14 1η συστηματική επανάληψη

1. Θεωρία - Βασικές ασκήσεις

Στην ενότητα αυτή παραθέτουμε αρχικά όλη τη θεωρία σε μορφή ερωτήσεων – απαντήσεων. Περιέχονται οι ορισμοί, τα θεωρήματα και οι αποδείξεις τους, όπου αυτό απαιτείται, καθώς και προτάσεις ή τύποι που μπορούν να ζητηθούν στις εξετάσεις με τη μορφή Σωστού – Λάθους.

Όλες οι απαντήσεις έχουν ληφθεί αυτούσιες από το σχολικό βιβλίο, ώστε ο μαθητής να αισθάνεται σίγουρος για την ορθότητά τους. Στο τέλος της θεωρίας κάθε ευρείας υποενότητας ακολουθεί μια πρόταση μελέτης με επιλεγμένες ασκήσεις από τις αντίστοιχες ενότητες των βιβλίων Γ1 και Γ2. Με τη μελέτη των ασκήσεων αυτών ο μαθητής θα επαναφέρει στη μνήμη του τις βασικές τεχνικές και δεξιότητες που είναι απαραίτητες, ώστε να εισέλθει ομαλά στην αντιμετώπιση των γενικών θεμάτων που αναφέρονται σε όλη την ύλη.

Το μέρος της θεωρίας και της πρότασης μελέτης μπορεί να χρησιμοποιείται και σε όλη τη διάρκεια του έτους, και πιο συγκεκριμένα κάθε φορά που ο μαθητής ολοκληρώνει ένα κεφάλαιο ή θέλει να συμμετάσχει σε κάποιο ανακεφαλαιωτικό διαγώνισμα. Στο τέλος της ενότητας αυτής δίνονται τα θέματα των Πανελληνίων Εξετάσεων προηγούμενων ετών, προσαρμοσμένα στην τρέχουσα εξεταστέα ύλη. Η λύση και η μελέτη των θεμάτων αυτών είναι κάτι παραπάνω από αναγκαία και για τον λόγο αυτό όλα τα ερωτήματα συνοδεύονται από εκτενείς υποδείξεις ή λύσεις.

Α. Γενικό μέρος των συναρτήσεων

1. Τι λέμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Σύνολο τιμών της f λέμε το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$. Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$$

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f στο Α συμβολίζεται με $f(A)$.

2. Τι λέμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γραφική παράσταση της f λέμε το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων:

$$M(x, f(x)) \text{ με } x \in A$$

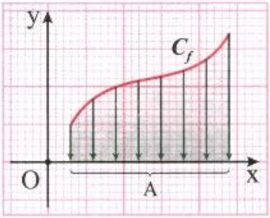
Σχόλια

α) Η γραφική παράσταση της f συμβολίζεται συνήθως με C_f.

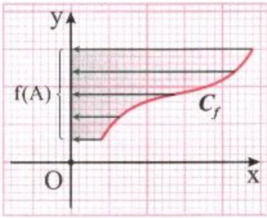
β) Η εξίσωση $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f. Επομένως η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.

γ) Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τότε:

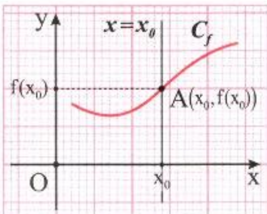
♦ Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο Α των τετμημένων των σημείων της C_f.



♦ Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο f(A) των τεταγμένων των σημείων της C_f.

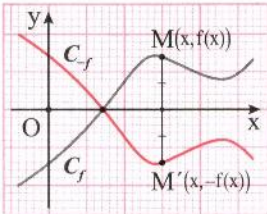


♦ Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f.

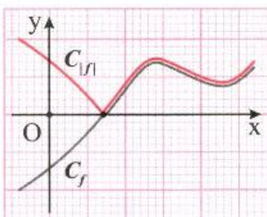


δ) Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f$ και $|f|$.

♦ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f, ως προς τον άξονα x΄x, γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$ ως προς τον άξονα x΄x.



♦ Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x΄x, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.



3. **Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων:**

α) $f(x) = \alpha x + \beta$

β) $f(x) = \alpha x^2,\ \alpha \neq 0$

γ) $f(x) = \alpha x^3,\ \alpha \neq 0$

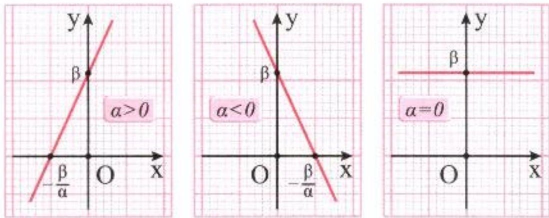
δ) $f(x) = \dfrac{\alpha}{x},\ \alpha \neq 0$

ε) $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = \sqrt{|x|}$

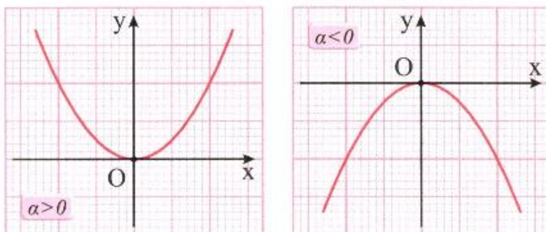
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων φαίνονται στη συνέχεια.

