18 Επανάληψη στο ορισμένο ολοκλήρωμα

Θεωρία - Ερωτήσεις κλειστού τύπου

Α. Ελέγχω τις γνώσεις μου στη θεωρία

Ορισμοί

18.1 Έστω f μια συνάρτηση η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια συνάρτηση ονομάζεται αρχική ή παράγουσα της f στο Δ;

18.2 Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε άθροισμα Riemann της συνάρτησης f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$;

18.3 Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από το α στο β;

Προτάσεις

18.4 Έστω f μια συνάρτηση η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια αρχική της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α) Όλες οι συναρτήσεις της μορφής:

$$G(x) = F(x) + c \quad \text{με } c \in \mathbb{R}$$

είναι αρχικές της f στο Δ.

β) Αν G είναι μια άλλη αρχική της f στο Δ, τότε υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$G(x) = F(x) + c \quad \text{για κάθε } x \in \Delta$$

18.5 Να συμπληρώσετε τα κενά στις επόμενες προτάσεις, ώστε να προκύψουν οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

α) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Ισχύουν τα εξής:

i) Αν $\gamma \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\gamma}^{\gamma} f(x)\,dx = \ldots$

ii) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \ldots \int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$

iii) Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)\,dx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

β) Αν $c \in \mathbb{R}$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

γ) Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ και έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ισχύει ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

18.6 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Συνάρτηση f	Αρχικές συναρτήσεις F
$f(x) = 0$	
$f(x) = \alpha$	
$f(x) = \frac{1}{x}$	
$f(x) = x^{\alpha},\ \alpha \neq -1$	
$f(x) = ημx$	
$f(x) = συνx$	
$f(x) = \frac{1}{συν^2x}$	
$f(x) = \frac{1}{ημ^2x}$	
$f(x) = e^x$	
$f(x) = \alpha^x,\ 0 < \alpha \neq 1$	

18.7 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$$

18.8 Να συμπληρώσετε τα κενά στις προτάσεις που ακολουθούν:

α) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha, \beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \dots 0$$

β) Οι συναρτήσεις f και g έχουν συνεχή παράγωγο στο $[\alpha, \beta]$. Τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)\,dx$$

γ) Οι συναρτήσεις f και g έχουν συνεχή παράγωγο στο $[\alpha, \beta]$. Θέτοντας $g(x) = u$ προκύπτει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

18.9 Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

18.10 Οι συναρτήσεις $f, g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει:

$$f(x) \geq g(x) \geq 0$$

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ ισούται με:

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))\,dx$$

18.11 Οι συναρτήσεις $f, g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq g(x)$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ ισούται με:

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))\,dx$$

18.12 Η συνάρτηση $g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $g(x) \leq 0$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ ισούται με:

$$E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$$

18.13 Οι συναρτήσεις $f, g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ ισούται με:

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)|\,dx$$

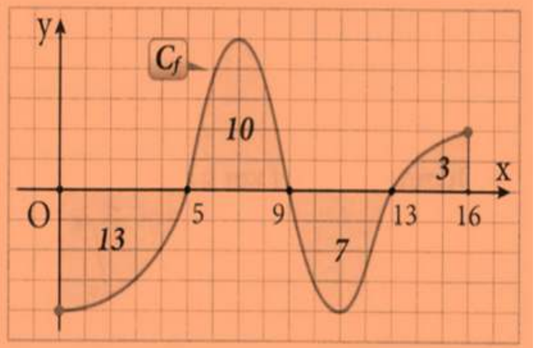
Β. Ερωτήσεις τύπου πολλαπλής επιλογής

Σε καθεμία από τις επόμενες ημιτελείς προτάσεις να επιλέξετε τη φράση ή τη σχέση που τη συμπληρώνει σωστά.

18.14 Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\int_{\alpha}^{\beta} e^{x^2}\,dx < 0$. Τότε:

A: $\alpha < \beta < 0$ **B:** $\beta > \alpha > 0$ **Γ:** $\alpha > \beta$
Δ: $\alpha < \beta$ **E:** $\alpha = \beta$

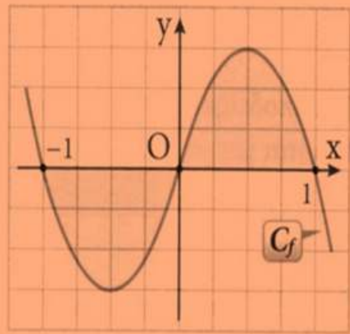
18.15 Στο διπλανό σχήμα παριστάνεται η συνεχής συνάρτηση f και έχουν σημειωθεί τα εμβαδά κάποιων χωρίων που περικλείονται από τη C_f και τον άξονα x'x. Θετικό είναι το ολοκλήρωμα:



Α: $\int_0^9 f(x)\,dx$ **Β:** $\int_9^{16} f(x)\,dx$ **Γ:** $\int_{13}^5 f(x)\,dx$

Δ: $\int_9^5 f(x)\,dx$ **Ε:** $\int_{13}^0 f(x)\,dx$

18.16 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας περιττής και συνεχούς συνάρτησης f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν $\int_{-1}^0 f(x)\,dx = -2$, τότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα x'x ισούται με:



Α: 2 **Β:** 1 **Γ:** 4

Δ: $\frac{1}{2}$ **Ε:** $\frac{1}{4}$

18.17 Έστω η συνεχής συνάρτηση f: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > 0$$

Τότε:

Α: Είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. **Β:** Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Γ: Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) > 0$, άρα κοντά στο x_0 έχουμε $f(x) > 0$.

Δ: Δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πρόσημο της f ούτε στο $[\alpha, \beta]$ ούτε σε κάποιο υποδιάστημα του $[\alpha, \beta]$.

18.18 Θεωρούμε τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_0^1 (1 - \text{συν}x)\,dx, \quad I_2 = \int_0^1 (e^{-x^2} + 1)\,dx, \quad I_3 = \int_0^1 x\,dx, \quad I_4 = \int_0^1 (e^{x^2} + 1)\,dx$$

Ισχύει ότι:

Α: $I_2 > I_4 > I_1 > I_3$ **Β:** $I_4 > I_2 > I_1 > I_3$ **Γ:** $I_4 > I_2 > I_3 > I_1$ **Δ:** $I_2 > I_3 > I_4 > I_1$

Γ. Θέματα οργάνωσης λογικών δομών

Σε καθένα από τα επόμενα θέματα να επιλέξετε το ελάχιστο πλήθος από τις δοσμένες προτάσεις και να τις διατάξετε με τέτοιον τρόπο, ώστε οι πρώτες από αυτές να αποτελούν τις προϋποθέσεις και η τελευταία να είναι το συμπέρασμα της αντίστοιχης πρότασης.

18.19 Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού

Α: Η συνάρτηση F είναι μια αρχική της συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$

Β: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha)$ **Γ:** $\int_\alpha^\beta F(x)\,dx = f(\beta) - f(\alpha)$

Δ: Η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ **Ε:** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

18.20 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Α: Οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$

Β: $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)\,dx$

Γ: $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)\,dx$

Δ: Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$

Ε: Οι συναρτήσεις f και g έχουν συνεχή παράγωγο στο $[\alpha, \beta]$

Δ. Αποδείξεις και αντιπαραδείγματα σε ερωτήσεις τύπου «Σωστό - Λάθος»

Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις επόμενες προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ). Να αποδείξετε όσες θεωρείτε ότι είναι σωστές και να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα σε όσες θεωρείτε ότι είναι λανθασμένες.

18.21 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και η F είναι μια αρχική της f στο Δ, τότε η F είναι συνεχής στο Δ.

18.22 Αν η συνάρτηση f: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε:

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right)' = 0$$

18.23 Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$. Τότε ισχύει ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \int_\gamma^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx$$

18.24 Έστω μια συνεχής συνάρτηση f: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Αν ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \cdot \int_\beta^\alpha f(x)\,dx \geq 0$$

τότε είναι $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0$.

18.25 Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx \Rightarrow \beta = \gamma$$

18.26 Αν οι συναρτήσεις f, g: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \leq g(x)$, τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leq \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$$

18.27 Αν η συνάρτηση f: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^*$ είναι συνεχής, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \neq 0$.

18.28 Αν οι συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) < g(x)$, τότε για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx < \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$$

18.29 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0$$

Τότε ισχύει ότι $\alpha = \beta$.

