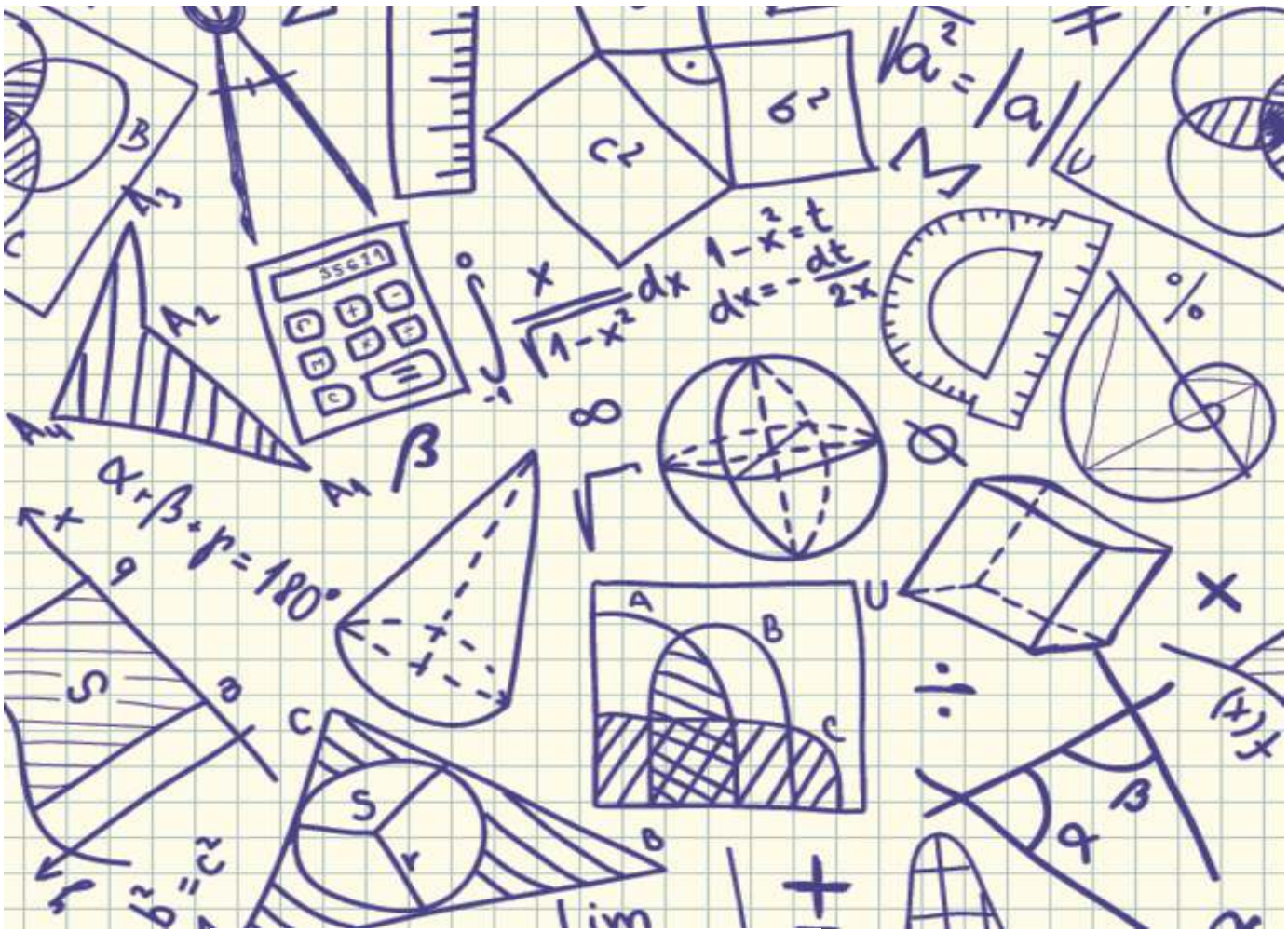


Προτεινόμενες ασκήσεις

1. Όριο πολυωνυμικής - ρητής συνάρτησης

9.15 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3$

β) $B = \lim\limits_{x \to -\infty} x^5$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x \to -\infty} x^8$

ε) $E = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^7$

στ) $Z = \lim\limits_{x \to -\infty} (-4x^9)$

ζ) $H = \lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^4)$

η) $\Theta = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{3x^2}$

θ) $I = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-4}{5x^3}$

9.16 Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 2x^2 + x + 1)$

β) $B = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x^3 + x^2 - 3x + 2)$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^5 + 3x^2 - 5x + 10)$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4 + x^2 + 2)$

