16 Επανάληψη στα όρια και στη συνέχεια

Θεωρία - Ερωτήσεις κλειστού τύπου

Α. Ελέγχω τις γνώσεις μου στη θεωρία

Ορισμοί

16.1 Έστω μια συνάρτηση $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε η f λέγεται συνεχής στο x_0;

16.2 Πότε μια συνάρτηση $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ λέγεται συνεχής;

16.3 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon [\alpha,\ \beta] \to \mathbb{R}$. Πότε η f λέγεται συνεχής;

Προτάσεις

16.4 Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) - \ell\big) = \ldots$ β) $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) = \ldots$

16.5 Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \neq 0$. Ποια πρόταση ισχύει για το πρόσημο του ℓ και το πρόσημο της f κοντά στο x_0;

16.6 Έστω οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες είναι:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = m$$

Αν κοντά στο x_0 ισχύει $f(x) \leq g(x)$, ποια είναι η διάταξη των ℓ και m;

16.7 Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = m \quad \text{με } \ell,\ m \in \mathbb{R}$$

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x)\right) = \ldots$

β) Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\lambda f(x)\right) = \ldots$

γ) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) g(x)\right) = \ldots$

δ) Αν $m \ldots 0$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ldots$

ε) $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \ldots$

στ) Αν $\nu \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ και κοντά στο x_0 ισχύει $f(x) \ldots 0$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = \ldots$

ζ) Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x)\right)^{\nu} = \ldots$

η) Αν $\ell \ldots 0$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \ldots$

16.8 Θεωρούμε ένα πολυώνυμο $P(x)$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

16.9 Θεωρούμε τα πολυώνυμα $P(x)$, $Q(x)$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $Q(x_0) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

16.10 Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

16.11 Να συμπληρώσετε τα κενά στην παρακάτω πρόταση:
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x| \ldots |x|$. Η ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν $x = \ldots$

16.12 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} (\eta\mu x) = \ldots$

β) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = \ldots$ και αν $\alpha \neq 0$, τότε $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{\alpha x} = \ldots$

γ) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \ldots$ και αν $\alpha \neq 0$, τότε $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu(\alpha x) - 1}{\alpha x} = \ldots$

16.13 Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g για τις οποίες ορίζεται η σύνθεση $f \circ g$ κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Ποια πρόταση ισχύει για το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(g(x)\right)$;

16.14 Η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,\, x_0) \cup (x_0,\, \beta)$ και ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

α) Ποιο είναι το πρόσημο της f κοντά στο x_0;

β) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(-f(x)\right) = \ldots$ **ii)** $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \ldots$ **iii)** $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \ldots$

iv) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ και $\kappa \in \mathbb{N}$ με $\kappa \geq 2$, τότε:

$$\lim_{x \to x_0} f^{\kappa}(x) = \ldots \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \ldots$$

16.15 Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$, να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^{2\nu}} = \ldots$ **β)** $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = \ldots$ **γ)** $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = \ldots$

16.16 Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, ποια πρόταση ισχύει για το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}$;

16.17 Έστω $x_0\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=m$$

Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες:

α)

ℓ	$\alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
m	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell+m$						

β)

ℓ	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
m	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
ℓm										

16.18 Ποιες είναι οι απροσδιόριστες μορφές για τα όρια του αθροίσματος, της διαφοράς, του γινομένου και του πηλίκου συναρτήσεων;

16.19 Αν $\nu\in\mathbb{N}^*$, να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\nu=\ldots$ **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\nu=\ldots$ **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^\nu}=\ldots$ **δ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^\nu}=\ldots$

16.20 Θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0 \quad \text{με } \alpha_\nu\neq 0$$

Ποια πρόταση ισχύει για τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)$;

16.21 Θεωρούμε τη ρητή συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa+\beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\ldots+\beta_1 x+\beta_0} \quad \text{με } \alpha_\nu\neq 0 \text{ και } \beta_\kappa\neq 0$$

Ποια πρόταση ισχύει για τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;

16.22 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ με $0<\alpha\neq 1$. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\alpha>1$, τότε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ldots \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\ldots$$