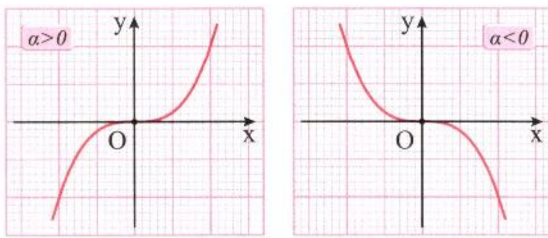
α) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$.



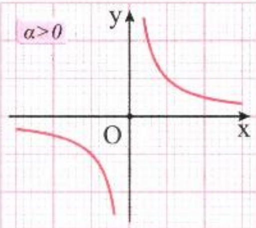
β) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2,\ \alpha \neq 0$.

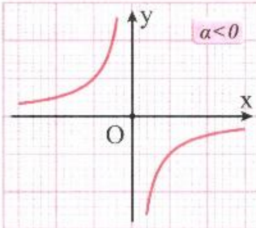


γ) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3,\ \alpha \neq 0$.

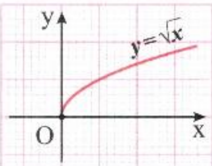


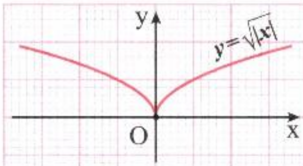
δ) Η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$.





ε) Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{|x|}$.





4. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \eta\mu x$, $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $f(x) = \varepsilon\varphi x$

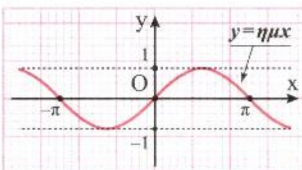
β) $f(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$

γ) $f(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$

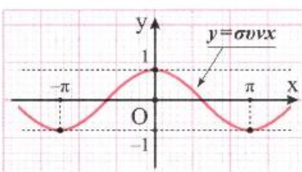
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Οι τριγωνικές συναρτήσεις:

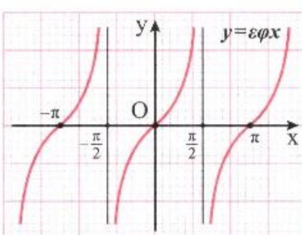
- $f(x) = \eta\mu x$



- $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

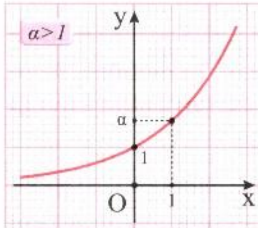


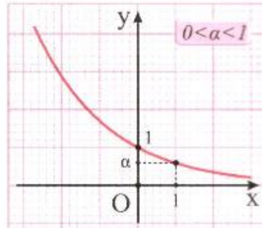
- $f(x) = \varepsilon\varphi x$



Υπενθυμίζουμε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδικές με περίοδο $T = 2\pi$, ενώ η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.

β) Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$.





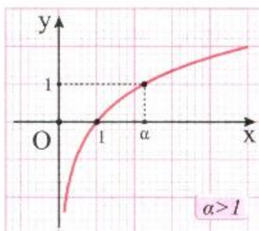
Ιδιότητες

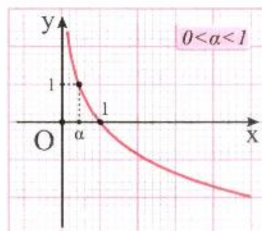
Υπενθυμίζουμε ότι:

- Αν $\alpha > 1$, τότε $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \iff x_1 < x_2$.
- Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \iff x_1 > x_2$.

γ) Η λογαριθμική συνάρτηση:

$$f(x) = \log_\alpha x,\ 0 < \alpha \neq 1$$





Ιδιότητες

Υπενθυμίζουμε ότι:

1. $\log_\alpha x = y \iff \alpha^y = x$
2. $\log_\alpha \alpha^x = x$ και $\alpha^{\log_\alpha x} = x$
3. $\log_\alpha \alpha = 1$ και $\log_\alpha 1 = 0$
4. $\log_\alpha(x_1 x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$
5. $\log_\alpha\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$
6. $\log_\alpha x^\kappa = \kappa \log_\alpha x$
7. Αν $\alpha > 1$, τότε:
$$\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \iff x_1 < x_2$$
ενώ αν $0 < \alpha < 1$, τότε:
$$\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \iff x_1 > x_2$$
8. $\alpha^x = e^{x\ln\alpha}$, αφού $\alpha = e^{\ln\alpha}$

5. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Απαντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

6. Πώς ορίζουμε το άθροισμα, τη διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο δύο συναρτήσεων f και g;

Απαντηση

Ορίζουμε ως άθροισμα $f+g$, διαφορά $f-g$, γινόμενο $f \cdot g$ και πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f και g τις συναρτήσεις με τύπους:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x),$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και $f \cdot g$ είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο:

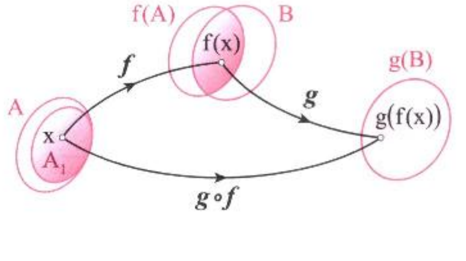
$$\{x \mid x \in A \text{ και } x \in B, \text{ με } g(x) \neq 0\}$$

7. Τι λέμε σύνθεση της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g;