18.30 Αν οι συναρτήσεις f, g: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$$

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

18.31 Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και έστω F μια αρχική της f. Αν η F δεν είναι «1 - 1», τότε υπάρχουν $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha \neq \beta$ τέτοια, ώστε:

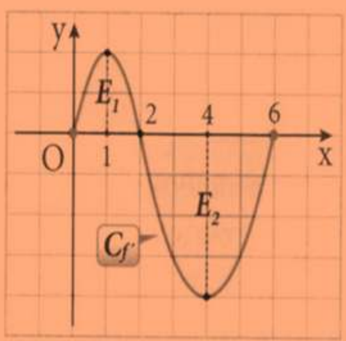
$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0$$

Ασκήσεις για λύση

Α ομάδα

18.32 Η συνάρτηση $f\colon [0, 6] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και η γραφική παράσταση της f' φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η C_f διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$ και ισχύουν:

$$E_1 = 4 \text{ τ.μ.} \quad \text{και} \quad E_2 = 8 \text{ τ.μ.}$$



α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f(6)$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ της C_f στα οποία οι εφαπτόμενες ευθείες της C_f σχηματίζουν γωνίες ω_1 και ω_2 αντίστοιχα με τον άξονα $x'x$ και ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\omega_1 + \varepsilon\varphi\omega_2 = 0$$

18.33 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = e^{1-x} + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - 1$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) + f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 \frac{3x^2 + 2x^3}{f(x)}\,dx$$

18.34 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, & \text{αν } x\le 1 \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{αν } x>1 \end{cases}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο.

β) Να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

γ) Να σχεδιάσετε τη C_f.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ με $\alpha<1$ και $x=2$.

ε) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{\alpha\to-\infty} E(\alpha)$$

18.35 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon [1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=x\sqrt{x-1}$$

α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα μεταβολών της f και να χαράξετε τη C_f.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=5$.

18.36 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=xe^x$$

α) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\displaystyle\int_0^1 f''(x)\,dx$ **ii)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x}\,dx$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_1^{\alpha}\frac{f''(x)f(x)-\left(f'(x)\right)^2}{f^2(x)}\,dx=-1$$

18.37 Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x^2-5x+\alpha}{x-\beta}$$

όπου $\alpha>0$ και $\beta\in\mathbb{R}$. Η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=5$ και η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στη θέση $x_0=3$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=4$ και $\beta=5$.

β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα μεταβολών της f και να χαράξετε τη C_f.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f(x)\right)=0$$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$.

18.38 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon (1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=2x+1-\frac{1}{x\ln x}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon\colon\ y=2x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ευθεία ε και τις ευθείες $x=e$ και $x=e^2$.

18.39 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=\frac{x^3+2x}{x^2-x+1}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ασύμπτωτη της C_f και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

18.40 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Αν $\alpha>0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0>0$ τέτοιο, ώστε:

$$(\alpha+1)(e^{x_0}-1)=\alpha(e^{x_0}+1)$$

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$f^2(x)+2f'(x)=1$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_0^1 f^2(x)\,dx$$

18.41 Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$g(x) = x - 1 \quad \text{και} \quad h(x) = x + \frac{4}{x}$$

α) Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

$$g^{-1} \quad \text{και} \quad f = g^{-1} \circ h$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

δ) Αν $\alpha \in (0, 1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = \frac{2f(\alpha) + f(2\alpha)}{3}$$

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες $y = x + 1$, $x = 1$ και $x = e$.

18.42 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{e^x}, & \text{αν } x \le 1 \\ \dfrac{\ln^2 x}{x}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^e f(x)\,dx$$

18.43 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x - 1 + \sqrt[3]{x^2}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε:

i) το σύνολο τιμών της f,

ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες $x = -1$, $x = 0$ και $y = 0$.

18.44 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = (x - \alpha)^3 + 1, \quad \text{όπου } \alpha \in \mathbb{R}$$

Η C_f παρουσιάζει καμπή στο σημείο $M(1, f(1))$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία $y = x$.

δ) Σημείο M κινείται κατά μήκος της C_f και η τετμημένη του μειώνεται με ρυθμό 2 μονάδες/s. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M τη χρονική στιγμή t_0 που η τεταγμένη του είναι 9.

18.45 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$g(x) = e^x \quad \text{με } x \in \mathbb{R} \quad \text{και}$$

$$h(x) = \sqrt{x+1} \quad \text{με } x \ge -1$$

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση:

$$f = g \circ h$$

β) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση:

$$F(x) = \alpha f(x)(\sqrt{x+1} - 1) \quad \text{με } x \ge -1$$

είναι μια αρχική της f.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$$

δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

ε) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$J = \int_1^e f^{-1}(x)\,dx$$

18.46 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{αν } x < 3 \\ x^2 - 4x + 5, & \text{αν } x \ge 3 \end{cases}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.

β) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 3$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ε) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 5$.

18.47 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} ημ(2\pi x) + 2e^x, & αν\ x < 1 \\ (x+1)e^x, & αν\ x \geq 1 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

β) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

γ) Να υπολογίσετε:

i) το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(1+\dfrac{1}{x}\right)ημ\dfrac{1}{x}\right)$,

ii) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$.

18.48 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x + \frac{2x}{x^2+1}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και στο $-\infty$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f^{-1}.

δ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^2}$$

18.49 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$g(x) = \ln x \quad με\ x > 0 \quad και$$

$$h(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad με\ x \neq -1$$

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση:

$$f = g \circ h$$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Αν $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, να αποδείξετε ότι:

$$h(x) - h(-x) = \frac{4x}{x^2-1}$$

δ) Να βρείτε την τιμή του $\kappa > 2$ για την οποία ισχύει:

$$\int_2^{\kappa}\frac{x^3-5x}{x^2-1}\,dx - \int_{\kappa}^{2}\big(h(x) - h(-x)\big)\,dx = 6$$

18.50 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = xe^{1-x}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$.

18.51 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - \alpha x^2 + \beta x}{x-1}, & αν\ x > 1 \\ x^3 + \gamma x^2, & αν\ x \leq 1 \end{cases}$$

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

β) Αν $\alpha = 3$, $\beta = 1$ και $\gamma = 0$, τότε:

i) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία,

ii) να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής,

iii) να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx$$

18.52 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + e^{-x}, & αν\ x < 0 \\ 2 - \ln(x+1), & αν\ x \geq 0 \end{cases}$$

α) Να βρείτε την παράγωγο της f και να αποδείξετε ότι η f' είναι συνεχής.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της C_f στο σημείο $M(0, f(0))$ και να αποδείξετε ότι:

$$f(x) \geq 2 - x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

ε) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες $x = -1$ και $y = 0$.

18.53 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \ln x \quad \text{με } x > 0 \quad \text{και}$$

$$g(x) = \frac{x}{1 - x} \quad \text{με } x \neq 1$$

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση h^{-1}.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h^{-1}, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \lambda$ με $\lambda > 0$.

δ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\eta\mu E(\lambda)}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}$$

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\lambda > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$E(\lambda) = \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda}\right)$$

18.54 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{8}{x^2 + 4} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{2}{x}$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι η C_f παρουσιάζει ακριβώς δύο σημεία καμπής, τα οποία είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.

β) Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g εφάπτονται στο σημείο $M(2, 1)$.

γ) Αν $x > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$g(x) \geq f(x) \geq 2 - \frac{x}{2}$$

δ) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$I = \int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx \quad \text{και} \quad J = \int_1^2 \frac{g(x)}{f(x)} dx$$

18.55 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\alpha x^3 + 1}{2x^2} \quad \text{με } x \neq 0 \text{ και } \alpha \in \mathbb{R}$$

Αν η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$,

β) να κατασκευάσετε τον πίνακα μεταβολών της f και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f,

γ) να αποδείξετε ότι:

$$f(x) > \ln x \quad \text{για κάθε } x > 0$$

δ) να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $g(x) = \ln x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

18.56 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

α) Να βρείτε την παράγωγο της f και να αποδείξετε ότι η f' είναι συνεχής.

β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση:

$$F(x) = \begin{cases} \alpha x^3 \ln x + \beta x^3, & \text{αν } x > 0 \\ \gamma, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

είναι μια αρχική της f.

γ) Να υπολογίσετε:

i) το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \lambda$ με $0 < \lambda < 1$,

ii) το όριο $\lim_{\lambda \to 0^+} E(\lambda)$.

18.57 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2 + \alpha\sigma\upsilon\nu x}{x^2}, & \text{αν } x \neq 0 \\ \beta, & \text{αν } x = 0 \end{cases}, \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha = -2$ και $\beta = 1$, **β)** $f'(0) = 0$,

γ) η μέγιστη τιμή της f είναι $f(0) = 1$,

δ) αν $\alpha > 0$, τότε:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} xf(x)dx = 0$$

18.58 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$$

α) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\ell_1 = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x) + \eta\mu x}{x^3}$

ii) $\ell_2 = \lim_{x \to +\infty} f(e^{-x})$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 0$.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^2 \frac{f(x) + f(-x)}{x^2} dx$$

18.59 Δίνεται η συνάρτηση $f: (-1, 1) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \ln(1 + x) - \ln(1 - x)$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f^{-1}(\eta\mu x)\eta\mu^2 x}{x}$$

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-1}^{1} x^2 f^{-1}(x)dx = 0$$

18.60 Έστω συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^2 + x - \ln x \text{ και } g(x) = 2(\ln x + x - 2)\left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$,

ii) η g είναι γνησίως αύξουσα,

iii) η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

18.61 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^3 + 6x(\ln x - 2) + 2$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι κυρτή,

ii) η f έχει ελάχιστη τιμή m για την οποία ισχύει $m < -9$.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$x^2 + 6\ln x = 2\left(6 - \frac{1}{x}\right)$$

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες $x = 1$, $x = 2$ και $y = 0$.

