(2x+4)$$

Θ5.3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να ορίσετε την f^{-1} .

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Θ5.4 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{x}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να εξετάσετε αν η f αντιστρέφεται.

γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το:

$$[0, +\infty)$$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x - 1$.

Θ5.5 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$x + y \leq e^x f(x) + e^y f(y) \leq f(x+y)e^{x+y} \\ \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) \geq xe^{-x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

γ) Να βρείτε τον τύπο της f .

Θ5.6 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \sqrt{x} - 1$.

α) Να βρείτε τη μονοτονία της f .

β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η f^{-1} και αν ναι, να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(e^x) = x$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(e^x + 2) > x$.

Θ5.7 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f είναι " $1-1$ ",

β) $f(0) = 0$ και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,

γ) $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή
 $f(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θ5.8 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(f(x)) = x^3 + f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να εξετάσετε αν η f αντιστρέφεται.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

γ) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να βρείτε το πρόσημο της f .

Θ5.9 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - (x-1)^3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

β) Να βρείτε την αντίστροφη της f .

γ) Να εξετάσετε αν τα σημεία:

$$A(0, f(0)), B(1, f(1)), \Gamma(2, f(2))$$

ανήκουν και στη $C_{f^{-1}}$.

δ) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα, τότε οι $C_g, C_{g^{-1}}$ μπορεί να έχουν κοινά σημεία και εκτός της ευθείας $y = -x$.

ε) Αν η $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και περιττή, να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g τέμνονται πάνω στην ευθεία $y = -x$.

Θ5.10 Για μια συνάρτηση:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$$

ισχύει ότι $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x > 0$.

α) Να βρείτε το $f(1)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 1$.

Θ5.11 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$(f \circ f)(x) = x^2 - x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

β) Να εξετάσετε αν η f αντιστρέφεται.

γ) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

δ) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Θ5.12 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(f(x) - f(y)) = f(f(x)) - y \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0) = 0$,

β) η συνάρτηση f αντιστρέφεται,

γ) η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$,

δ) η f είναι περιττή,

ε) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Θ5.13 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(x + f(y - x)) = y + 2f(x) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι αντιστρέψιμη,

β) $f(x) = a - x$ για κάποια $a \in \mathbb{R}$,

γ) $f(x) = -x, x \in \mathbb{R}$.

Θ5.14 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y))$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

γ) Αν $f(1) = 2014$, να βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

Θ5.15 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(xf(x) + f(y)) = f^2(x) + y \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) $f(0) = 0$,
 β) η f είναι " $1-1$ ", έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και:

$$f^{-1} = f$$

γ) $f^2(x) + y = x^2 + y$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

δ) $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$ ή
 $f(x) = -x, x \in \mathbb{R}$.

Θ5.16 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(f^2(x) + f(y)) = xf(x) + y \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) η f αντιστρέφεται,
 β) η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$,
 γ) $f(0) = 0$,
 δ) $f^{-1} = f$,
 ε) $f^2(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
 στ) $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή
 $f(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θ5.17 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ είναι " $1-1$ " και έχει την ιδιότητα:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)} \text{ για κάθε } x \neq 0$$

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι:

$$f(f(x)) = \frac{1}{x} \text{ και } f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \text{ για κάθε } x \neq 0$$

β) να αποδείξετε ότι $f(1) = -1$,

γ) να βρείτε το $f(-1)$,

δ) να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ και να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$,

ε) να αποδείξετε ότι η f δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $I = (-\infty, 0)$,

στ) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{αν } x < 0 \\ -\frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

επαληθεύει την ιδιότητα:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)} \text{ για κάθε } x \neq 0$$

Θ5.18 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(xf(x) + f(y)) = x^2 + y \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
 β) η συνάρτηση f είναι " $1-1$ ", έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και $f^{-1} = f$,
 γ) $f^2(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
 δ) $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή
 $f(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1ο κριτήριο αξιολόγησης

Θέμα Α

- A1.** α) Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε σύνολο τιμών και τι γραφική παράσταση της f ;
β) Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;
γ) Αν f και g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού D_f και D_g αντίστοιχα και ορίζεται η σύνθεση $f \circ g$, ποιο είναι το πεδίο ορισμού της $f \circ g$;

