

Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Βασικά τριγωνομετρικά όρια

7.13 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \eta\mu x$ **β)** $B = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \eta\mu^2 x$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x \to \pi} \sigma\upsilon\nu x$ **δ)** $\Delta = \lim\limits_{x \to -\pi} \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{2}$

7.14 Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x^2 - x}$

β) $B = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu^2 x}{x}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu^2 x}{x^4 - x^2}$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\eta\mu x}{x^2 + x^3}$

ε) $E = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4\eta\mu x + \eta\mu^2 x}{x^2 - x}$

στ) $Z = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{x+1} - 1}$

7.15 Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

β) $B = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x - 1}{x^2}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\eta\mu x}$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\eta\mu x}$

ε) $E = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x + x^2}{x}$

στ) $Z = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\varepsilon\varphi x}$

7.16 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi^2 x}{x}$

β) $B = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x\cdot\varepsilon\varphi x}{x^2}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+\eta\mu x}-3}{\sqrt{x+1}-1}$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\eta\mu^2 x} - \dfrac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}\right)$

ε) $E = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\eta\mu x} - \dfrac{1}{\varepsilon\varphi x}\right)$

στ) $Z = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x + x}{\sqrt{x+1}-1}$

7.17 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3+\eta\mu x}{x+\eta\mu x}$

β) $B = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x+\sigma\upsilon\nu x - 1}{x^2 - 4\eta\mu x}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\sqrt{x^2+4}-2}$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x-\eta\mu x}{x+\eta\mu x}$

ε) $E = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2 - \eta\mu^2 x}{x^2+\eta\mu^2 x}$

στ) $Z = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x - \varepsilon\varphi x}{\eta\mu x + \varepsilon\varphi x}$

7.18 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$

β) $B = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}-1}{\eta\mu x}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}{\sqrt{2\eta\mu^2 x+1}-1}$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}$

ε) $E = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+\sigma\upsilon\nu x}-2}{\sqrt{1+\eta\mu^2 x}-1}$

στ) $Z = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2\eta\mu^2 x}{2x^2+\eta\mu^2 x}$

2. Όρια με αντικατάσταση

7.19 Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 2} g(x) = 1$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 2} f(g(x))$ β) $\lim\limits_{x\to 1} g(f(x))$

7.20 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 4x}{x}$ β) $B = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\eta\mu 3x}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi 3x}{x}$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu\alpha x}{x}$, $\alpha\neq 0$

ε) $E = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}$, $\alpha\neq 0$

στ) $Z = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha x}{x}$, $\alpha\neq 0$

7.21 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi 2x - \varepsilon\varphi x}{x}$

β) $B = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x - \eta\mu 3x}{\sqrt{x+1}-1}$

7.22 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 6x}{\eta\mu 2x}$

β) $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi 10x}{\varepsilon\varphi 5x}$

γ) $\Gamma=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sigma\upsilon\nu 2x-x}{x^2}$

δ) $\Delta=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(x-2)-1}{x^2-5x+6}$

ε) $E=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\eta\mu(x-4)}{\sqrt{x+5}-3}$

στ) $Z=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\pi x)-1}{x-2}$

7.23 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu(\pi x)}{x-2}$

β) $B=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\eta\mu(x-3)}{x^2-9}$

γ) $\Gamma=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\varepsilon\varphi(x-5)}{x^2-25}$

δ) $\Delta=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x^2}{\eta\mu 3x}$

7.24 Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu^2 x+3}{x^2+1}, & \text{αν } x<0\\ 2, & \text{αν } x=0\\ \dfrac{\eta\mu 3x}{x}, & \text{αν } x>0\end{cases}$

β) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu 2x}{x}, & \text{αν } x<0\\ -3, & \text{αν } x=0\\ \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{x^2}, & \text{αν } x>0\end{cases}$

7.25 Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ στις επόμενες περιπτώσεις:

α) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+\eta\mu 4x}{x^2-\eta\mu 2x}, & \text{αν } x<0\\ \alpha-x\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}, & \text{αν } x>0\end{cases}$

β) $f(x)=\begin{cases}\alpha+\dfrac{\varepsilon\varphi 8x-\eta\mu 2x}{\varepsilon\varphi 5x+\eta\mu x}, & \text{αν } x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\\ x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}+2, & \text{αν } x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$

7.26 Έστω $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

α) Να υπολογίσετε το όριο $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^6-x^4}$.

β) Αν $\sqrt[12]{x}=y$, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{u\to 1}\frac{y^3-1}{y^6-y^4}$$

γ) Να υπολογίσετε το όριο $B=\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

7.27 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[6]{x}-1}$

β) $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}$

γ) $\Gamma=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

δ) $\Delta=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5-2x}+\sqrt[3]{5-2x}-2}{\sqrt[6]{5-2x}-1}$

7.28 **α)** Αν $\lim\limits_{x\to 2}f(2x-1)=10$, να βρείτε το:

$$\lim_{x\to 3}f(x)$$

β) Αν $\lim\limits_{x\to -1}f(3x+4)=5$, να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 1}f(x)$$

7.29 Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ με:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=2013$$

α) Αν η f είναι άρτια, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to -x_0}f(x)=2013$$

β) Αν η f είναι περιττή, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to -x_0}f(x)=-2013$$

7.30 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ με:

$$\lim_{x\to 3}f(x)=\ell$$

Αν ισχύει:

$$\lim_{x\to 3}(2f(x)+3f(6-x))=10$$

να βρείτε το ℓ.

7.31 Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x)=f(x+2) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}=3$$

τότε:

α) να αποδείξετε ότι $f(2)=f(4)$,

β) να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-2}{x-4}$.