18.62 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$$

α) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

ε) Να αποδείξετε ότι:

$$0 < \int_1^{e^2} f(x)dx < 2\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

18.63 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x}{x - \ln x}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

γ) Αν $E(\alpha)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες $y = 0$, $x = \alpha$ με $\alpha > e$ και $x = \alpha + 1$, να αποδείξετε ότι:

$$f(\alpha + 1) < E(\alpha) < f(\alpha)$$

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\alpha \to +\infty} E(\alpha)$.

18.64 Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(1 + \ln x)$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x - 1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(e + e\ln x) = \ln(1 + x)$$

ε) Να αποδείξετε ότι:

$$f(3) < \int_1^3 f(x)dx < 2f(2)$$

18.65 Δίνεται η συνάρτηση $f: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x + \frac{2\ln(x+1)}{x+1}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της C_f η οποία είναι παράλληλη με την πλάγια ασύμπτωτη της C_f.

δ) Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

$$f(x) = x + \alpha$$

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την πλάγια ασύμπτωτη της C_f και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

18.66 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = e^x + (\alpha^2 + \alpha)x + \alpha^2 - 1, \text{ όπου } \alpha > 0$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(-\alpha, 0)$.

γ) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f.

δ) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την πλάγια ασύμπτωτη της C_f και τις ευθείες $x = -\alpha$ και $x = \alpha$ είναι ίσο με $\frac{3}{2}$ τ.μ.

18.67 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = 2x + 1 - e^{-x}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι κοίλη,

ii) η ευθεία ε: $y = 2x + 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$g(x) = |f(x) - 3x|$$

i) Να αποδείξετε ότι $g'(0) = 0$.

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx$$

iii) Αν $E(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες:

$$y = 2x + 1, \quad x = 0 \quad \text{και} \quad x = \lambda > 0$$

να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$.

18.68 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x\ln\alpha - \alpha\ln x, \quad \text{όπου } \alpha > 0$$

Επιπλέον δίνεται ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha = e$

ii) $e^x \geq x^e$ για κάθε $x > 0$

iii) $e^4 - e^2 > 3^{e+1} - 2^{e+1}$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = x^2 - 2x\ln x \quad \text{με } x > 0$$

i) Να αποδείξετε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$G(x) = \frac{1}{g(x)}$$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x > 0$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$|h(x)|g(x) \leq f(x)$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} h(x)$$

18.69 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f^2(x) - 2xf(x) = 9 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και:

$$\lim_{x \to -\infty} \left((f(4) - 4)x^3 + 5x + 2021\right) = +\infty$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 9} \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) = -\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+9}} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ε) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} dx$$

18.70 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$(1 + x^2)f''(x) + xf'(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 f(x)dx$$

δ) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) \leq x$ για κάθε $x \geq 0$

ii) $\displaystyle\int_0^1 (x + \sqrt{x^2+1})dx < 2$

18.71 Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) + \frac{x}{e} \geq 2 \quad \text{για κάθε } x > 1$$

γ) Να μελετήσετε την f και να χαράξετε τη C_f.

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{e}{2} < \int_e^{2e} \frac{1}{\ln x} dx < e$$

18.72 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = e^x + x - 1$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$.

δ) Η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(0) = 0$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f'(g(x))}$$

Να βρείτε τον τύπο της g.

18.73 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(e^{\alpha x} + \alpha x - 2x), \quad \text{όπου } \alpha \in \left(\frac{2}{e+1}, 2\right)$$

α) Να αποδείξετε ότι $D_f = \mathbb{R}$.

β) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq 0$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$,

ii) να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής,

iii) να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 (e^x - 1)f(x)dx$$

18.74 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = e^x - 1$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1},

ii) ισχύει $f(x) \geq x \geq f^{-1}(x)$ για κάθε $x > -1$.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) - f^{-1}(x) = \text{ημ}x - x$$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) + f^{-1}(x)$$

με $x > -1$. Αν $-1 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$(\beta - \alpha)g(\alpha) < \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx < (\beta - \alpha)g(\beta)$$

18.75 Δίνεται η συνάρτηση $I: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$I(\alpha) = \int_0^1 |x^2 + \alpha| dx$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$I(\alpha) = \begin{cases} -\alpha - \dfrac{1}{3}, & \text{αν } \alpha < -1 \\ \dfrac{1}{3} + \alpha - \dfrac{4}{3}\alpha\sqrt{-\alpha}, & \text{αν } -1 \le \alpha \le 0 \\ \alpha + \dfrac{1}{3}, & \text{αν } \alpha > 0 \end{cases}$$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση I είναι παραγωγίσιμη.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης I.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_I, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 0$.

18.76 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 2$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$x\big(f'(x) - 1\big) = 3x^3 + 2x^2$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x^3 + x^2 + x - 1 \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση.

γ) Αν $x > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\ln^3 x + \ln^2 x + \ln x \le (x-1)^3 + x^2 - x$$

δ) Αν $0 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{f(\alpha) + 1}{\alpha} < \frac{f(\beta) + 1}{\beta}$$

ε) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_1^2 \frac{f'(x) - xf(x)}{f(x)} dx$$

18.77 Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(1) = e - 3 \text{ και } f'(x) = \frac{xe^x + 1}{x} \text{ για κάθε } x > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^x + \ln x - 3 \quad \text{με } x > 0$$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = \ln x \text{ με } x > 0$$

i) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\big(g(x) - 1\big) < e - 3$$

δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες:

$$x = e - 3 \quad \text{και} \quad x = e^e - 2$$

18.78 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{αν } x \le 0 \\ x\ln x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.

β) Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f. Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

γ) Οι εφαπτόμενες ευθείες της C_F στα σημεία $A\big(1, F(1)\big)$ και $B\big(-1, F(-1)\big)$ τέμνονται στο σημείο $\Gamma\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$. Να αποδείξετε ότι:

i) $F(1) = 1$ και $F(-1) = \dfrac{3}{2}$,

ii) το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$ είναι ίσο με $\dfrac{1}{2}$,

iii) αν $F(0) = \dfrac{5}{4}$, τότε ο άξονας $y'y$ χωρίζει το προηγούμενο χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

18.79 Δίνεται η συνάρτηση $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = e^{|x-1|}$$

Έστω F μια αρχική της f με $F(1) = 2$.

α) Να βρείτε τον τύπο της F.

β) Να αποδείξετε ότι η F είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση F^{-1}.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης F^{-1}, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$.

18.80 Δίνεται η συνάρτηση $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = (x+1)e^{1-x} + x$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}.

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f^{-1}\left(f^{-1}(x)\right) \geq f^{-1}(x)$$

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} και τις ευθείες $y = x$ και $x = e$.

18.81 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - x^2$$

ως προς το πρόσημο.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περιέχει τα σημεία $M(x,\ y)$ με:

$$0 \leq x \leq \frac{3}{4} \quad \text{και} \quad x^2 \leq y \leq f(x)$$

18.82 Η συνάρτηση $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \eta\mu x}{x^2} = 1 \quad \text{και}$$

$$f'(x) > 2f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$

β) $\dfrac{f(x)}{e^x - 1} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) $f(1)e^2 < f(2)$

δ) $0 < \displaystyle\int_0^1 f(x)dx < \frac{1-e^{-2}}{2} f(1)$

18.83 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2})$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

έχει ακριβώς μία λύση.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} και τις ευθείες $x = 0$, $y = 0$ και $x = 1$.

18.84 Δίνεται η συνάρτηση $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών της C_f οι οποίες διέρχονται από το σημείο $M(0,\ f(0))$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$.

18.85 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x} \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

και έστω F μια αρχική της f.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{f(x)-f(0)}$

ii) $\lim\limits_{x\to -\infty}\big(F(x+1)-F(x)\big)$

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$F(-x)=F(x)-x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

18.86 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}-2x^2+\alpha x, & \text{αν } x\le 1\\ \dfrac{x^2+\beta}{2}, & \text{αν } x>1\end{cases}$$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $45°$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=5$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}(x)=f(x)$$

δ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ε) Δίνεται $\gamma\in(0, 2)$. Έστω E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες $y=0$, $x=0$, $x=\gamma$ και έστω E_2 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες $y=0$, $x=\gamma$ και $x=2$.

i) Να βρείτε την τιμή του γ για την οποία ισχύει:

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{1}{2}$$

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\gamma\in(0, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{E_2}{E_1}=\frac{1}{2}$$

18.87 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^3(x)+f(x)=2x$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f και της ευθείας $y=x$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία $y=x$.