Απαντηση

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$



Σχόλια

α) Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο:

$$A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$$

Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

β)
- Γενικά αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.
- Αν f, g και h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει:

  $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

  Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $h \circ g \circ f$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

8. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ;

Απαντηση

- Η συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

  $$f(x_1) < f(x_2)$$

- Η συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

  $$f(x_1) > f(x_2)$$

9. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο και πότε ολικό ελάχιστο;

Απαντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν:

  $$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

10. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται "1−1";

Απαντηση

Μια συνάρτηση $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση "1−1", όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Σχόλια

α) Μια συνάρτηση $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση "1−1", αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } f(x_1) = f(x_2), \text{ τότε } x_1 = x_2$$

Είναι φανερό από τον ορισμό της συνάρτησης ότι ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2$$

β) Από τον ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι "1−1," αν και μόνο αν:

- Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.
- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.
- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι και "1−1".

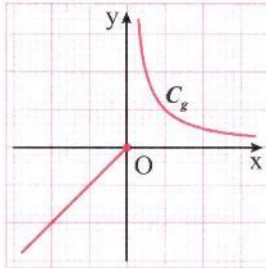
Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Υπάρχουν δηλαδή συναρτήσεις που είναι "1−1" αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

είναι "1−1", αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.



11. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A αντιστρέφεται και πώς;

Απαντηση

Μια συνάρτηση $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέφεται, αν και μόνο αν είναι "1−1". Η αντίστροφη συνάρτηση της f, που συμβολίζεται με f^{-1}, ορίζεται από τη σχέση:

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$$

Σχόλια

α) Ισχύει ότι:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \; x \in A, \text{ και}$$
$$f(f^{-1}(y)) = y, \; y \in f(A)$$

β) Η αντίστροφη της f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f.

γ) Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες:

$$x\widehat{O}y \text{ και } x'\widehat{O}y'$$

Β. Όρια συναρτήσεων

12. Ποια πρόταση συνδέει το όριο της f στο x_0 και τα πλευρικά όρια της f στο x_0;

Απαντηση

Ισχύει ότι:

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$$

Παρατηρήσεις στο όριο

α) Ισχύει ότι:

i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)-\ell\big) = 0$

ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = \ell$

β) Τους αριθμούς:

$$\ell_1 = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \ \text{ και } \ \ell_2 = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

τους λέμε πλευρικά όρια της f στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 αριστερό όριο της f στο x_0, ενώ το ℓ_2 δεξιό όριο της f στο x_0.

γ) ♦ Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε «κοντά στο x_0», δηλαδή η f να είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής:

$$(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta) \ \text{ ή } \ (\alpha, x_0) \ \text{ ή } \ (x_0, \beta)$$

- Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ή να μην ανήκει σε αυτό.
- Η τιμή της f στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 ή διαφορετική από αυτό.

δ) Ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0 \ \text{ και } \ \lim_{x\to x_0} c = c$$

13. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει κοντά στο x_0 μια ιδιότητα P;

Απαντηση

Μια συνάρτηση f λέμε ότι έχει κοντά στο x_0 μια ιδιότητα P, όταν ισχύει μια από τις τρεις συνθήκες που ακολουθούν:

α) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα P.

β) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0), έχει σε αυτό την ιδιότητα P, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0, β).

γ) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0, β), έχει σε αυτό την ιδιότητα P, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α, x_0).

14. Να γράψετε τις ιδιότητες των ορίων στο $x_0\in\mathbb{R}$.

Απαντηση

Για το όριο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

α) Θεώρημα

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

β) Θεώρημα

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$$

γ) Θεώρημα

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(\kappa f(x)\big) = \kappa \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
   για κάθε σταθερά $\kappa\in\mathbb{R}$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \ne 0$
5. $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$
6. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$,
   εφόσον $f(x)\ge 0$ κοντά στο x_0

δ) Θεώρημα

i) Αν $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ είναι πολυώνυμο του x και $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

ii) Αν $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ είναι ρητή συνάρτηση, όπου P(x), Q(x) είναι πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$, τότε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Αποδειξη

i) Έστω το πολυώνυμο:

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$
$$\text{και } x_0 \in \mathbb{R}$$

Σύμφωνα με τις γνωστές ιδιότητες έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = \lim_{x \to x_0}(\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0) =$$
$$= \lim_{x \to x_0}(\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x \to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}) + \ldots + \lim_{x \to x_0}\alpha_0 =$$
$$= \alpha_\nu \lim_{x \to x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1}\lim_{x \to x_0} x^{\nu-1} + \ldots + \lim_{x \to x_0}\alpha_0 =$$
$$= \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \ldots + \alpha_0 = P(x_0)$$

Επομένως $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

ii) Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου P(x), Q(x) είναι πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Τότε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} P(x)}{\lim_{x \to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Επομένως $\lim_{x \to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφόσον $Q(x_0) \neq 0$.

ε) Θεώρημα (Κριτήριο παρεμβολής)

Έστω οι συναρτήσεις f, g και h. Αν:

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$,

τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

στ) Ισχύει ότι:

- $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

  Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$.
- $\lim_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$
- $\lim_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

15. Πώς υπολογίζουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο x_0;

Απαντηση

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_0, δηλαδή το:

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x))$$

τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u = g(x)$.
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$.
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim_{u \to u_0} f(u)$.

Αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{u \to u_0} f(u)$.