ε) $E = \lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^6 + x^5 - x + 1)$

στ) $Z = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^5 + 4x^3 + 8x + 2)$

9.17 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x + 5}$

β) $B = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^5 - 3x^2 + x - 3}{x^6 + x^4 + x^2 + 1}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{-2x^3 + x - 1}$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x^6 + x^5 + 3x + 2}{x^4 - 5x + 6}$

ε) $E = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{x^2 + 1} + \dfrac{2x + 1}{x^3 + 1} \right)$

στ) $\Sigma T = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} - x + 1 \right)$

2. Όριο άρρητων συναρτήσεων

9.18 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+5}$

β) $B = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^4+3x^2+1}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x}$

ε) $E = \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+5x+7}+x)$

στ) $Z = \lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+3}-x)$

ζ) $H = \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+1})$

η) $\Theta = \lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x+2}+x)$

9.19 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+3x+5}+x+5)$

β) $B = \lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-x+7)$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+2x+7}-x+2)$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+6x+10}-\sqrt{x^2+2x+3})$

9.20 Να βρείτε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3x+7}+x+1}{x+2}$

β) $B = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3x+7}+\sqrt{x^2+x+7}}{x+3}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}}$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-3x+2}{\sqrt{x^2+5x+7}-2x+3}$

9.21 Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+5x}{\sqrt{x^2+2x+3}+2x}$

β) $B = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{4x+2}+\sqrt{x+1}}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+x-\sqrt{x^2+x+5}}{x^2+2x+\sqrt{x^2+3x+4}}$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+2x+1}-x+3}{x^2+x+2}$

9.22 Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $x^2+2x-2 \le f(x) \le 3x^2-2x$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) $\sqrt{x^2+1}-x \le f(x) \le \sqrt{4x^2+1}-2x$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$

9.23 Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$1+\sqrt{x^2+2x+3} \ge f(x)+x \ge \sqrt{x^2+4x+6}$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+4x+6}-x)$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x+\sqrt{x^2+2x+3})$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

9.24 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$2x-1 \le f(x)(\sqrt{4x^2-3x+1}-2x) \le 2x+1$$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$\sqrt{4x^2-3x+1} < 2x \text{ για κάθε } x > \alpha$$

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$A = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{4x^2-3x+1}-2x}$$

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

3. Όρια με απόλυτα

9.25 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|2x^3-5x^2|+3x-2}{x^2+3x-2}$

β) $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|4x^3-2x|+1}{3x+2}$

γ) $\Gamma=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|2x^2-x|+3x-5}{x^2-|5-7x|}$

δ) $\Delta=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^3-5x^2+1|-|5-x|}{|x^4-3x|+7}$

9.26 Δίνονται οι επόμενες συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{|x-1|+|x-2|}{x-3}$$

$$g(x)=\frac{\big||-x^2|+|x^2-9|+|x^2+5x+3|\big|}{x^2+2x+5}$$

και

$$h(x)=\frac{|x^3+1|+|x^3-2|+x+1}{|2x^3+5|+x^2+x+2}$$

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ **β)** $B=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

γ) $\Gamma=\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ **δ)** $\Delta=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

ε) $E=\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$ **στ)** $\Sigma T=\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)$

4. Όρια και παράμετροι

9.27 Να υπολογίσετε τα όρια για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α, β, θ:

α) $A=\lim\limits_{x\to+\infty}[(\alpha-1)x^3+x^2+1]$

β) $B=\lim\limits_{x\to-\infty}[(\alpha^2-4)x^4+\beta x^3+x+2]$

γ) $\Gamma=\lim\limits_{x\to-\infty}[(2-\sigma\upsilon\nu\alpha)x^3+x^2-2x+3]$

δ) $\Delta=\lim\limits_{x\to+\infty}[(|\eta\mu\theta|-|\theta|)x^2+5x+6]$

ε) $E=\lim\limits_{x\to-\infty}[(\alpha^2-9)x^3+(\alpha-3)x^2+$
$+(\alpha+3)x-5]$

στ) $Z=\lim\limits_{x\to+\infty}[(\alpha^2-1)x^3+(\beta-2)x^2+$
$+4x+6]$

9.28 Για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha+1)x^3+x+3}{(\alpha-2)x^2+x+1}$