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 \frac{2}{1+3f^2(x)}dx=1$$

18.88 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f'(x)}{e^x-1}=\frac{1}{e^x-x}-\frac{1}{e^x-1}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\ln(e^x-x)-x,\quad x\in\mathbb{R}$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$g(x)=(e^x-1)f(x)$$

και τις ευθείες $x=0$, $y=0$ και $x=1$.

18.89 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x+2)=f(x)+x$$

Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$,

β) υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0)=\dfrac{1}{2}$,

γ) $\displaystyle\int_{\xi}^{\xi+2} xf''(x)dx=2$,

δ) αν $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx=4$, τότε $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=1$.

18.90 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\ln x \quad \text{με } x>0$$

Ένα σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha > e$ κινείται κατά μήκος της C_f και έστω ε η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο σημείο M. Η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο P.

A. Να βρείτε την τετμημένη του σημείου P.

B. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την ευθεία ε, τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Γ. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 2$ s η τετμημένη του σημείου M είναι e^2 και κάθε χρονική στιγμή t s η τετμημένη του σημείου M ικανοποιεί αριθμητικά τη σχέση:

$$\alpha'(t) = \alpha(t)$$

α) Τη χρονική στιγμή $t_0 = 2$ s να υπολογίσετε τους ρυθμούς μεταβολής:

i) της τετμημένης του σημείου P,

ii) της γωνίας θ που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

β) Έστω N η προβολή του M στον άξονα $x'x$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει ακριβώς μία θέση του σημείου M, ώστε η C_f να χωρίζει το τρίγωνο MNP σε δύο ισεμβαδικά χωρία,

ii) αν t_1 είναι η χρονική στιγμή που η C_f χωρίζει το τρίγωνο MNP σε δύο ισεμβαδικά χωρία, τότε:

$$2 < t_1 < 3$$

18.91 Η συνάρτηση $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν:

$f(0) = 1$ και $f(x+y) \le f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)f(-x) \ge 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iii) $f'(x) = f'(0)f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Αν ισχύει:

$$\int_0^1 f(x)f'(x)dx = \frac{e^2-1}{2}$$

να βρείτε τον τύπο της f.

18.92 Η συνάρτηση $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = \frac{1}{2}$ έχει συνεχή παράγωγο και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) + f'(x) = e^{-2x}\left(f(x) - f'(x)\right)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}} \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 e^x f'(x)dx$$

γ) Αν $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{x+1}{f(x)-1} - \frac{x-1}{f(-x)+1} = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση.

Β ομάδα

18.93 Δίνεται η συνάρτηση $f:\ [0, 1] \to \mathbb{R}$ με:

$$f(0) = f(1) = 0$$

η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει:

$$f''(x) < 0 \quad \text{για κάθε } x \in (0, 1)$$

Αν F είναι μια αρχική της f, να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$,

β) $F(1) > F(0)$,

γ) η εξίσωση:

$$\frac{f'(x)}{x} = F(1) - F(0)$$

έχει ακριβώς μία λύση.

18.94 Η συνάρτηση $f:\ [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και έστω F μια αρχική της f για την οποία ισχύει:

$$F(1) - F(0) = 1$$

Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi_1) = 2\xi_1$,

β) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi_2) = \frac{F(1) - 1 - F(\xi_2)}{\xi_2 - 1}$$

18.95 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 4$ είναι παραγωγίσιμη και έστω F μια αρχική της f με $F(0) = 0$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$F(x) + f'(x) = 3$$

να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση:

$$G(x) = \left(f(x) - 3\eta\mu x - 4\sigma\upsilon\nu x\right)^2 + \\ + \left(f'(x) - 3\sigma\upsilon\nu x + 4\eta\mu x\right)^2$$

είναι σταθερή,

β) $f(x) = 3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x$ με $x \in \mathbb{R}$,

γ) αν $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$$

τότε $\ell = -5$.

18.96 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x(\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi^2 x)dx$ **β)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}dx$

γ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2e^x\eta\mu x}{1 + \eta\mu 2x}dx$ **δ)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

18.97 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + x - x\ln x, & \alpha\nu\ x > 0 \\ 1, & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.

β) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1},

ii) $\displaystyle e + 1 < \frac{\int_1^e f(x)dx}{e - 1} < e^e$.

δ) Αν $x > 0$ και $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$, να αποδείξετε ότι:

$$e^{(1+x)^n} - e^{1+nx} > (1+nx)\left(1 - \ln(1+nx)\right) - \\ - (1+x)^n\left(1 - n\ln(1+x)\right)$$

18.98 Δίνονται οι συναρτήσεις $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = 2e^{x-1} - \ln x$$

και:

$$g(x) = 2x + 2\ln\frac{2}{1 + e^{x-1}}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή, ενώ η g είναι κοίλη.

β) Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g εφάπτονται.

γ) Αν $x > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\ln\frac{(e^{x-1} + 1)^2}{4x} \geq 2(x - e^{x-1})$$

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{x-1} = x + \frac{1}{2}\ln\frac{4x}{(1 + e^{x-1})^2}$$

ε) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_g και τις ευθείες $y = x + 1$ και $x = 2$, να αποδείξετε ότι:

$$E < 2\ln\frac{e+1}{2} - \frac{1}{2}$$

18.99 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 2\ln 2$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$(x+1)f'(x) = f(x) - 1 - \frac{1}{x}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = (x+1)\ln\frac{x+1}{x} \quad \mu\varepsilon\ x > 0$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

δ) Να αποδείξετε ότι:

i) η εξίσωση:

$$x+1=xe^{\frac{2021}{x+1}}$$

έχει ακριβώς μία θετική λύση,

ii) $\dfrac{f(x)+\ln 4}{2}\geq f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$ για κάθε $x>0$,

iii) αν $\alpha>1$, τότε:

$$\int_1^{\alpha} xf(x)dx>\int_1^{\alpha} f(x)dx$$

18.100 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=\frac{e^{\lambda x}-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\ \text{όπου } \lambda\in\mathbb{R}$$

Η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f'\Big(5f\big(2f(x)+\ln(2e^{-x})\big)-3\Big)=1$$

έχει ακριβώς τρεις λύσεις, από τις οποίες οι δύο είναι αντίθετοι αριθμοί.

γ) Αν $\alpha\in\mathbb{R}$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)\text{συν}x}{x^2+1}dx$$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=\ln(x+1)\quad \text{με } x>-1$$

Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x=0$ και $x=\lambda$ με $-1<\lambda<0$. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{\lambda\to 0^-}\frac{E(\lambda)}{f(\lambda)-\lambda}$$

18.101 Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(0)=2$, για τις οποίες ισχύει:

$$f(x)g(x)=f'(x)g'(x)=e^{2x}\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=2e^x\quad \text{και}\quad g(x)=\frac{1}{2}e^x$$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας ε της C_f στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha>0$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες:

$$x=0\quad \text{και}\quad y=2e^{\alpha}\quad \text{με } \alpha>0$$

δ) Το σημείο Μ κινείται κατά μήκος της C_f και απομακρύνεται από τον άξονα $x'x$ με ταχύτητα 2 μονάδες/s. Τη χρονική στιγμή που η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $N(1, 0)$ να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(\alpha)$.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$x_0^2g(x_0)=\int_0^1 x^2g(x)dx$$

18.102 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^3(x)+f(x)+1=x$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

δ) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1},

ii) $4\big(f(x)-f^{-1}(0)\big)\leq x-f^{-1}(1)$ για κάθε $x\geq 1$,

iii) $\dfrac{f(x)}{x-1}>\dfrac{1-f(x)}{3-x}$ για κάθε $x\in(1, 3)$,

iv) $1<\displaystyle\int_1^3 f(x)dx<\frac{3}{2}$.

18.103 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ με $f(1)>0$ είναι κυρτή και ισχύει:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}=5$$

Έστω F μια αρχική της f για την οποία ισχύει:

$$\int_1^{f(1)}F(x)dx=f(1)F\big(f(1)\big)-F(1)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(1)=f'(1)=1$$

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{f(x)}-e^xf(x)=e^x(1-x)$$

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x+1)f\left(\dfrac{1}{x}\right)}{(x+1)f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)-x}$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}{f(x)}$

18.104 Η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x\neq 0$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$g(x)=\frac{x-f(x)}{x^2}$$

Αν η g είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι:

$$f(0)=g(0)=0$$

β) να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής,

γ) να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και g ως προς το πρόσημο,

δ) να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$,

ε) να αποδείξετε ότι:

$$f(\varepsilon\varphi x)=x \quad \text{για κάθε } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

στ) να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

ζ) να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1},

η) να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

θ) να αποδείξετε ότι:

$$xg'(x)+2g(x)=\frac{x}{x^2+1} \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

ι) να αποδείξετε ότι η g' είναι συνεχής.