β) Αν $0<\alpha<1$, τότε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ldots \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\ldots$$

16.23 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \log_\alpha x$ με $0 < \alpha \neq 1$ και $x > 0$. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\alpha > 1$, τότε:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ldots \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ldots$$

β) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ldots \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ldots$$

16.24 Έστω f και g δύο συναρτήσεις οι οποίες είναι ορισμένες κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και ισχύει:

$$f(x) \geq g(x) \quad \text{κοντά στο } x_0$$

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ldots$ **β)** Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ldots$

16.25 Ποιες προτάσεις ισχύουν για τις πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων;

16.26 Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano. Ποια είναι η γεωμετρική του ερμηνεία;

16.27 Να διατυπώσετε τις συνέπειες του θεωρήματος Bolzano.

16.28 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Αν n είναι αριθμός μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = n$$

16.29 Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής (Θ.Μ.Ε.Τ.).

16.30 Η συνάρτηση $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Ποιο είναι το σύνολο τιμών της f;

16.31 Η συνάρτηση $f\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και γνησίως μονότονη. Ποιο είναι το σύνολο τιμών της f;

Β. Ερωτήσεις τύπου πολλαπλής επιλογής

Σε καθεμία από τις επόμενες ημιτελείς προτάσεις να επιλέξετε τη φράση που τη συμπληρώνει σωστά.

16.32 Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$. Επιπλέον θεωρούμε συνάρτηση g η οποία είναι ορισμένη κοντά στο x_0.

Α: Αν $g(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = +\infty$.

Β: Αν $g(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = -\infty$.

Γ: Αν $\lim_{x \to x_0} g(x) < 0$, τότε $\lim_{x \to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = -\infty$.

Δ: Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \to x_0} g(x)$, τότε $\lim_{x \to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = +\infty$.

16.33 Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g και h για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell^2 + 1, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 2\ell \quad \text{όπου } \ell \in \mathbb{R}$$

και:

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{κοντά στο } x_0$$

Τότε:

A: δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

B: $\lim_{x \to x_0} f(x) = 2\ell$.

Γ: $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$.

Δ: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^2 + 1$.

16.34 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) \leq \ln x \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Τότε:

A: εφόσον υπάρχει το όριο $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, ισχύει $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

B: δεν μπορεί να προκύψει κάποιο συμπέρασμα για το όριο $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

Γ: υπάρχει το όριο $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ και ισχύει $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Δ: υπάρχει το όριο $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ και ισχύει $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

16.35 Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 1$. Τότε:

A: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm 1$.

B: εφόσον υπάρχει το όριο $\lim_{x \to x_0} f(x)$, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm 1$.

Γ: αν κοντά στο x_0 έχουμε $f(x) > 0$, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = -1$.

Δ: αν κοντά στο x_0 έχουμε $f(x) < 0$, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$.

16.36 Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(\alpha)f(\beta) > 0$. Τότε:

A: η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση στο (α, β).

B: η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α, β).

Γ: η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α, β).

Δ: δεν μπορούμε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α, β).

16.37 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^8 + 2x - 4$ με $x \in \mathbb{R}$. Η f παίρνει την τιμή 100 στο διάστημα $(1, 2)$, διότι:

A: $f(1)f(2) < 0$.

B: η f είναι συνεχής και ισχύει $f(1) < 100 < f(2)$.

Γ: η f είναι συνεχής και ισχύει $f(2) < 100 < f(1)$.

Δ: η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[1, 2]$.

Γ. Θέματα οργάνωσης λογικών δομών

Σε καθένα από τα παρακάτω θέματα να επιλέξετε το ελάχιστο πλήθος από τις δοσμένες προτάσεις και να τις διατάξετε με τέτοιον τρόπο, ώστε οι πρώτες από αυτές να αποτελούν τις προϋποθέσεις και η τελευταία να αποτελεί το συμπέρασμα της αντίστοιχης πρότασης.

16.38 Κριτήριο παρεμβολής

Α: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Β: Οι συναρτήσεις f, g και h είναι ορισμένες κοντά στο x_0

Γ: $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$

Δ: $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0

Ε: $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = m$ με $\ell \neq m$

16.39 Θεώρημα Bolzano - Θ.Ε.Τ.