16. Να γράψετε τις ιδιότητες του άπειρου ορίου στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Απαντηση

Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

Με τη βοήθεια του ορισμού αποδεικνύονται οι επόμενες ιδιότητες:

α) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, ενώ αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

β) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \to x_0}(-f(x)) = -\infty$, ενώ αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \to x_0}(-f(x)) = +\infty$.

γ) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

δ) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, ενώ αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

ε) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε:

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$$

στ) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = +\infty$.

ζ) **i)** $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty,\ \nu \in \mathbb{N}^*$$

ii) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty,\ \nu \in \mathbb{N}$ και

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty,\ \nu \in \mathbb{N}$$

η) Για το άθροισμα και το γινόμενο ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα 1ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$						
το όριο της f είναι:	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της f+g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

Θεώρημα 2ο (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$										
το όριο της f είναι:	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της f·g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Σχόλιο

Οι παρακάτω μορφές λέγονται απροσδιόριστες μορφές:

$$(+\infty) + (-\infty),\ \ 0 \cdot (\pm\infty),\ \ (+\infty) - (+\infty),$$
$$(-\infty) - (-\infty),\ \ \frac{0}{0},\ \ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

17. Να γράψετε τις ιδιότητες για το όριο συνάρτησης στο άπειρο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Για τον υπολογισμό του ορίου στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω βασικά όρια:

- $\lim_{x \to +\infty} x^\nu = +\infty$ και $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0,\ \nu \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \to -\infty} x^\nu = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$ και

  $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0,\ \nu \in \mathbb{N}^*$

β) Για την πολυωνυμική συνάρτηση:

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_0 \text{ με } \alpha_\nu \neq 0$$

ισχύει:

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$$

και

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$$

γ) Για τη ρητή συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0}$$

με $\alpha_\nu \neq 0$ και $\beta_\kappa \neq 0$

ισχύει:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa} \right)$$

και

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa} \right)$$

δ) Για το όριο εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης ισχύει ότι:

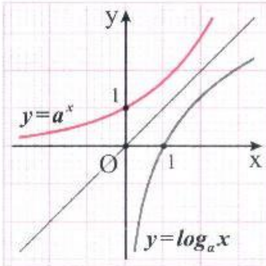
- Αν $\alpha > 1$, τότε:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \log_\alpha x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_\alpha x = +\infty$



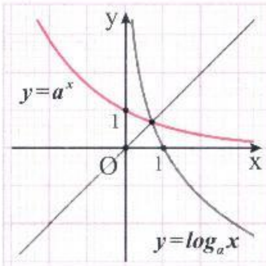
- Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \log_\alpha x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_\alpha x = -\infty$



Σχόλια

α) Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$.

β) Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $-\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$.

γ) Για τα όρια στο $+\infty$ και $-\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι:

- οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και
- δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

Γ. Συνέχεια συνάρτησης

18. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απαντηση

Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Σχόλια

α) Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

i) δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

ii) υπάρχει το όριό της στο x_0 αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της $f(x_0)$ στο σημείο x_0.

β) Μια συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της θα λέγεται συνεχής συνάρτηση.

γ)
- Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

- Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

- Οι συναρτήσεις $f(x) = ημx$ και $g(x) = συνx$ είναι συνεχείς, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$$

- Οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha^x$ και $g(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$, είναι συνεχείς.

19. Να διατυπώσετε πρόταση που αφορά τις πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για τις πράξεις συνεχών συναρτήσεων ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις:

$$f+g, \quad c \cdot f \ (\text{όπου } c \in \mathbb{R}),$$

$$f \cdot g, \quad \frac{f}{g}, \quad |f| \quad \text{και} \quad \sqrt[\nu]{f}$$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.

20. Να διατυπώσετε πρόταση που αφορά τη συνέχεια σύνθετης συνάρτησης.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για τη συνέχεια σύνθετης συνάρτησης ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

21. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε στο κλειστό διάστημα [α, β];

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β).
- Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον:

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

Σχόλιο

Ανάλογοι ορισμοί διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$.

22. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- ισχύει $f(\alpha)f(\beta) < 0$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Δηλαδή υπάρχει μία, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β).

Σχόλια

α) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

β) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

23. Θεώρημα

Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών είναι το παρακάτω:

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

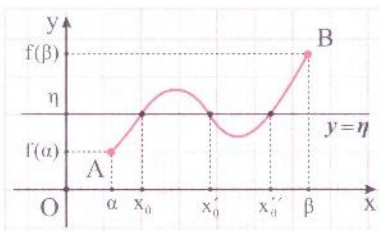
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει:

$$f(\alpha) < \eta < f(\beta)$$



Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - \eta, \ x \in [\alpha, \beta]$$

παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$,

αφού:

$$g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0 \ \text{και} \ g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$$

οπότε $f(x_0) = \eta$.

Σχόλια

α) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B), όπου:

$$A = \lim_{x \to \alpha^+} f(x) \ \text{και} \ B = \lim_{x \to \beta^-} f(x)$$

Αν όμως η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B, A).

24. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης – ελάχιστης τιμής.

Απαντηση

Το θεώρημα μέγιστης – ελάχιστης τιμής διατυπώνεται ως εξής:

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε αν:

$$m = f(x_1) \ \text{και} \ M = f(x_2)$$

να ισχύει:

$$m \le f(x) \le M \ \text{για κάθε} \ x \in [\alpha, \beta]$$

Σχόλιο

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

Δ. Διαφορικός λογισμός (Κανόνες παραγώγισης)

25. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απαντηση

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχει το:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Σχόλια

α) Αν στην ισότητα:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

θέσουμε $x = x_0 + h$, τότε έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

β) Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f, τότε:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια:

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι ίσα.

26. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$.

Απαντηση

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Σχόλιο

Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και κλίση της C_f στο A ή κλίση της f στο x_0.

27. Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Αποδειξη

Για $x \neq x_0$ έχουμε:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

οπότε θα είναι:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) =$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Σχόλιο

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Ισχύει όμως ότι:

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

28. Ορισμός

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη:

α) στο πεδίο ορισμού της A;

β) στο ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της;

γ) στο κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της;

Απαντηση

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Θα λέμε ότι:

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει:

$$\lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$$

29. Θεώρημα

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $f(x) = c$, τότε $f'(x) = 0$.

β) Αν $f(x) = x$, τότε $f'(x) = 1$.

γ) Αν $f(x) = x^\nu$, με $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, τότε:

$$f'(x) = \nu x^{\nu - 1}$$

δ) Αν $f(x) = \sqrt{x}$, τότε $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

Απόδειξη

α) Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0$$

Επομένως:

$$\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$$

δηλαδή $(c)'=0$.

β) Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$$

Επομένως:

$$\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x \to x_0}1=1$$

δηλαδή $(x)'=1$.

γ) Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=$$

$$=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=$$

$$=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+x_0^{\nu-1}$$

Επομένως:

$$\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x \to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+x_0^{\nu-1})=$$

$$=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\ldots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1}$$

δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$.

δ) Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=$$

$$=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

Επομένως:

$$\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x \to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Άλλοι χρήσιμοι τύποι

- Έστω η συνάρτηση $f(x)=ημx$.
  Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=συνx$, δηλαδή:
  $$(ημx)'=συνx$$
- Έστω η συνάρτηση $f(x)=συνx$.
  Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=-ημx$, δηλαδή:
  $$(συνx)'=-ημx$$
- Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x$.
  Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=e^x$, δηλαδή:
  $$(e^x)'=e^x$$
- Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x$.
  Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, δηλαδή:
  $$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

30. Θεώρημα

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=f'(x_0)+g'(x_0)$$

δηλαδή:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Άλλοι χρήσιμοι τύποι

α) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Ισχύει επομένως ότι:

- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει:

$$(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

- Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και $c\in\mathbb{R}$, επειδή $(c)'=0$, έχουμε:

$$\left(cf(x)\right)'=cf'(x)$$

β) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}$$

Ισχύει επομένως ότι:

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ και για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει $g(x)\neq 0$, τότε για κάθε $x\in\Delta$ έχουμε:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

γ) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή:

$$(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$$

Απόδειξη

Για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})'=\left(\frac{1}{x^\nu}\right)'=\frac{(1)'\cdot x^\nu-1\cdot(x^\nu)'}{(x^\nu)^2}=$$

$$=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}$$

δ)
- Έστω η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο:

$$\mathbb{R}-\{x\mid \sigma\upsilon\nu x=0\}$$

και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή:

$$(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Απόδειξη

Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{x\mid\sigma\upsilon\nu x=0\}$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{x\mid\eta\mu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$, δηλαδή:

$$(\sigma\varphi x)'=-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

ε) Για την παράγωγο σύνθετης συνάρτησης ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f\circ g)'(x_0)=f'\left(g(x_0)\right)\cdot g'(x_0)$$

Σχόλιο

Γενικά αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$\left(f(g(x))\right)'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$$

Δηλαδή αν $u=g(x)$, τότε:

$$\left(f(u)\right)'=f'(u)\cdot u'$$

Με τον συμβολισμό του Leibniz, αν $y=f(u)$ και $u=g(x)$, έχουμε τον τύπο:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

που είναι γνωστός ως κανόνας της αλυσίδας.

31. Θεώρημα

Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$$

β) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = \alpha^x \ln\alpha$$

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$, είναι παραγωγίσιμη στο $x \in \mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$$

Αποδειξη

α) Αν $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε:

$$u = \alpha \ln x$$

τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως:

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

β) Αν $y = \alpha^x = e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε:

$$u = x\ln\alpha$$

τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως:

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x\ln\alpha} \cdot \ln\alpha = \alpha^x \ln\alpha$$

γ) Έχουμε:

- αν $x > 0$, τότε $\left(\ln|x|\right)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ
- αν $x < 0$, τότε $\ln|x| = \ln(-x)$, οπότε αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, είναι:

$$y = \ln u$$

Επομένως:

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$.

Σχόλιο

Τις παραπάνω αποδείξεις μπορούμε να τις απλοποιήσουμε. Αυτό να γίνει στην τάξη από τον καθηγητή.

