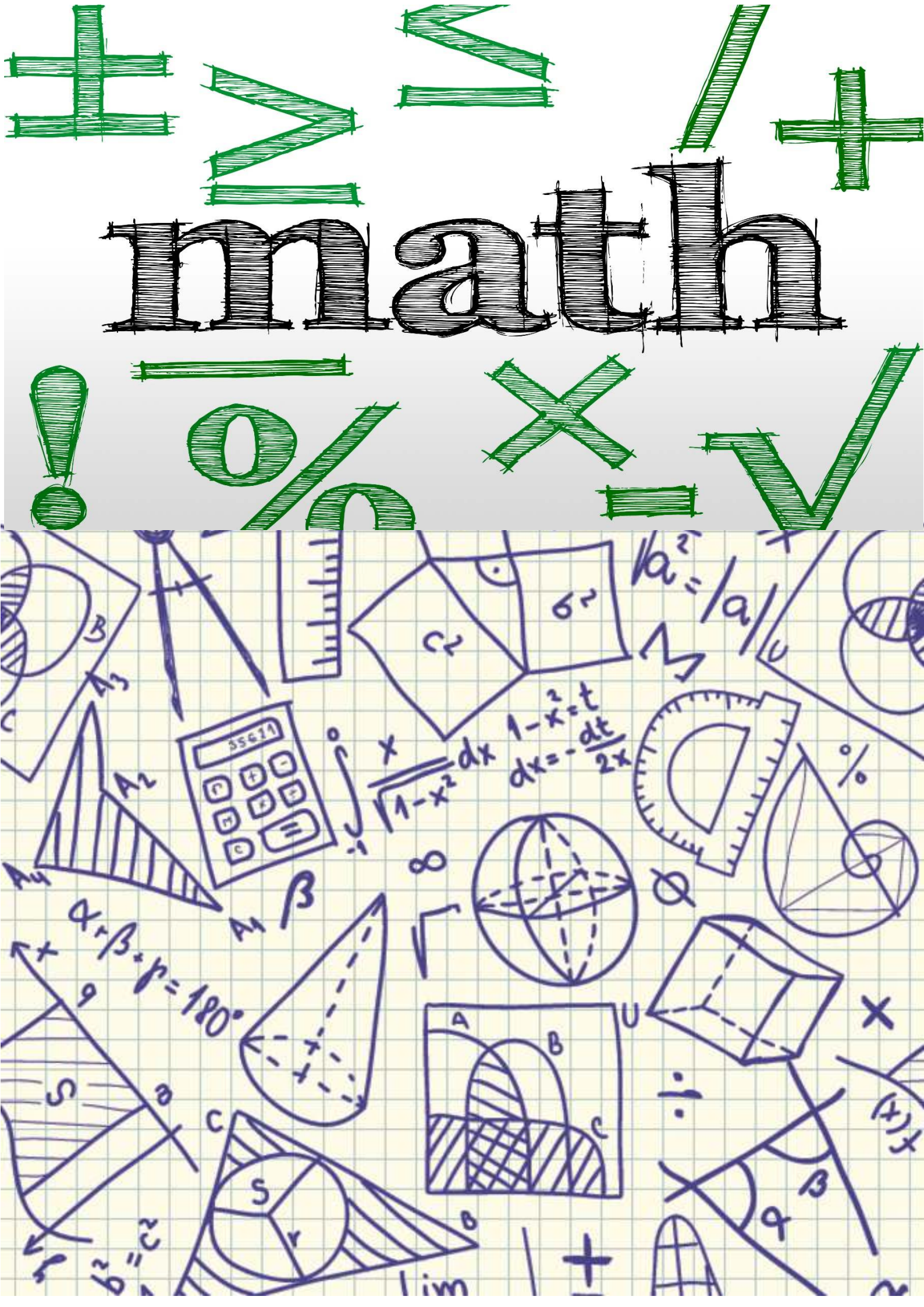
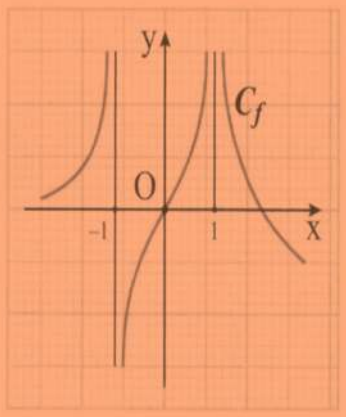

math

Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Υπολογισμός ορίου (μορφή $\frac{\alpha}{0}$, $\alpha \neq 0$)

8.10 Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

β) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

8.11 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{x^2}$

β) $B = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-3}{x^4}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to 1} \frac{4}{(x-1)^2}$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+1}{(x-2)^2}$

ε) $E = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{x^3}$

στ) $Z = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-2}{x^5}$

8.12 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{|x|}$

β) $B = \lim\limits_{x\to 3} \frac{2-x}{|x-3|}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x^2-2x+1}$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to 2} \frac{3x-7}{x^2-4x+4}$

ε) $E = \lim\limits_{x\to 1} \frac{3x+1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$

στ) $Z = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x-5}{\sqrt{x^2-6x+9}}$

8.13 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα επόμενα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^4}$

β) $B = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-1}{x^{2006}}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to 1} \frac{5x}{(x-1)^{2004}}$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to -2} \frac{-7}{(x+2)^{2004}}$

ε) $E = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-3}{x^2-4x+4}$

στ) $\Sigma T = \lim\limits_{x\to 3} \frac{1-|x|}{|x-3|}$

8.14 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{|x|}\right)$

β) $B = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{|x|}\right)$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)$

ε) $E = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

στ) $Z = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x}\right)$

8.15 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x+1}{2-x}$

β) $B = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x+2}{x^2-9}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^3+3x^2+3x+1}$