β) $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\alpha-2)x^2+x-3}{(\alpha+2)x^3+\alpha x^2+x+5}$

γ) $\Gamma=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{x+3}-\alpha x+2\right)$

δ) $\Delta=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\alpha x^3-3x^2+1}{\alpha x^2-x+1}-\alpha x\right)$

9.29 Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ να βρείτε το όριο στο $+\infty$ των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{(\lambda^2-3\lambda)x^3+(\lambda+3)x^2+2x+3}{\lambda x^2+4}$

β) $g(x)=\dfrac{(\lambda^2-\lambda-2)x^3-(\lambda-1)x^2+2x+3}{(\lambda-1)x^2+\lambda x+1}$

9.30 Για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+7}-\alpha x)$

β) $B=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\alpha x)$

γ) $\Gamma=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{4x^2+x+1}-\alpha x)$

δ) $\Delta=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+6x+7}+$
$+\sqrt{x^2-2x+2}+\alpha x)$

9.31 Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ τα όρια:

α) $A=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4x+5}+\alpha x-3)$

β) $B=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-2x+3}+\alpha x+2)$

γ) $\Gamma=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+5}{x+1}-\alpha x+4\right)$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{|x^3-x|+x^2}{x^2+|x|+2}+\alpha x+2\right)$

9.32 Για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$ να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, όπου:

$$f(x)=\frac{\alpha x^2-1}{x-\beta}-x+1$$

β) $B = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, όπου:

$g(x)=\sqrt{\alpha^2x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}-\beta x,\ \alpha>0$

9.33 Να βρείτε τους $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, ώστε:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+4}-\alpha x+\beta)=7$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+\alpha x^2+\beta x+3}{x^2+1}+\alpha x-\beta\right)=3$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha x^2+1}{x-1}-\frac{\beta x^2-1}{x+1}\right)=2$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{\alpha x^2+x+1}-\sqrt{\beta x^2+1})=\frac{1}{4}$

με $\alpha, \beta>0$

9.34 Δίνεται η συνάρτηση:

$f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{4x^2+4x+5}+\alpha x+\beta$

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, ώστε:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=6$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=7$

5. Όρια με τριγωνομετρικούς όρους

9.35 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}$

β) $B = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x^2}\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)$

ε) $E = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x^2+\eta\mu x)\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right]$

στ) $\Sigma T = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+\sigma\upsilon\nu x)\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right]$

9.36 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\eta\mu^2x}{x^4+1}$

β) $B = \lim\limits_{x\to+\infty}[(\sqrt{x^2+1}-x)\cdot\eta\mu 3x]$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to+\infty}(3x+\sigma\upsilon\nu x)$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^5+4x+1}{x^6+2x-5}\cdot\eta\mu 4x\right)$

ε) $E = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2x+1}{x^2+5}\right)$

στ) $\Sigma T = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2}{x^2+1}\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)$

9.37 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-\sqrt{x^2+\eta\mu^2x}}{x^2+\sqrt{x^2+\sigma\upsilon\nu^2x}}$

β) $B = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^3-2x^2\eta\mu\frac{1}{x}+2}{x^3+x^2\eta\mu\frac{2}{x}+3}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\eta\mu x-\sqrt{x^6+2}}{x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{x^6+1}}$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[(\sqrt{9+x^2}-3)\cdot\eta\mu\frac{3}{x}\right]$

9.38 Να βρείτε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{2+\eta\mu x}$

β) $B = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4-x^2}{4+\sigma\upsilon\nu x}$

9.39 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x+\eta\mu x}{2x-\sigma\upsilon\nu x}$

β) $B = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x+2}{3+\eta\mu x}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}-x\right)$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}-x\right)$

9.40 **α)** Να υπολογίσετε το όριο:

$$A = \lim_{x\to-\infty}(x + \sigma\upsilon\nu x)$$

β) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) \le x + \sigma\upsilon\nu x,\ x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

9.41 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $f(x) \ge x^2 + \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

β) Αν $f(x) \le x^2 - x^2 + \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

6. Όρια με πολλά ριζικά

9.42 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{4x^2 + 4x + 5} - 3x + 4)$

β) $B = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{4x^2 + 4x + 3} - \sqrt{9x^2 - 6x + 5})$

9.43 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5} + \sqrt{4x^2 + 8x + 5} - 3x + 2$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{9x^2 + 6x + 3} - 2x + 1$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **β)** $B = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ **δ)** $\Delta = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

9.44 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 - 2x + 4} + 4x \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + 1$$

Να βρείτε τις τιμές του $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έτσι, ώστε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ να είναι πεπερασμένο.