18.105 Έστω οι συναρτήσεις f, g: $(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$$

και:

$$g(x)=e-2+e^{x-1}-\ln x-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\eta\mu x}\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x dx$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$g(x)=e^{x-1}-\ln x \quad \text{με } x>0$$

β) Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^e f(x)dx<e-1<\int_1^e g(x)dx$$

δ) Θεωρούμε τη συνεχή και γνησίως αύξουσα συνάρτηση h: $(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\int_1^2 \frac{h(x)}{x}dx=1$$

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{\displaystyle\int_1^2 h^2(t)dt-\frac{3}{2}}{x_0-2}=\frac{\displaystyle\int_1^e (f(t)-g(t))dt}{x_0-1}$$

ii) Αν H είναι μια αρχική της h και $0<\alpha<\beta$, να αποδείξετε ότι:

$$H\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)+H\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)<H(\alpha)+H(\beta)$$

18.106 Η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με:

$$f(0)=-\ln 2 \quad \text{και} \quad f'(0)=\frac{1}{2}$$

Επίσης για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$f'(x)\neq 1 \quad \text{και} \quad \left(f'(x)-1\right)^2+e^x f''(x)=0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι κοίλη,

ii) $f(x)=x-\ln(e^x+1)$ με $x\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^x f(x)\right)$$

δ) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\ln(e+1) - 1 < E < \ln 2$$

ε) Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{e^x+1}dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{e^{-x}+1}dx = \alpha$$

18.107 Δίνεται συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = -1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f'(x) + f(x) + 4e^{x-1} = \ln x + \frac{1}{x} + x + 1$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x + \ln x - 2e^{x-1} \quad \text{με } x > 0$$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f'(x) = \int_{e}^{e^2} \frac{f'(\ln x)}{x}dx$$

έχει ακριβώς μία λύση.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$g(x) = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{με } x > 0$$

τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}$ και $x = 1$.

ε) Θεωρούμε τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(x, -f(x))$ με $x > 0$.

i) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση των σημείων A και B.

ii) Αν $E(x)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου OAB, να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{x^2+1} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{E(x)}{x^2}$$

18.108 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x)(e^{f(x)} + 1) = 2x + \frac{2x}{x^2+1}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ με $x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) \le x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$g(x) = f(x) - x \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

γ) Έστω F μια αρχική της f. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$G(x) = F(2x) - F(x) \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

i) Να μελετήσετε την G ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο.

ii) Να μελετήσετε την G ως προς την κυρτότητα.

iii) Να αποδείξετε ότι $G(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

iv) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$\ln \frac{(4\xi^2+1)^2}{\xi^2+1} = \frac{7}{3}$$

18.109 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ είναι περιττή και για κάθε $x \neq 0$ ισχύει:

$$f'(x) = \frac{x + f(x)}{x}$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

γ) Να κατασκευάσετε τον πίνακα μεταβολών της f και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx$$

ε) Θεωρούμε τα σημεία $A(1, f(1))$, $B(2, f(2))$ και $M(\kappa, f(\kappa))$ με $\kappa \in (1, 2)$. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του τριγώνου ABM.

18.110 Η συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(1) = -1$, $f'(1) = 2$ και:

$$f(x) - f''(x) = \ln x + \frac{1}{x^2} \text{ για κάθε } x > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \ln x - e^{1-x} \quad \text{με } x > 0$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \lambda$ με $0 < \lambda < 1$.

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} E(\lambda)$.

18.111 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

και έστω F μια αρχική της f με $F(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$F(x + 1) - F(x) = F\left(\frac{1}{x^2 + x + 1}\right)$$

β) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(F(x + 1) - F(x)\big) = 0$,

γ) υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1 + t^2} dt = \frac{1}{1 + \xi^2}$$

δ) $F(x) \le x$ για κάθε $x \ge 0$,

ε) $\int_0^1 F^2(x)dx < \frac{1}{3}$.

18.112 Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ισχύει:

$$xe^{f(x)}\big(1 + (x - 1)f'(x)\big) = 1$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \begin{cases} \ln\dfrac{\ln x}{x - 1}, & \text{αν } 0 < x \neq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

β) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

ε) Αν $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha + 1 = (\beta + 1)^{\frac{\alpha}{\beta}}$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$.

στ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0^+} \int_x^{\frac{1}{2}} \frac{t - 1}{t} e^{f(t)} dt$$

18.113 Η συνάρτηση $f: (0, e) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in (0, e)$ ισχύει:

$$f(x) - \ln f'(x) = \ln x$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι γνησίως αύξουσα,

ii) $f(x) = -\ln(1 - \ln x)$ με $x \in (0, e)$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = e^{1-x} \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

i) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$f(g(x_0)) + \frac{3}{x_0} = 0$$

iii) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^{x_0} \frac{\ln^2 x}{x} dx = \frac{\ln^2 x_0}{x_0}$$

18.114 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^3 + x + \sigma\upsilon\nu x + 1$$

Επιπλέον θεωρούμε συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$g^3(x) + g(x) = f(x)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η g είναι συνεχής,

ii) η g είναι παραγωγίσιμη,

iii) $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,

iv) $g(x) \ge x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\sigma\upsilon\nu x dx$$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$(2 - x_0)f(x_0) + x_0 \int_0^2 f^{-1}(x)dx = 2x_0$$

18.115 Η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(0)=\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{4\sqrt{x}}dx$$

και:

$$f'(x)>f(x) \quad \text{για κάθε } x\geq 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)>e^x$$

για κάθε $x>0$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)>\int_0^1 f(x)dx$$

γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{f(x)})}{x+f(x)}$$

δ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

$$\big(f(x)-2021\big)\big(f(x^2)-f(2^x)\big)=0$$

18.116 Η συνάρτηση $f\colon A\to\mathbb{R}$ με $f(A)=\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$e^{f(x)}+f(x)=x$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1},

ii) $A=\mathbb{R}$.

β) Αν $x>1$, να αποδείξετε ότι:

$$(x^2+1)f(x^2)>x^2f(1)+f(x^4)$$

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_1^{e+1}f(x)e^{f(x)}dx$$

18.117 Η συνάρτηση $f\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x>0$$

και:

$$1+\ln\big(1+f(x)\big)=f'(x) \quad \text{για κάθε } x\geq 0$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η ευθεία $y=x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f,

β) η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή,

γ) $x\leq f(x)\leq e^x-1$ για κάθε $x\geq 0$,

δ) $f([0,+\infty))=[0,+\infty)$,

ε) η C_f δεν έχει ασύμπτωτες,

στ) το σύνολο τιμών της f'' είναι το διάστημα $(0,1]$,

ζ) $\frac{f(2)}{2}>f(1)>2\ln 2$.

18.118 Η συνάρτηση $f\colon(1,+\infty)\to(0,+\infty)$ με $f(e)=1$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x>1$ ισχύει:

$$\big(xf'(x)\big)^2+4f(x)=4x\sqrt{f(x)}\cdot f'(x)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\ln^2 x \quad \text{με } x>1$$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας ε της C_f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την εφαπτομένη ε και τις ευθείες $x=e$ και $x=e^2$.

δ) Σημείο Μ κινείται κατά μήκος της C_f και έστω Ν η προβολή του Μ στον άξονα $x'x$. Αν το σημείο Ν απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με σταθερή ταχύτητα, να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\widehat{NOM}$ τη χρονική στιγμή t_0 που το Μ διέρχεται από το σημείο $P\big(e,f(e)\big)$.

18.119 Η συνάρτηση $f\colon[0,4]\to\mathbb{R}$ με $f(1)=1$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f''(x)>0 \quad \text{για κάθε } x\in[0,4]$$

Η συνάρτηση $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ είναι συνεχής και ισχύει:

$$\int_{9-f(4)}^{f(2)+f(3)}g(x)\,dx=0$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x)=x$$

έχει ακριβώς δύο λύσεις.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς μία εφαπτόμενη ευθεία της C_f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Αν ισχύει:

$$\lim_{h\to+\infty}\left(\frac{h^2+h}{h+3}\left(f\left(1+\frac{1}{h}\right)-1\right)\right)=\frac{16}{13}$$

να αποδείξετε ότι:

i) $f'(1)=\frac{16}{13}$ ii) $\int_0^1 f(x)\,dx>\frac{5}{13}$

iii) $f(0)+\int_1^2 xf'(x-1)\,dx<\frac{21}{13}$

18.120 Η συνάρτηση $f\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=e$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$e^{-\frac{1}{x}}f'(x)=1-\frac{1}{x}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=xe^{\frac{1}{x}} \quad \text{με } x>0$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Αν $\alpha,\beta>0$, να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha+\beta)e^{\frac{2}{\alpha+\beta}}\le \alpha e^{\frac{1}{\alpha}}+\beta e^{\frac{1}{\beta}}$$

ε) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^3 f(x)\,dx>4\sqrt{e}$$

18.121 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to(-1,1)$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f(0)\neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχουν $x_1, x_2\in(-1,1)$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια, ώστε:

$$f(x_1)=x_1 \quad \text{και} \quad f(x_2)=-x_2$$

β) η εξίσωση $f(x)f'(x)=x$ έχει τουλάχιστον μία λύση,

γ) $\int_{-1}^1 xf(\text{συν}x)\,dx=0.$

18.122 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(1)=2,\quad f'(1)=0$$

$$xf(x)\ge \text{ημ}x \quad \text{για κάθε } x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \quad \text{και}$$

$$f''(x)\neq 0 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=1$,

ii) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=1$,

iii) η f είναι κοίλη.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$f'\big(f(x)-1\big)\ge 0 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x)=2^x$$

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$F(x)=\big(f'(x)+f(x)\big)e^x$$

και τις ευθείες $x=0$, $y=0$ και $x=1$.