Α: Αν $f(\alpha) < n < f(\beta)$

Β: $f(\alpha) f(\beta) < 0$

Γ: Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = n$

Δ: Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

Ε: Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο (α, β)

ΣΤ: $f(\alpha) \neq f(\beta)$

Ζ: Ο αριθμός n είναι μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$

16.40 Θ.Μ.Ε.Τ.

Α: Υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ στα οποία η f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή

Β: $f(\alpha) \neq f(\beta)$

Γ: Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

Δ: Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ στα οποία η f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή

Δ. Αποδείξεις και αντιπαραδείγματα σε ερωτήσεις τύπου «Σωστό - Λάθος»

Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις επόμενες προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ). Να αποδείξετε όσες θεωρείτε ότι είναι σωστές και να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα σε όσες θεωρείτε ότι είναι λανθασμένες.

16.41 Η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και έστω $x_0 \in \Delta$. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x_0) > 0$.

16.42 Αν τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ δεν υπάρχουν, τότε δεν υπάρχει και το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big)$.

16.43 Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

16.44 Αν για τη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$, τότε $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(2x)}{2x} = 2\ell$.

16.45 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to (1, +\infty)$ για την οποία υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Τότε $\lim\limits_{x \to 0} f(x) > 1$.

16.46 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to (0, 1)$. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to 0} \big(x^2 f(x)\big) = 0$.

16.47 Θεωρούμε συνάρτηση f για την οποία είναι $\lim\limits_{x \to x_0} f^2(x) = 0$. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

16.48 Αν $\nu > 0$, τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x^\nu} = 0$.

16.49 Οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες σε ένα διάστημα Δ και κοντά στο $x_0 \in \Delta$ έχουμε $f(x) < g(x)$. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

16.50 Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι συνεχής στο x_0.

16.51 Αν οι συναρτήσεις $f, g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[\alpha, \beta]$, τότε και η συνάρτηση $h = fg$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[\alpha, \beta]$.

16.52 Αν για τη συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 0$, τότε $f(\beta) > 0$.

16.53 Αν Δ είναι ένα διάστημα, τότε κάθε συνάρτηση $f: \Delta \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ έχει σταθερό πρόσημο στο Δ.

16.54 Κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ η οποία είναι συνεχής, έχει σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}^*$.

16.55 Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

16.56 Αν η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $(\alpha, \beta]$, τότε η f έχει πάντα μέγιστη τιμή στο $[\alpha, \beta]$.

16.57 Αν για τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \leq M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε ο αριθμός M είναι πάντα η μέγιστη τιμή της f.

Ασκήσεις για λύση

Α ομάδα

Όρια

16.58 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad g(x) = \frac{2x^2 - 4x - 6}{2x - 6} \quad \text{και}$$

$$h(x) = \sqrt{3x - 2}$$

α) Να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f = g$.

β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

$$\frac{f}{h} \quad \text{και} \quad f \circ h$$

γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(f \circ h)(x)}{\sqrt{g(x)}}$$

16.59 Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}, & \text{αν } x < 1 \\[2ex] \dfrac{3x^2 - 10x + 8}{x - 2}, & \text{αν } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

α) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

16.60 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x)=\frac{3x^2+\alpha x+1}{x^2-2x+1}, \quad \text{όπου } \alpha \in \mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

β) Να διερευνήσετε το όριο $\ell=\lim_{x\to 1} f(x)$.

γ) Αν $\alpha=-4$, να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

16.61 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x)=x-2 \quad \text{και}$$

$$g(x)=\sqrt{x^2+1}+\lambda(x+2), \quad \text{όπου } \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h=g\circ f$.

