Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Εισαγωγή στο όριο

6.20 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

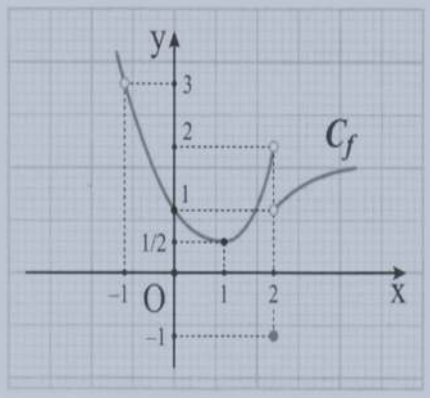
β) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

δ) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

ε) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

στ) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$



6.21 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

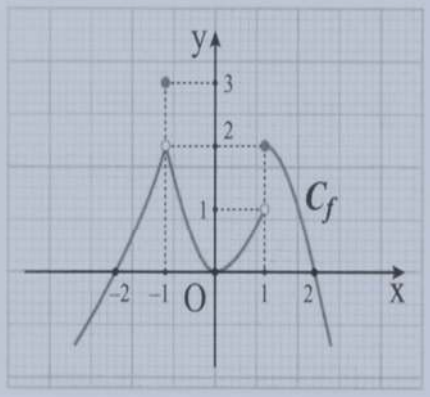
β) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

δ) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

ε) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

στ) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$



6.22 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = [-2, 4]$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

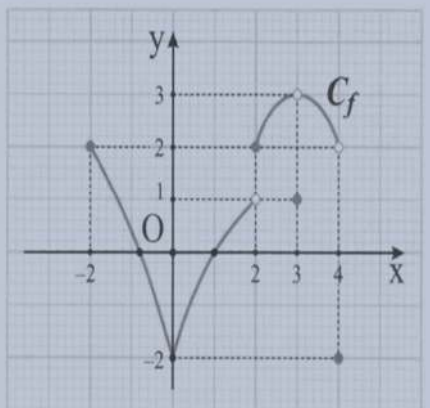
β) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

δ) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

ε) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

στ) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$



ζ) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$

η) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$

6.23 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν } x<1 \\ 3, & \text{αν } x=1 \\ 2-x, & \text{αν } x>1 \end{cases}$$

α) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

6.24 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{αν } x\in(-1,1) \\ \dfrac{1}{x}, & \text{αν } x\notin(-1,1) \end{cases}$$

α) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ iii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

6.25 Να βρείτε ποια από τα παρακάτω όρια έχουν νόημα.

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $D_f=[0,5]$

β) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $D_f=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

γ) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, $D_f=(3,+\infty)$

δ) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, $D_f=(-\infty,4)$

ε) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, $D_f=(1,2)\cup(4,5)$

στ) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, $D_f=[-1,2]\cup\{3\}$

6.26 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. Αν ισχύει:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lambda^2-2\lambda+3 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 3^+} f(x)=2\lambda-1$$

να βρείτε τις τιμές του λ έτσι, ώστε να υπάρχει το:

$$\lim_{x\to 3} f(x)$$

Ποιο είναι στην περίπτωση αυτή το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$;

6.27 Αν είναι:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \alpha + 3,\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \beta + 2$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2\alpha + 1 \text{ και } \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3\beta - 4$$

να βρείτε τις τιμές των α και β έτσι, ώστε να υπάρχουν τα:

$$\lim_{x\to 1} f(x) \text{ και } \lim_{x\to 2} f(x)$$

2. Ιδιότητες του ορίου

6.28 Να βρείτε τα όρια:

α) $A = \lim_{x\to 2}[(x-1)^{10}(x^2+x-1)]$

β) $B = \lim_{x\to 1}\dfrac{x^4+x^2+x+1}{x^2+1}$

γ) $\Gamma = \lim_{x\to 2}\dfrac{x+\sqrt{x^2+x+3}}{x^2+x-1}$

δ) $\Delta = \lim_{x\to -1}\dfrac{|x+2|+x^3+2x+1}{|x+3|-1}$

6.29 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim_{x\to 2}(|x^3-1|+x)$

β) $B = \lim_{x\to 1}(\sqrt{x^2+2x+6}-2x)$

γ) $\Gamma = \lim_{x\to 2}\dfrac{(x^2-3)^7+4x-2}{\sqrt{x^2+2x+1}+2x}$

δ) $\Delta = \lim_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+6}+x^2}{|2x+1|}$

3. Χρήση των πλευρικών ορίων

6.30 Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$, όταν:

α) $f(x) = \begin{cases} x^2+x+2, & \text{αν } x<-1 \\ x^2+1, & \text{αν } x\geq -1 \end{cases}$,

$x_0 = -1$

β) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3}{x-2}, & \text{αν } x<1 \\ 2, & \text{αν } x=1 \\ \sqrt{x^2+3}-6x, & \text{αν } x>1 \end{cases}$,

$x_0 = 1$

γ) $f(x) = \begin{cases} x^2+3x+2, & \text{αν } x\leq -1 \\ \sqrt{x^2+3}+x-1, & \text{αν } x>-1 \end{cases}$,

$x_0 = -1$

δ) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+2, & \text{αν } x<1 \\ x^2+x+1, & \text{αν } x\geq 1 \end{cases}$,

$x_0 = 1$

6.31 Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3}, & \text{αν } x<1 \\ \sqrt{2x}-2, & \text{αν } 1\leq x<2 \\ x^3-2x-4, & \text{αν } x\geq 2 \end{cases}$,

$x_0 = 1,\ x_0 = 2$

β) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3}-x^2+x, & \text{αν } x\in[-3,1) \\ x^2-2x+3, & \text{αν } x\in(1,3) \\ \sqrt{x^2+7}+x-2, & \text{αν } x\in[3,+\infty) \end{cases}$,

$x_0 = 1,\ x_0 = 3$

4. Μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ σε ρητές συναρτήσεις

6.32 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A = \lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

β) $B = \lim_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}$

γ) $\Gamma = \lim_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$

δ) $\Delta = \lim_{x\to 1}\dfrac{x^3+4x^2-3x-2}{x^2-3x+2}$

ε) $E = \lim_{x\to -1}\dfrac{x^4+3x^2-4}{x^2-x-2}$

στ) $Z=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5-2x^4+x^2-x-2}{x^2-5x+6}$

6.33 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

β) $B=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}\right)$

γ) $\Gamma=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right]$

δ) $\Delta=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-11}{2x^2+2x-4}+\dfrac{x+2}{x^2-1}\right)$

5. Μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ σε άρρητες συναρτήσεις

6.34 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$

β) $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}$

γ) $\Gamma=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

δ) $\Delta=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

ε) $E=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x-3}$

στ) $Z=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+2}$

6.35 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$

β) $B=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}$

γ) $\Gamma=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+4}+x-1}{x^2+3x+2}$

δ) $\Delta=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-x-1}{\sqrt{x+2}-x}$

6.36 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+10}-x-2}{x^2-4x+3}$

β) $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+5}+x-4}{\sqrt{x}-x}$

6.37 Να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-2x+1}{x-1}, & \text{αν } x<1\\ \dfrac{x^3-1}{x-1}-1, & \text{αν } x>1\end{cases}$,

$x_0=1$

β) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3}{x^2-1}+\dfrac{1}{x-1}, & \text{αν } x<1\\ \dfrac{3\sqrt{x^2+3}-6}{x-1}, & \text{αν } x>1\end{cases}$,

$x_0=1$

6.38 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$

β) $B=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x+3}+x+1}{x^2+2x}$

6.39 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-3}{x^2-1}$

β) $B=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x+2}-1}{x^2-2x}$

γ) $\Gamma=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2+3x+6}-x^2+x-4}{x^2-3x+2}$

δ) $\Delta=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+x^2+x-\sqrt{x^2+2x+6}}{x^2-1}$

ε) $E=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x}-3}$

6.40 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-3}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x}-3}$

β) $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+5}+\sqrt{x^2+x+2}-3x-2}{x^2-1}$

γ) $\Gamma=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+5}-\sqrt[3]{x}-x-1}{x^2-5x+4}$

δ) $\Delta=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt[3]{x^2+x+2}-1}{x^2-4}$

6. Μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ και πρόσημο ορίου

6.41 Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x+2|+|x^2-3|-5}{|x|-1}$

β) $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-3|+|x-2|-1-2x^2}{x^2-3x+2}$

6.42 Να υπολογίσετε τα όρια που ακολουθούν:

α) $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|+|x^2-4|+x-2}{x^2+x-6}$

β) $B=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-3|+x^2-9}{|x|-3}$

γ) $\Gamma=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x^2-9|+|x-3|}{|x+2|-5}$

δ) $\Delta=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x^2-2x-3|+|x-3|}{|x^2-4x+3|+x^2-6x+9}$

7. Με βοηθητική συνάρτηση (η συνάρτηση κρύβεται)

6.43 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ με:

$$\lim_{x\to 2}(f(x)-3x^2+x-2)=-4$$

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

6.44 Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)-7)=3$

β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-1}{x-2}=5$

γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-4}{x-2}=4$

δ) $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)-x^2+16)=20$

6.45 Αν ισχύει:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=5 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 3}[g(x)(x^2-x-6)]=3$$

να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 3}(f(x)g(x))$.