Ε. Διαφορικός λογισμός
(Βασικά θεωρήματα - Συνέπειες ΘΜΤ - Μονοτονία)

32. Τι λέμε ρυθμό μεταβολής του μεγέθους y ως προς το μέγεθος x για $x = x_0$, αν $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση;

Απαντηση

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

33. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απαντηση

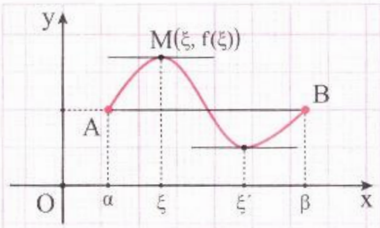
Το θεώρημα του Rolle διατυπώνεται ως εξής:

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$,
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



34. Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

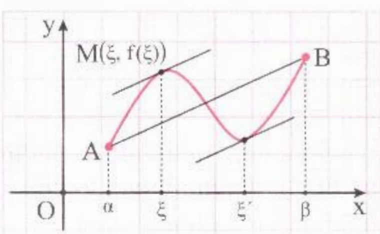
Το θεώρημα της μέσης τιμής διατυπώνεται ως εξής:
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



35. Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν:

- **η f είναι συνεχής στο Δ και**
- **$f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ**

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι:

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις είναι:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

36. Θεώρημα

Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν:

- **οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και**
- **$f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ**

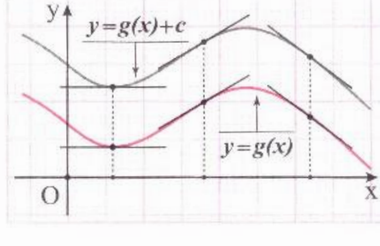
τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$\mathbf{f(x) = g(x) + c}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$



Επομένως η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ.

Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x)-g(x)=c, \text{ οπότε } f(x)=g(x)+c$$

Σχόλιο

Τα δύο προηγούμενα θεωρήματα ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

37. Πρόταση (χωρίς απόδειξη)

Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι:

$$f'(x)=f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

τότε $f(x)=ce^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αντί του $\mathbb{R}$ μπορούμε να έχουμε τυχαίο διάστημα Δ.

38. Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

- **Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.**
- **Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.**

Απόδειξη

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x)>0$.

  Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$. Θα αποδείξουμε ότι:

  $$f(x_1)<f(x_2)$$

  Πράγματι στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

  $$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

  οπότε έχουμε:

  $$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$$

  Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε:

  $$f(x_2)-f(x_1)>0$$

  οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

- Στην περίπτωση που είναι $f'(x)<0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

Σχόλιο

Το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ, η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ.

ΣΤ. Διαφορικός λογισμός
(Ακρότατα - Σημεία καμπής - Ασύμπτωτες - Κανόνες de L' Hospital)

39. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f.

β) Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f.

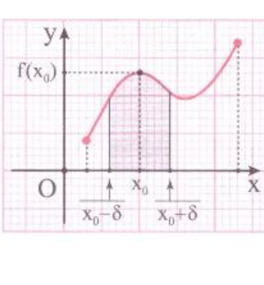
Σχόλιο

Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα. Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης.

40. Θεώρημα Fermat

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σε αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta \text{ και}$$

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \qquad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Επομένως:

- αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι:
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$
οπότε θα έχουμε:
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad (2)$$
- αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι:
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$
οπότε θα έχουμε:
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \qquad (3)$$

Έτσι από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

41. α) Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

β) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ λέγονται τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν.

β) Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.

3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης).

42. Πώς βρίσκουμε τα ολικά ακρότατα μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα;

Απαντηση

Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου της συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα εργαζόμαστε ως εξής:

1. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f.
2. Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.
3. Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της f.

43. Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

ii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο:

$$(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$$

τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

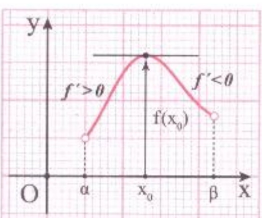
Αποδειξη

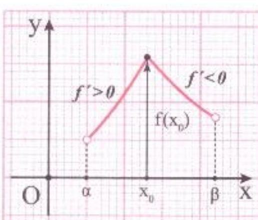
i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0] \qquad (1)$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in [x_0, \beta) \qquad (2)$$





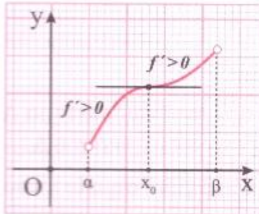
Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

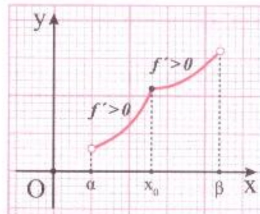
$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta)$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Έστω ότι:

$$f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$$





Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Τώρα θα αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

Πράγματι έστω:

$$x_1, x_2 \in (\alpha, \beta) \text{ με } x_1 < x_2$$

- Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε:

$$f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

Επομένως σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

Ομοίως αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

44. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή και πότε κοίλη σε ένα διάστημα Δ;

Απαντηση

- Η συνάρτηση f λέγεται κυρτή ή ότι στρέφει τα κοίλα προς τα άνω σε ένα διάστημα Δ όταν είναι συνεχής στο Δ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

- Η συνάρτηση f λέγεται κοίλη ή ότι στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο Δ, αν είναι συνεχής στο Δ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

45. **Να διατυπώσετε το θεώρημα που αφορά τα κοίλα και το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου της f.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

46. **Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f όταν:

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Σχόλιο

Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 καμπή και το x_0 λέγεται θέση σημείου καμπής.

47. **Ποιο θεώρημα αφορά τα σημεία καμπής μιας συνάρτησης f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη;**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για τα σημεία καμπής ισχύει το επόμενο θεώρημα:

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

48. **Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ είναι:

i) Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται.

ii) Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f''.

Μέθοδος - Κριτήριο

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν:

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
- ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$

τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f.