18.123 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(1)<f'(x)<f(2)$$

Έστω F μια αρχική της f με $F(0)=0$. Επιπλέον θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$G(x)=F(x)-\frac{f(1)}{2}x^2$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1)>0$,

β) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία λύση,

γ) $2\int_1^2 f(x)\,dx>\int_1^2 xf(x)\,dx>\int_1^2 f(x)\,dx$,

δ) η G είναι κυρτή,

ε) $F(2)>2f(0)+2f(1)$.

18.124 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=\ln 2$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$e^{-x}\big(f'(x)+1\big)+\ln\frac{f'(x)+1}{2}=2e^{-f(x)}+x-f(x)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\ln(e^{2x}+1)-x \quad \text{με } x\in\mathbb{R}$$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Αν $x>0$, να αποδείξετε ότι:

$$f(x)>x>f'(x)$$

δ) Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} > e^{\alpha-\beta}$$

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^{\xi} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

18.125 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$xf'(x) - f(x) = \frac{x^2}{9}\int_0^3 f(t)\,dt$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x^2 \quad \text{με } x \geq 0$$

β) Αν $n \in \mathbb{N}^*$, να διερευνήσετε το όριο:

$$\ell = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f^2(x)}{x^n}\,\eta\mu\frac{1}{x^2}\right)$$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$g(x) = -\ln^2 x$$

i) Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα.

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$x(\ln^2 x - 1) > 2(x - e)\ln x \quad \text{για κάθε } x > e$$

iii) Αν Μ και Ν είναι σημεία των C_f και C_g αντίστοιχα με την ίδια τετμημένη, να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε η απόσταση ΜΝ να γίνεται ελάχιστη.

18.126 Η συνάρτηση $f\colon [0, 3] \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή και γνησίως μονότονη παράγωγο. Επίσης ισχύουν οι σχέσεις:

$$f'(2) = 4 \quad \text{και} \quad f(1) + f(2) < f(0) + f(3)$$

Οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία $A(2, f(2))$ και $\Gamma(0, f(0))$ τέμνονται στο σημείο $B(1, f(0))$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι κυρτή, **ii)** $f(2) - f(0) = 4$,

iii) $f'(0) = 0$, **iv)** $f(1) > f(0)$.

β) Αν $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{8}{3}$ και το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις εφαπτομένες της C_f στα σημεία $A(2, f(2))$ και $\Gamma(0, f(0))$ ισούται με $\frac{2}{3}$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f(2) = 4$,

ii) να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to0^+}\left(f(x)\,\eta\mu\frac{2021}{f(x)}\right)$$

18.127 Έστω $\alpha > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \alpha x + \ln x \quad \text{με } x > 0$$

για την οποία ισχύει:

$$1 + \int_1^2 f(x)\,dx = 2\ln2 + \frac{3}{2}(e^{\alpha} + 1 - e)$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^{e+1} f^{-1}(x)\,dx$$

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\int_{2x^2+3}^{2x^2+4} f(t)\,dt > \int_{x^2+4}^{x^2+5} f(t)\,dt$$

δ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(\ln x) + 1 - x}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$$

18.128 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει γνησίως αύξουσα δεύτερη παράγωγο και ισχύουν:

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x) + x^2 + 4x + 5}{x + 2} = 2$$

και:

$$f'(x) > 2 \quad \text{για κάθε } x \neq -2$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(-2) = -1$ και $f'(-2) = 2$

ii) $f''(-2) = 0$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση.

δ) Αν x_0 είναι η λύση της εξίσωσης $f(x)=0$, τότε:

i) να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f^2(x)\ln f(x)+x}{f(x)}$$

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$2<\int_{-2}^{x_0} f\left(f(x)\right)f'(x)\,dx<f(0)$$

18.129 Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, κυρτή και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left(f'(x)\right)^2+2f'(x)+\frac{1}{x^2+1}=0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x \quad \text{με } x\in\mathbb{R}$$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f^{-1}(x)\ln x$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$.

18.130 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=x^3+x+1$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x)=f^{-1}(x)$$

γ) Να αποδείξετε ότι:

i) $\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right|\le|x-y|\le\left|f(x)-f(y)\right|$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$,

ii) η f^{-1} είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

iii) υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$f^{-1}(\xi)+2\xi=0$$

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{\xi}^{1} f^{-1}(x)\,dx$$

ε) Έστω F μια αρχική της f' η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$F^2(x)\ge F(x)F(2-x)$$

Να βρείτε τον τύπο της F.

18.131 Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^3(x)+f(x)=2x$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι περιττή,

ii) η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

γ) Αν $0<x<1$, να αποδείξετε ότι:

$$(1+x+x^2)f(x^2)>(x+x^2)f(x)+f(x^4)$$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$.

18.132 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & \text{αν } x\ne0\\[2mm] 1, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

Έστω F μια αρχική της f με $F(1)=e$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η F είναι γνησίως αύξουσα,

ii) η F είναι κυρτή.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_F, την εφαπτομένη της C_F στο σημείο $M\left(1,F(1)\right)$ και την ευθεία $x=0$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+e^x}{x\left(F(x)+1\right)}$$

18.133 Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ η οποία για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\left|(x^2+1)f(x)-(y^2+1)f(y)\right|\le(x-y)^2$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}\quad \text{με } x\in\mathbb{R}$$

β) Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1) = \frac{\pi}{4}$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 F(x)\,dx$$

γ) Αν G είναι μια αρχική της $g(x) = f(x)\eta\mu x$, να αποδείξετε ότι:

i) αν $G(1) = 0$, τότε η εξίσωση:

$$(x^2 + 1)G(x) + x\eta\mu x = 0$$

έχει τουλάχιστον μία λύση,

ii) για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\eta\mu x\,dx\right| \le \frac{1}{2}|\beta - \alpha|$$

18.134 Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\int_e^{f(1)} e^{x^2}\,dx = e - f(1)$$

και:

$$f'(x) - e^x - 1 = \frac{f(x) - e^x}{x} \quad \text{για κάθε } x > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1) = e$,

ii) $f(x) = e^x + x\ln x$ με $x > 0$,

iii) $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

β) Έστω F μια αρχική της f. Να αποδείξετε ότι:

i) $F(x) > F(1) + e(x - 1)$ για κάθε $x > 1$,

ii) $\int_2^4 F(x)\,dx > 2F(1) + 4e$,

iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)\eta\mu F(x)}{e^x(x + \ln x)} = 0$,

iv) η F είναι αντιστρέψιμη και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης F^{-1}, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = F(1)$ και $x = F(2)$.

18.135 Η συνάρτηση $f: [1, 2] \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και ισχύει:

$$f''(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in [1, 2]$$

Αν η ευθεία $y = x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $M(2, f(2))$, τότε:

α) να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα,

β) να βρείτε το σύνολο τιμών της f,

γ) να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{2} < \int_1^2 f(x)\,dx < \frac{3}{2}$$

δ) αν F είναι μια αρχική της f, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$F(x^2 - 3x + 4) = F(1) + \frac{x^3 - 1}{2}$$

έχει τουλάχιστον μία λύση.

18.136 Η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to [0, e)$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν οι σχέσεις:

$$\int_1^{f(1)} f(x)\,dx = 0$$

και:

$$\frac{xf(x)\ln f(x)}{x + 1} + xf'(x)\ln(x + 1) = f(x)$$

για κάθε $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\ln(x+1)}}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Αν $\kappa > 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_\kappa^{\kappa^2} xf(x)\,dx > 2\kappa^2 \int_1^{\sqrt{\kappa}} xf(\kappa x^2)\,dx$$

δ) Έστω F μια αρχική της f.

i) Αν για τη συνάρτηση $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\frac{g(x)}{x} \ge F(x + 1) - F(x) \quad \text{για κάθε } x > 0$$

να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x + F(x) = 2 + F(1) + \frac{\int_2^3 f(x)\,dx + 4\int_1^2 f(x)\,dx}{5}$$

έχει ακριβώς μία θετική λύση η οποία βρίσκεται στο διάστημα (2, 3).