6.46 Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=5$$

και

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)(x^2-2x+1)}{\sqrt{x}-1}=2$$

να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)g(x)]$.

6.47 Αν ισχύει:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=1 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to 2}\left[g(x)(2x^2+3x-14)\right]=11$$

να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}[f(x)g(x)]$.

6.48 Αν ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{xf(x)-x^2}{x^3-1}=3$$

να βρείτε τα όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x^2-1}$

β) $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x}{\sqrt{x}-1}$

8. Με το κριτήριο παρεμβολής

6.49 Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $1-x^4 \le f(x) \le 1+x^4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) $x+2 \le f(x) \le x^2+x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

6.50 Αν:

$$2-|x-1| \le f(x)-2x \le x^2-2x+3$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

6.51 Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$|f(x)-x+2| \le x^2-2x+1 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$.

6.52 Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ στις επόμενες περιπτώσεις:

α) $|f(x)-(x-3)^4| \le (x-1)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) $|f(x)-x^4| \le (x-1)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

6.53 Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|f(x)-2| \le x^2$, $x\in\mathbb{R}$

β) $(f(x)-3)^2 \le x^2$, $x\in\mathbb{R}$

6.54 Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x \le f(x)-3 \le x^2+x \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $A = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-3}{x}$ **ii)** $B = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-3}{x}$

6.55 Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$4x \le f(x)+4 \le x^2+4 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε:

α) το $f(2)$,

β) το όριο $A = \lim\limits_{x\to 2} f(x)$,

γ) το όριο $B = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

6.56 Για μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι:

$$3x-x^2 \le f(x) \le x^2+3x \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x^2+x} = 3$.

6.57 Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$\sqrt{3x+3} \le (x-2)f(x)+3 \le 3\sqrt{x+7}-6$$

για κάθε $x\in(1,3)$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

6.58 Δίνονται οι $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$\lim_{x\to 0}[f^2(x)+g^2(x)-2f(x)+2g(x)] = -2$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -1$

Μηδενική επί φραγμένη

6.59 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^4 \eta\mu\frac{1}{x}, \quad x\in\mathbb{R}^*$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$-x^4 \le f(x) \le x^4, \quad x\in\mathbb{R}^*$$

β) Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

6.60 Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$x^2 \eta\mu\frac{3}{x} \le f(x) \le x^2 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}^*$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \eta\mu\dfrac{3}{x}\right)$

β) $B = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

6.61 Να αποδείξετε ότι:

α) $A = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^5 \eta\mu\dfrac{2}{x}\right) = 0$

β) $B=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2}\right)=0$

γ) $\Gamma=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)=0$

δ) $\Delta=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3+1+x^3\eta\mu\frac{3}{x}\right)=1$

6.62 Έστω συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $|g(x)|\le 3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να υπολογίσετε το όριο $A=\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))$.

6.63 Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ πληροί τη συνθήκη:

$$\left|f(x)-x^2\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right|\le x^2\eta\mu^4\frac{1}{x}\quad\text{για κάθε } x\in\mathbb{R}^*$$

να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

9. Εύρεση παραμέτρων

6.64 Να βρείτε τις παραμέτρους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ στις επόμενες περιπτώσεις:

α) $f(x)=\begin{cases}x^3+(\alpha+1)x+\beta, & \text{αν } x<-1\\ x^2+3\beta x-4\alpha+4\beta, & \text{αν } x\ge -1\end{cases}$,

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-4$

β) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1}, & \text{αν } x<1\\ x^2+\alpha^2x-2, & \text{αν } x\ge 1\end{cases}$,

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)\in\mathbb{R}$

γ) $f(x)=\begin{cases}2x^2+\alpha x+\beta, & \text{αν } x\le -1\\ 3x+1, & \text{αν } x\in(-1,2)\\ x^2-\beta x+\alpha-2, & \text{αν } x\ge 2\end{cases}$,

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\in\mathbb{R}$

δ) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}+2\alpha x+\beta, & \text{αν } x<1\\ \alpha\sqrt{x}+\beta x^2+\beta x+2, & \text{αν } x\ge 1\end{cases}$,