ε) $E = \lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^2-1}\right)$

στ) $\Sigma T = \lim\limits_{x\to 0} \left[(x+1)^5 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right]$

8.16 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$

β) $B=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)$

γ) $\Gamma=\lim\limits_{x\to 2}\left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x-2}\right)^2\right]$

δ) $\Delta=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{1}{x-1}\right)$

8.17 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-3}{x^3-x^2-x+1}$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x+1}{1-\sigma\upsilon\nu^3 x}$

γ) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{x-5}{x-6\sqrt{x}+9}$

δ) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3}{2^{3x-1}+2^{x-3}-2^{2x-1}}$

ε) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{(\sqrt{x}-2)^3}$

στ) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+|x|}{|x+1|-2}$

8.18 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{(x-1)^5}$

β) $B=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+15}-4}{(x-1)^4}$

γ) $\Gamma=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x\cdot\eta\mu x}$

δ) $\Delta=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1}}{x-1}$

ε) $E=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-\ln x}{(e^{x-1}-1)(1-x)}$

στ) $Z=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x+x+1}{\eta\mu x+1-\sigma\upsilon\nu^2 x}$

8.19 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2x+\sigma\upsilon\nu x}{x-\eta\mu x}$

β) $B=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2-\sigma\upsilon\nu 2x}{x-\eta\mu x}$

γ) $\Gamma=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+2\sigma\upsilon\nu x}{x+\eta\mu x}$

δ) $\Delta=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sigma\upsilon\nu x}{x+\eta\mu x}$

2. Όρια με παράμετρο

8.20 Να υπολογίσετε, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ, τα παρακάτω όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\lambda}{(x-1)^2}$

β) $B=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\lambda x+1}{x-1}$

γ) $\Gamma=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(3\lambda-1)x^2-3x+\lambda^2}{x^2-2x+1}$

δ) $\Delta=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-\lambda^2 x}{\sqrt{x^2-4x+4}}$

β) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ με $f(x)=\frac{2\lambda x^2+\lambda^2 x-3}{x+\sqrt{x}-x\sqrt{x}-1}$

γ) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ με $f(x)=\frac{3x^2-\lambda^2 x-4}{|x-2|}$

δ) $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$ με $f(x)=\frac{\lambda^2 x-4\lambda-8}{x-4\sqrt{x}+4}$

ε) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ με $f(x)=\frac{3x^2+2\lambda x-\lambda^2}{|x-1|}$

στ) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ με $f(x)=\frac{(\lambda^2+2)x^2-2(\lambda+\mu)+\mu^2}{(x-1)^2}$

8.21 Για τις διάφορες τιμές των πραγματικών παραμέτρων λ, μ να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ με $f(x)=\frac{x^2-\lambda^2 x+8}{x^2-2x+1}$

8.22 Να βρείτε τα επόμενα όρια για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$:

α) $A=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\lambda x^2-x}{\lambda^2-\lambda x}$, $\lambda\neq 0$

β) $B = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\lambda^2 x+3}{2x-\lambda}$

8.23 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, όταν:

α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x^2+\alpha x+4}=+\infty$

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\alpha x^2+(\beta+2)x+4}{x^2-2x+1}\in\mathbb{R}$

8.24 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{\alpha x^2+\beta x+2}$$

Να βρείτε τα $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$$

3. Θεωρητικές ασκήσεις

8.25 Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

α) Αν $\lim\limits_{x\to 0}[x^2 f(x)]=13$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

β) Αν $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)-1}{f(x)}=+\infty$, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 5} f(x)=0$$

8.26 Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$, να βρείτε το όριο:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\eta\mu x}{x^2+x}$$

8.27 Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, όταν:

α) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x+3}=+\infty$ και $x_0=5$

β) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x-2}{f(x)}=+\infty$ και $x_0=1$

γ) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)(x^2-2x-1)]=+\infty$ και $x_0=2$

δ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)\eta\mu^2\pi x}{x+1}=+\infty$ και $x_0=1$

ε) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)+5}{f(x)-5}=-\infty$ και $x_0=2$

8.28 Αν για τις συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)(x^2-1)}{x-2}=-\infty \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{g(x)(x-1)}=+\infty$$

να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

8.29 Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$f(x)f(y)=yf(x)+xf(y)-xy$ για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

8.30 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$3f(x+1)-2f(2-x)=x^2+14x-5$$

Να βρείτε το όριο $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{f(x)}$.

8.31 Αν $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} g(x)=+\infty$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+g(x)}{f^2(x)+g^2(x)}=0$.

Η κατανόηση της θεωρίας

8.32 Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες προτάσεις ή σχέσεις:

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε ..... , κοντά στο ..... , ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε ....

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\ldots$

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=$ ..... , ενώ αν $f(x)<0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=$ .....

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x)) = \ldots\ldots$

ε) Ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu}} = \ldots\ldots, \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{2\nu+1}} = \ldots\ldots \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu+1}} = \ldots\ldots$$

όπου $\nu\in\mathbb{N}^*$.

στ) Οι απροσδιόριστες μορφές που προκύπτουν από άθροισμα, διαφορά, γινόμενο και πηλίκο συναρτήσεων είναι οι εξής:

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$,

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots$, $\ldots\ldots\ldots$, $\ldots\ldots\ldots$

8.33 Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0$.

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = -\infty$$

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε:

$f(x) < 0$ κοντά στο x_0

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = +\infty$, τότε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell > 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, τότε:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = -\infty$$

στ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, τότε το $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ δεν υπάρχει.

ζ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε το $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))$ δεν υπάρχει.

η) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = +\infty$. ***(Εξετάσεις 2005)***