7. Όριο εκθετικών συναρτήσεων

9.45 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^x + 2)$

β) $B = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x+1} - 1)$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-x} + 3)$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to+\infty}(4 - e^{-x})$

9.46 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty} 3^x$ **β)** $B = \lim\limits_{x\to-\infty} 5^x$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x$ **δ)** $\Delta = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x$

ε) $E = \lim\limits_{x\to+\infty} 3^{-x}$ **στ)** $Z = \lim\limits_{x\to-\infty} 4^{-x}$

9.47 Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5^x}{3^x}$ **β)** $B = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7^x}{9^x}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3^{2x}}{2^{2x}}$ **δ)** $\Delta = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4^{3x}}{5^{3x}}$

ε) $E = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^{x+2}}{4^{x-3}}$ **στ)** $Z = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5^{x-1}}{3^{x+2}}$

9.48 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}}$ **β)** $B = \lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{1}{x^2}}$ **δ)** $\Delta = \lim\limits_{x\to0} e^{-\frac{1}{x^2}}$

ε) $E = \lim\limits_{x\to1} e^{\frac{1}{x-1}}$ **στ)** $Z = \lim\limits_{x\to2} e^{-\frac{1}{|x-2|}}$

9.49 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = 3^x + 4^x - 6 \quad \text{και} \quad g(x) = 3^x - 4^x + 2$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **β)** $B = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ **δ)** $\Delta = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$

9.50 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{2^x + 3^x - 4}{3^x + 5^x + 2}$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty}(2^x + 3^x - 4)$

β) $B = \lim\limits_{x\to-\infty}(3^x + 5^x + 2)$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

9.51 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{2^x + 3^x + 4}{2^x - 3^x + 1}$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **β)** $B = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

9.52 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2^x + 4}{3^x + 2}$

β) $B = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x}{2^x + 3}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x + 3^x}{3^x + 5^x}$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4^x + 3^x}{5^x + 7^x}$

ε) $E = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4^x + 3^x}{5^x + 7^x}$

στ) $Z = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3^{x+3} + 2^x}{3^x - 2^x}$

9.53 Να βρείτε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x + 3^x + 5}{3^x + 2^{x+1} + 2}$

β) $B = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x+2} + e^x - 2}{e^x + e^{x+1} + 1}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7^x + 3^x + 1}{8^x + 5^x + 1}$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^{x+1} + 3^{x+2} + 5}{2^x + 3^{x+1} + 1}$

9.54 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x + 3^x}{3^x + 1}$

β) $B = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3^x + 4^x}{4^x + 2}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 e^x}$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3^x + 4^x}{x^2 + x + 1}$

9.55 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha^{x+1} + 2^{x+2}}{\alpha^{x+2} + 2^{x+1}}$, $\alpha > 0$

β) $B = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{x+1} - \lambda^x}{e^x + \lambda^{x+1}}$, $\lambda > 0$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\lambda^x - 3^{x+1}}{\lambda^{x+1} + 3^x}$, $\lambda > 0$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\alpha^{x+1} - \alpha^{-x}}{\alpha^x + \alpha^{-x}}$, $\alpha > 0$

8. Όριο λογαριθμικών συναρτήσεων

9.56 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x + \log x)$

β) $B = \lim\limits_{x\to0^+}(\ln x + \log x)$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x + 3}$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{e^x + \ln x}$

9.57 Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2 + 3)$

β) $B = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^{-x} + 1)$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(x^2 + 4) - \ln(x^2 + 3)]$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(2^{-x} + 3^{-x} + 2)$

9.58 Να βρείτε τα επόμενα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(1 + 2^x) - \ln(1 + 3^x))$

β) $B = \lim\limits_{x\to+\infty}(x - \ln(1 + e^x))$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

δ) $\Delta = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x^2\eta\mu\frac{\pi}{x}}{x+1}}$

9.59 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4\ln^2 x + 3\ln x + 2}{2\ln^2 x + \ln x - 1}$

β) $B = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{10\ln^4 x + 5\ln^2 x + 2}{2\ln x + 3}$

9.60 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3^x + 5^x}{e^x}$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x + \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} [\ln(3^x + 5^x) - x]$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty} [\ln(x + \sigma\upsilon\nu x) - 2\ln x]$

9. Θεωρητικές ασκήσεις

9.61 Αν είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} [(x^4 + x^2 + 1) f(x)] = 2007$$

να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

9.62 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xf(x) + 2x - 3}{x + 5} = 7$$

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

9.63 Οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x + \sqrt{x}} = 2 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} [(2x - \sqrt{x}) g(x)] = 5$$

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)g(x)]$.