7.32 Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\alpha x)}{x}$, $\alpha\neq 0$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(2x)+f(3x)}{x}$

ε) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(4x)f(5x)}{x^2}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x}$

ζ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^3(x)}{\eta\mu^3 x}$ **η)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2+\eta\mu x)}{x^2+x}$

7.33 Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$. Να βρείτε το όριο:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{xf(3x)-f(-x)\eta\mu 2x}{3x^2-\eta\mu^2 x}$$

3. Χαρακτηριστικές αντικαταστάσεις

7.34 Αν $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=5$, να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A=\lim\limits_{h\to 0}f(h+3)$ **β)** $B=\lim\limits_{h\to 1}f(3h)$

7.35 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0) \quad \text{και}$$

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \text{για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0)=0$ **β)** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

7.36 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1) \quad \text{και}$$

$$f(xy)=f(x)+f(y) \quad \text{για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1)=0$

β) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, με $x_0\neq 0$

7.37 Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=5$, να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ **β)** $B=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)}{h}$

7.38 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)\sigma\upsilon\nu\beta+f(\beta)\sigma\upsilon\nu\alpha$$

για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=2$, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=2\sigma\upsilon\nu x_0 \quad \text{για κάθε } x_0\in\mathbb{R}$$

7.39 Αν ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=2$$

να υπολογίσετε το όριο:

$$A=\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha-h)}{h}$$

7.40 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\eta\mu x-\eta\mu\alpha}{x-\alpha}$

β) $B=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu\alpha}{x-\alpha}$

γ) $\Gamma=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{x\cdot\eta\mu\alpha-\alpha\cdot\eta\mu x}{x\cdot\eta\mu x-\alpha\cdot\eta\mu\alpha}$

δ) $\Delta=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{x\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha-\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu x}{x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}$

4. Με συμπλήρωση τετραγώνου

7.41 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $(f(x)-1)^2 \le \eta\mu^2 x,\ x\in\mathbb{R}$

β) $f^2(x)+2f(x)+\sigma\upsilon\nu^2 x \le 0,\ x\in\mathbb{R}$

γ) $\eta\mu^2 x - x^2 \le f^2(x) \le \eta\mu^2 x + x^2,\ x\in\mathbb{R}$

δ) $-\eta\mu^2 x \le (f(x)-1)^2 \le 1-\sigma\upsilon\nu^2 x,\ x\in\mathbb{R}$

7.42 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$2f(x)\eta\mu x + x^2 - 2\eta\mu^2 x \le f^2(x) \le x^2 + 2f(x)\eta\mu x$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

7.43 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$x^2 + 2xf(x) \ge f^2(x) + \eta\mu^2 x \ge 2xf(x) + \eta\mu^2 x$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

7.44 Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $2f(x)+\eta\mu x - x \le f^2(x)+1 \le x^2+2f(x),\ x\in\mathbb{R}$

β) $x^2 f(x) \le x^2 - \eta\mu^2 x \le f(x),\ x\in[-1,0)\cup(0,1]$

γ) $\left|f(x) - \eta\mu x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right| \le x^2,\ x\in\mathbb{R}^*$

δ) $(x+\eta\mu x)^2 \le x^2 f(x) \le 2(x^2+\eta\mu^2 x),\ x\in\mathbb{R}^*$

7.45 Για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^2(x)+g^2(x) \le 2f(x)\eta\mu x \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

7.46 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες είναι:

$$f^2(x)+g^2(x)+\eta\mu^2 x = x^2 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = 0$$

5. Θεωρητικές ασκήσεις

7.47 Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+3x^2-\eta\mu x) = 2$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x\cdot\eta\mu x} = 3$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\sigma\upsilon\nu x}{x^2+x} = 4$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\eta\mu x}{x^4+x} = 6$

7.48 Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ όταν:

α) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-x^2+\eta\mu x+1) = 3$

β) $f^2(x)+2f(x)+\sigma\upsilon\nu^2 x \le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

γ) $(1-\sigma\upsilon\nu x)^2 \le f(x)-2 \le x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

δ) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ell\in\mathbb{R}$ και $f^3(x)\eta\mu x \le x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

7.49 Αν:

$$\lim_{x\to 0}(xf(x)) = 10,\ \lim_{x\to 0}(g(x)\eta\mu x) = 2 \text{ και } g(x)\ne 0 \text{ κοντά στο } 0$$

να βρείτε το όριο $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

7.50 Αν ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x\eta\mu x} = 3 \text{ και } \lim_{x\to 0}[(\sqrt{x^2+1}-1)g(x)] = 5$$

να βρείτε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to 0}[f(x)g(x)]$

β) $B = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)-x^4 g(x)}{f(x)+\eta\mu^2 x}$

7.51 Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι:

$$|f(x)\eta\mu x - 3x| \le x^2 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

β) $B = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x + \eta\mu 2x}{xf(x) + \eta\mu x}$

7.52 Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \quad \text{και}$$

$$f(x)\eta\mu 2x \le x^3 \eta\mu \frac{1}{x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

να βρείτε:

α) το ℓ,

β) το όριο $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xf^3(x) + \eta\mu 2x}{\eta\mu x + x^2}$.

7.53 Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $\Delta = (-1, 1)$, η οποία για κάθε $x \in \Delta$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$|x| - x^2 \le f(x) \le x^2 + |x|$$

Να βρείτε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 f(x) - \eta\mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}$

β) $B = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\eta\mu x}$

7.54 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x^3}{x^2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x} + 3, & \text{αν } x < 0 \\ \dfrac{|x^4 - 3x - 2| - 2}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

β) $B = \lim\limits_{x\to 0} [f(x) - 2f(-x)]$