49. **Πότε λέμε ότι η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f;**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

50. **Πότε λέμε ότι η ευθεία $y = \ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$), όταν $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως όταν $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$).

51. **Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$), αν $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (\lambda x + \beta)\right] = 0$ (αντιστοίχως αν $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (\lambda x + \beta)\right] = 0$).

52. Με ποιες σχέσεις (τύπους) βρίσκουμε τις ασύμπτωτες της μορφής $y=\lambda x+\beta$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R} \text{ και } \lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\mathbb{R}$$

αντιστοίχως:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R} \text{ και } \lim_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\mathbb{R}$$

Χρήσιμα σχόλια

α) Αποδεικνύεται ότι:

- Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.
- Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

β) Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

- Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.
- Στα σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
- Στο $+\infty$ και $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty,\alpha)$.

53. Να διατυπώσετε τους κανόνες de L' Hospital.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1ος κανόνας

Αν ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0,\ \lim_{x\to x_0}g(x)=0$$
$$x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$$

και υπάρχει το:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ (πεπερασμένο ή άπειρο)}$$

τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2ος κανόνας

Αν ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to x_0}g(x)=+\infty$$
$$x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$$

και υπάρχει το:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ (πεπερασμένο ή άπειρο)}$$

τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Σχόλια

α) Οι παραπάνω τύποι απαιτούν προσοχή κατά την εφαρμογή τους. Να συζητηθούν στην τάξη οι λεπτομέρειες.

β) Στις υποθέσεις είναι απαραίτητο να συμπληρώσουμε την $g'(x)\neq 0$ σε μια περιοχή του x_0, με εξαίρεση ίσως το x_0.

γ) Οι άλλες απροσδιόριστες μορφές να συζητηθούν στην τάξη με τον καθηγητή σας.

54. Τι ονομάζουμε αρχική μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

Απαντηση

Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζουμε κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$F'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

55. Θεώρημα

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε:

- **Όλες οι συναρτήσεις της μορφής:**
$$G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$$
είναι παράγουσες της f στο Δ.
- **Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή:**
$$G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Αποδειξη

- Κάθε συνάρτηση της μορφής:
$$G(x) = F(x) + c, \text{ όπου } c \in \mathbb{R}$$
είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού:
$$G'(x) = \big(F(x) + c\big)' = F'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta$$
- Έστω G μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν οι σχέσεις:
$$F'(x) = f(x) \text{ και } G'(x) = f(x)$$
οπότε:
$$G'(x) = F'(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

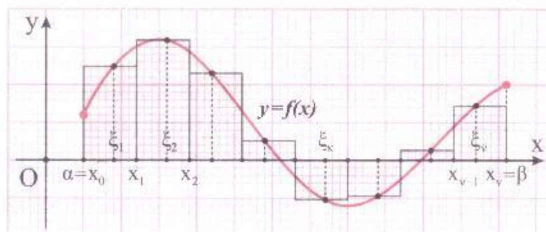
Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε:

$$G(x) = F(x) + c \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

56. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα [α, β].

Απαντηση

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο [α, β]. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα [α, β] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta - \alpha}{\nu}$.



Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα:

$$\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa] \text{ για κάθε } \kappa \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$$

και σχηματίζουμε το άθροισμα:

$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \ldots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \ldots + f(\xi_\nu)\Delta x$$

το οποίο συμβολίζεται σύντομα ως εξής:

$$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\,\Delta x$$

Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το:

$$\lim_{\nu \to +\infty} \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\,\Delta x \right)$$

υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ.

Το παραπάνω όριο ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ και διαβάζεται «ολοκλήρωμα της f από το α στο β». Δηλαδή:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{\nu \to +\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$$

57. Να γράψετε τις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

Απαντηση

α) Ισχύει ότι:

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$
- $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$
- Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$$

β) Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν:

- $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)]\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$

και γενικά:

- $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx =$

$$= \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$$

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx$$

δ) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx > 0$$

58. Να γράψετε την παράγωγο της συνάρτησης $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$, $x \in \Delta$, όπου f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ.

Απαντηση

Ισχύει ότι:

$$F'(x) = \left(\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\right)' = f(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

Σχόλια

α) Γενικότερα έχουμε το εξής θεώρημα:

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση:

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt, \; x \in \Delta$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\right)' = f(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

β) Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης προκύπτει ότι:

$$\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

59. Θεώρημα

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Αποδειξη

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα η συνάρτηση:

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$$

είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$G(x) = F(x) + c \qquad (1)$$

Από την (1) για $x = \alpha$ έχουμε:

$$G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt + c = c$$

οπότε $c = G(\alpha)$.

Επομένως:

$$G(x) = F(x) + G(\alpha)$$

οπότε για $x = \beta$ έχουμε:

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt + G(\alpha)$$

και άρα:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

60. **Να γράψετε τους τύπους της παραγοντικής ολοκλήρωσης και της αντικατάστασης για το ορισμένο ολοκλήρωμα.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Ισχύει ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)\,dx$$

όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.

β) Ισχύει ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)\,du$$

όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.

61. **α) Να γράψετε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα x΄x, όταν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής.**

β) Να αποδείξετε ότι αν για τις συνεχείς συναρτήσεις f, g είναι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))\,dx}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

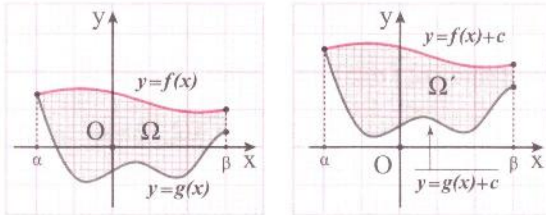
α) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα x΄x είναι:

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

β) Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε:

$$f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta]$$

Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω΄.