9.64 Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $(0, +\infty)$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$|(2 + x^4) f(x) - 3x^4| \le x^2 + 1$$

να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(xf(x)\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 3$

9.65 Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 4} \le f(x) \le \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1}, \quad x > 0$$

Να βρείτε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

β) $B = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)\eta\mu\frac{1}{x}\right]$

9.66 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln\frac{\alpha^{2x} + e^{2x}}{e^x} - x, \quad \alpha > 0$$

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

9.67 Να βρείτε το πολυώνυμο P(x), αν ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1} = 3 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1} = 3$$

9.68 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) + g(x)] = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x)g(x)] = 0$$

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

9.69 Δίνεται συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(xy) = f(x)f(y) - \sqrt{xy}\cdot(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

για κάθε $x, y \ge 0$

Να βρείτε:

α) τον τύπο της f,

β) το όριο $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

9.70 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ με $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f^6(x) + g^6(x)}{f^2(x) + g^2(x)} = 0$$

Θέματα για τις εξετάσεις

Τα επόμενα θέματα μπορούν να αξιοποιηθούν για τη γενική επανάληψη της ενότητας ή για την προετοιμασία του σχετικού επαναληπτικού διαγωνίσματος.

Θ9.1 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4} + \alpha x$$

α) Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, αν $\alpha = 2$.

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, αν $\alpha = 3$.

γ) Να βρείτε την τιμή του α, ώστε $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ καθώς και την τιμή του ορίου.

Θ9.2 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{x^2 + 4x + 5} - 2x$$

α) Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$B = \lim_{x \to +\infty} (f(x) + 2x)$$

Θ9.3 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x - e^{-x} + \eta\mu x$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

β) Να βρείτε το $A = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

γ) Να βρείτε το $B = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Θ9.4 Δίνονται συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = e^x + x \text{ και } g(x) = f(x)\,\eta\mu\frac{1}{f(x)},\ x > 0$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **β)** $B = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

γ) $\Gamma = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f(x)}$ **δ)** $\Delta = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

Θ9.5 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln x + \frac{x-1}{x},\ x > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\ln(\ln x) + \frac{\ln x - 1}{\ln x} = 1 - \ln x + \frac{e - x}{e}$$

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2ο κριτήριο αξιολόγησης

Θέμα Α

Α1. α) Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $|\eta\mu x|$ και $|x|$. Πότε ισχύει η ισότητα;

γ) Να διατυπώσετε πρόταση που αφορά την ύπαρξη του $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και τα πλευρικά όρια της f στο x_0.

Α2. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις.

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \ldots$

β) Αν $\alpha > 1$, τότε $\lim\limits_{x\to -\infty} \alpha^x = \ldots$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} \alpha^x = \ldots$

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = \ldots$ και $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \ldots$

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x)$ ..... , ... στο x_0.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, τότε $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) = \ldots$

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

α) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|$.

β) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\big[f(x)g(x)\big] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\big[f(x) + g(x)\big]$, τότε υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$ και $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = \ell$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = \ell$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

στ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $-\infty$.

ζ) Αν $0 < \alpha \neq 1$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} \alpha^x = +\infty$, τότε $\alpha > 1$.

η) Αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με:

$$f(x) = \frac{\alpha x^2 - (\beta + 3)x + 2\alpha + \beta}{x^2 - 4x + 3} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - \alpha x + \beta$$

Β1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f, g.

Β2. Να βρείτε τις τιμές των α και β έτσι, ώστε:

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ **β)** $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 5$

Θέμα Γ

Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f^3(x) + 3f^2(x)f(-x) = -2x^3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι περιττή,

β) $f(x) = x$.

Γ2. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $A = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-2}{(f(x)-1)^2}$

β) $B = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sigma\upsilon\nu 2x}{f^2(x)}$

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(x)f(-x) = f^2(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)f(-x) = f^2(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = +\infty$.

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2f(x)+1}{\sqrt{f^2(x)+1}+f(x)}$.