18.137 Η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο, είναι κοίλη και ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(0) = -1, \quad f'(0) = 2 \quad \text{και} \quad \int_0^1 f(x)\,dx > 0$$

Έστω F μια αρχική της f με $F(0) = 0$.

α) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{\ln(x+1)}$$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση:

$$g(x) = F(x) - x^2 + x$$

ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι:

i) $\displaystyle\int_0^1 (1-x)f'(x)\,dx > 1,$

ii) $\displaystyle\int_0^1 (1-x)f(x)\,dx < -\frac{1}{6},$

iii) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(0, 1)$.

18.138 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιττή, παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(1) = \ln 2 \quad \text{και}$$

$$e^{\frac{f(x)}{x}}\left(xf'(x) - f(x)\right) = 2x^3 \quad \text{για κάθε } x \neq 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x\ln(x^2+1) \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{x}{(e^{x-1}-1)\ln(x-1)} \quad \text{με } 1 < x \neq 2$$

i) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_g.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x'x και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_g.

18.139 Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = -1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f'(x)e^{x+f(x)} = 3x^2 - x^3$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) = 3\ln x - x$ με $x > 0$,

ii) η εφαπτόμενη ευθεία της C_f σε οποιοδήποτε σημείο της δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη C_f εκτός από το σημείο επαφής,

iii) από κάθε σημείο του άξονα y'y διέρχεται ακριβώς μία εφαπτόμενη ευθεία της C_f.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την εφαπτόμενη ευθεία της C_f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και την ευθεία $x = 1$.

γ) Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1) \neq F(2)$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 2)$ τέτοια, ώστε:

$$\int_1^2 F(x)f(x)\,dx = f(\xi_1)F(\xi_2)$$

18.140 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'''(x) = f''(x) + 2e^{-x}$$

Επίσης η f' είναι άρτια και ισχύουν οι σχέσεις:

$$f'(0) = f''(0) \quad \text{και} \quad f(1) + f(-1) = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^x - e^{-x} - 2x \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να σχεδιάσετε τη C_f.

ε) Να βρείτε την τιμή του $\alpha > 0$ για την οποία ισχύει:

$$2\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = 1 - 2\ln^2 2$$

στ) Να αποδείξετε ότι $\ln^2 2 < \frac{1}{2}$.

18.141 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο σημείο της $M(2, f(2))$ έχει εξίσωση $y = x + 1$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$3\int_1^2 f^2(x)f'(x)\,dx = 19 \quad \text{και}$$

$$xf'(x) + f(x) > 2x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1)=2$,

β) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$,

γ) $\frac{3}{2}+\ln 2<\int_1^2 f(x)\,dx<\frac{3}{2}+2\ln 2$.

18.142 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^3(x)+f(x)=e^{-3x^2}+e^{-x^2}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=e^{-x^2} \quad \text{με } x\in\mathbb{R}$$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση:

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}-ef(x)$$

ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$1-e<\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx+e\int_1^0 f(x)\,dx<e-1$$

δ) Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1)=0$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 F(x)\,dx$$

ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h: [0,1]\to\mathbb{R}$ με:

$$h(x)=\frac{1}{f(x)}$$

i) Να αποδείξετε ότι η h είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση h^{-1}.

ii) Έστω E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_h, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$ και έστω E_2 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{h^{-1}}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$. Να αποδείξετε ότι:

$$E_1+E_2=e$$

18.143 Οι συναρτήσεις $f, g: (-1,+\infty)\to\mathbb{R}^*$ με $f(0)=g(0)=1$ είναι παραγωγίσιμες και για κάθε $x>-1$ ισχύει:

$$2f'(x)+f^2(x)g(x)=2g'(x)+g^2(x)f(x)=0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)g(x)>0$ για κάθε $x>-1$,

ii) $f=g$,

iii) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ με $x>-1$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\alpha+1$ με $\alpha>0$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)$.

18.144 Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$(x^2+1)f'(x)=2\big(1-xf(x)\big) \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+1} \quad \text{με } x\in\mathbb{R}$$

β) Έστω $E(\alpha)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=\alpha>0$. Αν το α μεταβάλλεται με ρυθμό $\frac{10}{3}$ cm/s, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(\alpha)$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία είναι $\alpha=3$ cm.

γ) Η συνάρτηση $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$|g(x)+x-2|\le|f(x)|$$

i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε: $y=-x+2$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

ii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_g, την ευθεία ε και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, να αποδείξετε ότι:

$$E\le\ln 2$$

18.145 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(0)=0, \quad f'(0)=2 \quad \text{και}$$

$$(x^2+1)f''(x)+4xf'(x)+2f(x)=0 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+1} \quad \text{με } x\in\mathbb{R}$$

β) **i)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(2, f(2))$ και τις ευθείες $y = 0$, $x = 2$ και $x = \alpha > 2$.

ii) Αν το α μεταβάλλεται με ρυθμό $\sqrt{6}+2$ μονάδες/s, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(\alpha)$ τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $\alpha(t_0) = 2\sqrt{6}$.

γ) Έστω $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση για την οποία ισχύει $g'(1) > 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = g(x)$$

έχει το πολύ μία λύση στο $(1, +\infty)$.

δ) Αν F είναι μια αρχική της f, να αποδείξετε ότι:

$$|F(\beta) - F(\alpha)| \leq |\beta - \alpha|$$

για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

18.146 Έστω συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ η οποία είναι κυρτή. Αν G είναι μια αρχική της συνάρτησης:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad \text{με } x > 0$$

να αποδείξετε ότι:

α) η G είναι κυρτή,

β) αν $\alpha, \beta > 0$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \frac{f(x)}{x}\,dx \leq \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \frac{f(x)}{x}\,dx$$

γ) η εξίσωση $e^x f(x) = x$ έχει το πολύ μία θετική λύση,

δ) $f(x) \leq xf'(1)$ για κάθε $x \in [0, 1]$,

ε) $(x+1)f(x) < xf(x+1)$ για κάθε $x > 0$,

στ) αν $G(1) = 2G(2)$, τότε:

$$\int_1^2 \big(G(x) + f(x)\big)\,dx = 0$$

18.147 Δίνεται κυρτή συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$$

Αν G είναι μια αρχική της συνάρτησης:

$$g(x) = \frac{f(x) - 1}{x - 1} \quad \text{με } x > 1$$

και ισχύει $G(2) = 0$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $f'(1) = 0$,

β) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα,

γ) να αποδείξετε ότι η G είναι γνησίως αύξουσα,

δ) να αποδείξετε ότι η G είναι κυρτή,

ε) να λύσετε την εξίσωση:

$$G(x) = \big(f(2) - 1\big)(x - 2)$$

18.148 Δίνεται συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Έστω F μια αρχική της f για την οποία ισχύουν:

$$F(0) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$$

α) Αν $x > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$F(x) < xf(x) < F(2x) - F(x) < xf(2x)$$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \geq 0$.

γ) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 4$, να αποδείξετε ότι:

$$f(1) + f(2) < E - f(2) < 2f(4)$$

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\alpha \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(\alpha) = F(\alpha)$.

ε) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\beta \in (0, \alpha)$ ισχύει:

$$f(\alpha) < \beta f(\beta)$$

18.149 Η συνάρτηση $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και κυρτή. Επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1 \quad \text{και} \quad \int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1) = 0$, να αποδείξετε ότι:

α) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{F(x)}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}$,

β) $\displaystyle\frac{x^2}{2} - x \leq F(x) \leq \frac{x^2+1}{2} - x$ για κάθε $x \in [0, 1]$,

γ) $\displaystyle -\frac{1}{6} < \int_0^1 xf(x)\,dx < \frac{1}{3}$,

δ) υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$,

ε) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $F''(\xi) = 0$ και η C_F παρουσιάζει καμπή στο σημείο $M(\xi, F(\xi))$,

στ) $f(0) > 0 > f(\xi)$.

18.150 Η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, με $f(0) = 0$ και $f(1) = e$, είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$x^2 f'(x) = (x - 1) f(x)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ με $x > 0$,

ii) η f δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$F(x) = \int_1^x \left(f(t) + tf'(t) - tf''(t)\right) dt \quad \text{με } x > 0$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x}$$

18.151 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κοίλη και ισχύει:

$$f(1) = f'(1) = 0$$

Έστω F μια αρχική της f με $F(1) = 0$ και G μια αρχική της F με $G(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων F και G εφάπτονται,

β) η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή στη θέση $x_0 = 1$,

γ) η G παρουσιάζει μέγιστη τιμή στη θέση $x_0 = 1$,

δ) για κάθε $x < 1$ ισχύει:

$$\frac{G(x)}{F(x)} < 1$$

18.152 Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$e^{f(x)}\left(f^2(x) - 2f(x) + 3\right) = x$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

β) Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι κυρτή.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, την εφαπτόμενη ευθεία της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο τομής της με τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

δ) Έστω τα σημεία $M(x, f^{-1}(x))$ και $N(f^{-1}(x), x)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

i) Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτόμενων ευθειών των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία M και N αντίστοιχα είναι ίσο με 1.

ii) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση των σημείων M και N.