A2. Δίνεται μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

- α) Πότε η f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα στο A ;
β) Πότε λέμε ότι η f έχει μέγιστο και πότε ελάχιστο;
γ) Πότε η f λέγεται «1-1»;
δ) Πότε η f έχει αντίστροφη και ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1} ;

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

- α) Αν το σημείο $M(a, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , τότε $f(a) = \beta$ και αντίστροφα.
β) Υπάρχει συνάρτηση που για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ η γραφική της παράσταση τέμνει την ευθεία $x = a$ τουλάχιστον δύο φορές.
γ) Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, τότε το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $\{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$.
δ) Η συνάρτηση $g \circ f$, αν ορίζεται, έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$.
ε) Ισχύει ότι $g \circ f = f \circ g$.
στ) Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο A .

- ζ) Αν για μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση:

$$f(\alpha) = f(\beta) \iff \alpha = \beta \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in A$$

τότε η f είναι «1-1».

- η) Για να ορίζεται η αντίστροφη της συνάρτησης $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, πρέπει η f να είναι «1-1». Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι τότε το $f(A)$ και ισχύουν οι σχέσεις:

- ♦ $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$ για κάθε $x \in A$
- ♦ $(f \circ f^{-1})(x) = x$ για κάθε $x \in f(A)$
- ♦ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in A$

- θ) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 , τότε είναι γνησίως αύξουσα στο:
 $\Delta_1 \cup \Delta_2$

- ι) Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι «1-1», τότε οι εξισώσεις $f(x) = x$ και $f^{-1}(x) = x$ είναι ισοδύναμες.

- ια) Αν μια συνάρτηση f είναι «1-1», τότε είναι γνησίως μονότονη.

- ιβ) Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι «1-1», τότε η εξίσωση $y = f(x)$ έχει μία ακριβώς ρίζα για κάθε $y \in f(A)$.

Θέμα Β

Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$(f \circ f)(x) + f(x) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

B1. η f είναι αντιστρέψιμη,

B2. $f(x + f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

B3. $f(0) = 0$,

B4. η εξίσωση $f(x) + x = 0$ έχει μοναδική λύση, την οποία να βρείτε.

Θέμα Γ

Δίνεται μια γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(3, 2)$.

Γ1. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της $f(x)$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} και ότι είναι γνησίως φθίνουσα.

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(3 + f(x^2 + x - 3)) < 1$.

Θέμα Δ

Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$e^{f(x)} + f(x) = x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^x + x = 1$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Δ3. Να βρείτε το $f(0)$.

Δ4. Να βρείτε την αντίστροφη της f .

Δ5. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

4. Μια χαρακτηριστική εξίσωση: $f^{-1}(x) = f(x)$

Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι εξισώσεις:

$$f^{-1}(x) = f(x) \quad \text{και} \quad f(x) = x$$

είναι ισοδύναμες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

♦ Έστω ότι $f^{-1}(a) = f(a)$. Τότε:

$$f(f^{-1}(a)) = f(f(a)), \text{ δηλαδή } f(f(a)) = a$$

Θα αποδείξουμε ότι $f(a) = a$. Εργαζόμαστε με απαγωγή σε άτοπο.

– Αν $f(a) < a$, τότε $f(f(a)) < f(a) \iff a < f(a)$, άτοπο.

– Αν $f(a) > a$, τότε $f(f(a)) > f(a) \iff a > f(a)$, άτοπο.

Άρα είναι $f(a) = a$.

♦ Έστω ότι $f(a) = a$. Τότε $a = f^{-1}(a)$ και έτσι:

$$f^{-1}(a) = f(a) \quad (= a)$$

Άρα τελικά:

$$f^{-1}(a) = f(a) \iff f(a) = a$$

που σημαίνει ότι οι εξισώσεις $f^{-1}(x) = f(x)$ και $f(x) = x$ είναι ισοδύναμες.

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω πρόταση πρέπει να αποδεικνύεται πριν (ή μετά) την εφαρμογή της, αφού δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο.

Από την πρόταση αυτή προκύπτει επίσης ότι:

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι C_f , $C_{f^{-1}}$ μπορεί να έχουν κοινά σημεία μόνο πάνω στην ευθεία $y = x$.