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=7$

6.65 Να βρείτε τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\alpha x^2+\beta}{x-1}=4$

β) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\alpha x^2+\beta x-6}{x^2-1}=4$

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\alpha x+\beta\sqrt{x}-2}{x-1}=-2$

δ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+(\alpha-4)x-\alpha-\beta}{x^2-x-2}=2$

ε) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\alpha x^2+5x+2\beta}{x^2+3x+2}=3$

στ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha|1-x^2|+\beta|9-x^2|-3x-7}{x^2-4}=-\dfrac{7}{4}$

10. Θεωρητικές ασκήσεις

6.66 **α)** Αν $\lim\limits_{h\to 0} f(5+h)=10$, να βρείτε το:

$$A=\lim_{x\to 5}(f(x)-2)$$

β) Αν $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=5$, να βρείτε το:

$$B=\lim_{u\to 0}(f(3+u)-2)$$

6.67 Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ όταν:

α) $\lim\limits_{h\to 0}(f(\alpha+h)-h^2+h+5)=7$

β) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=5$

6.68 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ και

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

6.69 Αν $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$ και $f(x)\ne 1$ κοντά στο 2, να βρείτε τα όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)+5f(x)-6}{f^2(x)+2f(x)-3}$

β) $B = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{f^2(x)+3}-2}{f(x)-1}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|f^2(x)-4|+|3-f(x)|-5}{f^2(x)-1}$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f^2(x)+8}-4f(x)}{f(x)-1}$

6.70 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ με:

$$\lim_{x\to 2}(f(x)+x^2-x+2)=3$$

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-2f(x)-3}{f^2(x)-9}=2$.

6.71 Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+x}{x-1}=2$$

να βρείτε το $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)-f(x)-2}{\sqrt{f^2(x)+3}-2x}$.

6.72 Αν για τις συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ είναι:

$$\lim_{x\to\alpha}(f(x)+g(x))=8$$

και

$$\lim_{x\to\alpha}(f(x)-g(x))=4$$

να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)$.

6.73 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ με:

$$f(x)\le 0\le g(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Αν $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)-g(x))=0$, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to\alpha}f(x)=\lim_{x\to\alpha}g(x)=0$$

Η κατανόηση της θεωρίας

6.74 Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

α) Ποια πρόταση συνδέει το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 και τα πλευρικά της όρια στο x_0;

β) Πότε ορίζεται το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ και πότε το όριο ταυτίζεται με ένα από τα πλευρικά όρια στο x_0;

γ) Να γράψετε τις ιδιότητες του ορίου.

δ) Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής.

6.75 Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες προτάσεις ή σχέσεις:

α) Αν η f ορίζεται στο $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, τότε:

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell \iff$ .....

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$, τότε $\lim\limits_{\ldots\to\ldots}f(x_0+\ldots)=\ell$.

γ) Αν ..... τα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ και είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε:

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=$ ..... και
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=$ .....

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0$, τότε .....

ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<0$, τότε ..... κοντά στο .....

ε) Αν $f(x)\le g(x)$ ή $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$, τότε .....

.....

6.76 Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

α) Αν $\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=\ell$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$.

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<0$, τότε:

$$f(x)<0 \text{ για κάθε } x\in D_f$$

γ) Ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)$$

με την προϋπόθεση ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$.

δ) Αν $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0, τότε και:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)<\lim_{x\to x_0}g(x)$$

αρκεί να υπάρχουν τα όρια αυτά.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\ell>0$, τότε:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to x_0}f(x)=-\ell$$

στ) Αν $f(x)\le g(x)\le h(x)$ κοντά στο x_0 και:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}h(x)=\ell$$

τότε $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\ell$.

ζ) Αν $D_f=(\alpha,\beta)$, τότε:

$$\lim_{x\to\alpha}f(x)=\lim_{x\to\alpha^+}f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta}f(x)=\lim_{x\to\beta^-}f(x)$$

η) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0 \iff \lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$.

(Θέμα εξετάσεων)

θ) Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$. Τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$, αν και μόνο αν:

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\ell$$

(Θέμα εξετάσεων)

ι) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)}=\sqrt[\nu]{\lim_{x\to x_0}f(x)}$$

εφόσον $f(x)\ge 0$ κοντά στο x_0, με $\nu\in\mathbb{N}$ και $\nu\ge 2$.

(Θέμα εξετάσεων)

ια) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

(Εξετάσεις 2005)

ιβ) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0. ***(Εξετάσεις 2006)***