Επομένως έχουμε:

$$E(\Omega) = E(\Omega') \overset{(\alpha)}{=} \int_{\alpha}^{\beta}(f(x)+c)\,dx - \int_{\alpha}^{\beta}(g(x)+c)\,dx =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}\left[(f(x)+c)-(g(x)+c)\right]dx = \int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))\,dx$$

Άρα $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta}(f(x) - g(x))\,dx$.

Σχόλια

α) Όταν η διαφορά $f(x) - g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι ίσο με:

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)|\,dx$$

β) Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα x΄x, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, με $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι ίσο με:

$$E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή ο άξονας x΄x είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0$, έχουμε:

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta}(f(x) - g(x))\,dx = \int_{\alpha}^{\beta}\left[-g(x)\right]dx =$$

$$= -\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$$

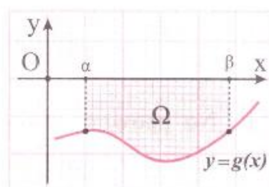
Επομένως αν για μια συνάρτηση g ισχύει:

$$g(x) \leq 0$$

για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

τότε:

$$E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$$



2. Η θεωρία συγκεντρωτικά

Α. Οι ορισμοί

Στην παράγραφο αυτή δίνονται όλοι οι ορισμοί που μπορούν να ζητηθούν στις εξετάσεις ως υποερώτημα στο ΘΕΜΑ Α. Τις απαντήσεις θα τις βρείτε ή στα επιμέρους ερωτήματα της αναλυτικής θεωρίας στην αρχή της ενότητας αυτής ή στο σχολικό σας βιβλίο. Η συγκεντρωτική μορφή που παρουσιάζουμε στοχεύει εκτός των άλλων στο να δώσει τη δυνατότητα για έλεγχο και καλύτερη εκμάθηση των ορισμών, χωρίς την οπτική βοήθεια του σχολικού βιβλίου ή άλλου μέσου.

1. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ;

3. **α)** Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο και πότε ολικό ελάχιστο;

β) Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο;

4. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται "1−1";

5. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

6. **α)** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

β) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη:

i) στο πεδίο ορισμού της Α;

ii) στο ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της;

iii) στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

7. **α)** Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.

β) Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης – ελάχιστης τιμής.

8. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

9. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

10. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$.

11. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

12. Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

13. **α)** Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

β) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

14. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή και πότε κοίλη σε ένα διάστημα Δ;

15. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;

16. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f;

17. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y = \ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);

18. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);

19. Τι ονομάζουμε αρχική μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

20. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

για μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

Β. Τα θεωρήματα με απόδειξη

Στις εξετάσεις τα παρακάτω θεωρήματα μπορούν να ζητηθούν με την απόδειξή τους στο ΘΕΜΑ Α. Τις αποδείξεις τους θα τις βρείτε ή στην αρχή της ενότητας αυτής ή στο σχολικό σας βιβλίο. Η συγκεντρωτική μορφή που παρουσιάζουμε στοχεύει εκτός των άλλων στο να δώσει τη δυνατότητα για έλεγχο και καλύτερη εκμάθηση των αποδείξεων, χωρίς την οπτική βοήθεια του σχολικού βιβλίου ή άλλου μέσου.

Θεώρημα 1ο

α) Αν $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ είναι πολυώνυμο του x και $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

β) Αν $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ είναι ρητή συνάρτηση, όπου $P(x)$, $Q(x)$ είναι πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$, τότε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Θεώρημα 2ο

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και η ένας αριθμός ανάμεσα στα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = \eta$$

Θεώρημα 3ο

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Ισχύει το αντίστροφο;

Θεώρημα 4ο

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Θεώρημα 5ο

Να αποδείξετε ότι:

i) $(c)' = 0$ **ii)** $(x)' = 1$

iii) $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$, $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$

Θεώρημα 6ο

Να αποδείξετε ότι:

i) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x > 0$

ii) $(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Θεώρημα 7ο

Να αποδείξετε ότι:

i) $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha$, $\alpha > 0$

ii) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ $(x > 0)$

iii) $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \neq 0$

iv) $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ $(x \neq 0)$

v) $(x^{\kappa})' = \kappa x^{\kappa-1}$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$

Θεώρημα 8ο

α) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ με $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ.

β) Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα Δ με $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε:

$$f(x) = g(x) + c \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

Θεώρημα 9ο

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ με $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Θεώρημα 10ο

Αν η f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ, παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$. Ισχύει το αντίστροφο;

Θεώρημα 11ο

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Θεώρημα 12ο

Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα Δ και F αρχική της f στο Δ. Να αποδείξετε ότι:

i) Οι συναρτήσεις της μορφής:

$$G(x) = F(x) + c, \; x \in \Delta$$

είναι παράγουσες της f στο Δ.

ii) Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ έχει τη μορφή:

$$G(x) = F(x) + c, \; c \in \mathbb{R}$$

Θεώρημα 13ο

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και G μια αρχική της f στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Θεώρημα 14ο

α) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ δίνεται από τον τύπο:

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))\,dx$$

β) Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ δίνεται από τον τύπο:

$$E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$$