18.153 Η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ με $f(0) = 0$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \geq 0$ ισχύει:

$$f'(x)\left(f(x) + 1\right) = e^{-f(x)}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = xe^{-f(x)} \quad \text{με } x \geq 0$$

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο σημείο $M(0, f(0))$ και την ευθεία $x = \lambda e^{\lambda}$ με $\lambda > 0$.

ε) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$$

18.154 Η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $0 < \alpha < \beta$ είναι κυρτή και ισχύει:

$$\alpha f(\beta) = \beta f(\alpha)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$$

β) $\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} < \dfrac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x}$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$,

γ) $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx < \frac{(\beta+\alpha)\big(f(\beta)-f(\alpha)\big)}{2}$.

18.155 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(0)=\ln 2, \quad f'(0)=\frac{1}{2} \quad \text{και}$$

$$f''(x)e^{f(x)-x}+f'(x)=1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\ln(1+e^x) \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{4}+\ln 2 < \int_0^1 f(x)\,dx < \ln(1+e)$$

18.156 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x)+\ln f(x)=x$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^4\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)dt > 3$$

δ) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \frac{f^2(x)}{1+f(x)}\,dx = f(\xi)f'(\xi)$$

18.157 Δίνεται η συνάρτηση $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με $f(0)=0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και έστω F μια αρχική συνάρτηση της f με $F(0)=0$. Αν για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f'(x)=e^{2F(x)}$, τότε:

α) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία,

β) να αποδείξετε ότι:

$$f'(x)=f^2(x)+1 \quad \text{για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

γ) να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=1$,

δ) να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_0^{x_0} f(x)\sqrt{1+f^2(x)}\,dx$$

ε) να λύσετε την ανίσωση:

$$f'(x)f'\left(\frac{1}{2}\right) > f'(x+1)f'\left(-\frac{1}{2}\right)$$

στ) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x)=f(x)\text{συν}x-\text{ημ}x \quad \text{με } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

είναι σταθερή και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της f.

18.158 Οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(0)=1$ είναι παραγωγίσιμες και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$f'(x)=g^2(x)\neq 0 \quad \text{και} \quad f^2(x)+g^2(x)=1$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$g'(x)=-g(x)f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

β) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

δ) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες $y=x$ και $x=1$, να αποδείξετε ότι:

$$E=\frac{1}{2}+\ln g(1)$$

18.159 Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$. Έστω F, G είναι αρχικές των f, g αντίστοιχα με:

$$F(0)=G(0)=0$$

Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x)+G(x)=g(x)+F(x)=1$$

α) να μελετήσετε τις συναρτήσεις f, g ως προς το πρόσημο,

β) να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων f και g,

γ) να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 f(x^2)\,dx > \frac{2}{3}$$

18.160 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad \text{και}$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επίσης για κάποιο $\alpha > 0$ ισχύει:

$$e^{f'(x)} - |f(\alpha) - 1|f'(x) \geq 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(\alpha) = 2$,

ii) $0 \leq f(x) \leq 2 + (x - \alpha)f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Αν $E(\alpha)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \alpha$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^\alpha f^2(x)\,dx < \frac{4}{3}E(\alpha)$$

18.161 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν οι σχέσεις:

$$\int_0^{f(0)} (e^{x^2} + x^2)\,dx = f(0)$$

και:

$$(e^x - 1)f(x) + (e^x - x)f'(x) = (e^x - x)f(x) + 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0) = 0$,

ii) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$ με $x \in \mathbb{R}$,

iii) η f παρουσιάζει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα στις θέσεις x_1 και x_2 με $x_1 < x_2$.

β) Έστω F μια αρχική της f.

i) Αν $x > 2$, να αποδείξετε ότι:

$$xf(x) - F(x) < 2f(x) - F(2)$$

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$$

iii) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$G(x) = \frac{F(x)}{x} + x$$

18.162 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(-2) = -4 \quad \text{και} \quad f(2) = 4$$

είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x) \leq 2$$

Η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κοίλη και ισχύει:

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)g(x) - x^2}{x - 2} = f'(2) + 4$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $g(2) = 1$ και $g'(2) = 2$,

β) $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$,

γ) η συνάρτηση:

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - 1}{x - 2}, & \text{αν } x \neq 2 \\[2ex] \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{2^{g(t)+1} + 3^{g(t)}}{2^{g(t)} - e^{g(t)}}, & \text{αν } x = 2 \end{cases}$$

είναι γνησίως φθίνουσα,

δ) $f(0) = 0$,

ε) η εξίσωση:

$$f(6 - 2x) = (2 - x)\left(\int_2^4 \frac{G(x)}{x^2}\,dx - \frac{1}{2}\right)$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(2, 3)$.

18.163 Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ με $f(1) = e$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(x)\ln f(x) + 2xf'(x) = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ με $x > 0$,

ii) η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

γ) Να αποδείξετε ότι:

i) αν $x \in (0, 3)$, τότε:

$$\frac{2}{3 - x} \geq e^{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

ii) $e + \sqrt[3]{e} > 2\sqrt[5]{e}$.

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{e}^{e^2} \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right) f^{-1}(x)\,dx$$

18.164 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

ii) αν $n \in \mathbb{N}^*$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = \frac{f(x_0)}{n+1}$$

iii) $\lim\limits_{x \to 1} \left((x-1) \int_0^x \frac{f(t)}{t-1}\,dt\right) = 0$

β) Έστω ότι η f είναι γνησίως μονότονη με:

$$f(0) = 0 \quad \text{και} \quad f(1) = 1$$

i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g: [0, 1] \to \mathbb{R}$ με:

$$g(x) = f^2(x) + xf(x)$$

ii) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, 1) και ισχύουν:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{και}$$

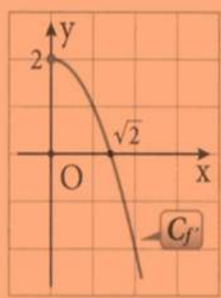
$$f(x) \le \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \quad \text{για κάθε } x \in [0, 1]$$

να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ εφάπτεται στη C_f και ότι η f' δεν είναι αντιστρέψιμη.

Κριτήριο αξιολόγησης

Θέμα 1

Α. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\sqrt{2}) = 2$ είναι περιττή και παραγωγίσιμη. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f', η οποία είναι σχεδιασμένη στο $[0, +\infty)$.



α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(x)\,dx$$

δ) Να γίνει μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

Β. Ένα στερεό περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα με αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0 και γωνιακή επιτάχυνση α_γ. Αν η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω συναρτήσει του χρόνου t δίνεται από τη σχέση:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha_\gamma t$$

να αποδείξετε ότι η γωνία στροφής θ(t) δίνεται από τη σχέση:

$$\theta(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2$$

Θέμα 2

A. Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = xe^{x^2}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς το πρόσημο.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = e$.

B. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)e^x + 1}{x^2}, & \text{αν } x \neq 0 \\ c, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

όπου $c \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $c = \dfrac{1}{2}$ και $f'(0) = \dfrac{1}{3}$,

β) η f είναι γνησίως αύξουσα,

γ) $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$,

δ) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{(e-1)^2}{2}$.

Θέμα 3

A. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2+1} \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

β) Αν F είναι μια αρχική της f, να αποδείξετε ότι:

$$F(4x) - F(2x) < 2xf(4x) \quad \text{για κάθε } x > 0$$

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{F(4x) - F(2x)}{x}, & \text{αν } x > 0 \\ 2, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

είναι γνησίως αύξουσα.

B. Οι συναρτήσεις $f, g\colon [1, \alpha] \to \mathbb{R}$ με $\alpha > 1$ και $f(1) = g(1) = 1$ είναι συνεχείς και για κάθε $x \in [1, \alpha]$ ισχύει:

$$f(x) + g(x) = \int_1^{\alpha} f(x)g(x)\,dx$$

Να αποδείξετε ότι $\alpha \geq 3$.

Θέμα 4

Η συνάρτηση $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ με:

$$f(1) = \sqrt{\eta\mu 1}$$

είναι συνεχής, παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$f'(x) = \frac{f(x)}{2x} + \frac{x\sigma\upsilon\nu x}{2f(x)}$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$1 - \sigma\upsilon\nu 1 < \int_0^1 f(x)\,dx < \frac{1}{2}$$