β) Να διερευνήσετε το όριο:

$$\ell=\lim_{x\to+\infty} h(x)$$

γ) Αν $\lambda>-1$, να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+h(x)}{x-4}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x+h(x)}$

16.62 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=2-\sqrt{x+4} \quad \text{και} \quad g(x)=\sqrt{5-x}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι «1 - 1» και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f^{-1}\circ g$.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 4} \frac{h(x)-x+1}{\sqrt{x}-2}=12$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 4} \frac{(f^{-1}\circ g)(x)+h(x)}{x-4}$$

16.63 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x+\alpha}{x^2+\beta x+\gamma}$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A=\mathbb{R}-\{-2, 1\}$ και το 2 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{1}{f}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-2$, $\beta=1$ και $\gamma=-2$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)$ **iv)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f\left(\dfrac{2x^2+x}{1-x^2}\right)}$

16.64 Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{4\alpha\eta\mu x-3\beta\eta\mu 2x}{x}, & \text{αν } x<0 \\ (\alpha^2+9\beta^2)e^x+5, & \text{αν } x>0 \end{cases}$$

για την οποία υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha=2, \ \beta=-\frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} f(x)=10$$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

16.65 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{|x+\eta\mu x|-|x-\eta\mu x|}{\sqrt{x+1}-1}$$

α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ **iv)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+f(x)}-x\right)$

16.66 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x)=e^x+x-1$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο.

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{f(x)}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)}{xe^x+x^2-x}$

16.67 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x)=x+\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

β) Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln\dfrac{1}{f(x)}\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right)$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{f(x)-2x}$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f^2(x)+x^2}-f(x)\right)$

16.68 Έστω συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f^3(x)-4x^3=2x^2f(x)\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

και:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\ell\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\ell=2$.

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1-\text{συν}x}{x+\text{ημ}x}$$

16.69 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\text{ημ}x-2}{x^2+2x}=4$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{\text{ημ}2x}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x+1-2f(x)|-3}{x^2+3\text{ημ}x}$

16.70 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\text{ημ}x}{x^2}=2$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)+\text{ημ}^2x+x\text{ημ}2x}{1-\text{συν}^4x}$

16.71 Δίνεται συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\text{εφ}x}{2x^2-x}=+\infty$$

α) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{\text{ημ}x}{x}\right)$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{ημ}f(x)}{f(x)}$ **iv)** $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(\text{ημ}x)}{x}$

β) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\lambda^2+9)f^3(x)-5f(x)+4}{2\lambda f^3(x)+7f^2(x)-1}=3$$

16.72 Δίνεται συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\neq 0$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$|xf(x)-\text{ημ}2x|\leq x^2\text{ημ}^2\frac{1}{x}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 0}\left(|x|\text{ημ}^2\frac{1}{x}\right)=0$$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

16.73 Δίνεται συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$x^2f^2(x)-2xf(x)\text{ημ}x\leq x^4-\text{ημ}^2x$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{εφ}x+f(x)\text{ημ}x}{x^2+3x-\text{ημ}5x}$$

16.74 Δίνεται συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\big|xf(x)-x^2-|x|\big|\leq x^2$$

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

16.75 Δίνεται συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$x-x^2\leq f(x)\leq x+x^2$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$,

ii) δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\text{ημ}^2x}$.

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\text{ημ}2x}{\sqrt{x^2-x+4}-2}$$

16.76 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}-\{-2,2\}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=\frac{x^2+\alpha x-\beta}{x^2-4}$$

για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=4$ και $\beta=12$.

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x+\eta\mu x)$

iii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(xf(x)\eta\mu\frac{1}{x}\right)$

iv) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(f(e^x)-f(e^{-x})\right)$

16.77 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι περιττή και ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. Να αποδείξετε ότι:

α) δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$,

β) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\eta\mu x\eta\mu f(x)\right)=0$.

16.78 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x)+f(2x)\geq 3x-\eta\mu^2 x$$

και ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\ell\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\ell=1$,

β) κοντά στο 0 ισχύει:

$$\frac{f(x)}{x}>\frac{999}{1000}$$

16.79 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x^3}{x^2-1}=2$$

α) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf(x)-1}{x-1}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3f^2(x)-5f(x)+2}{x-1}$

iv) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|f^2(x)-3f(x)|-2}{x^2-1}$

β) Αν κοντά στο 1 ισχύει $f(x)\neq 1$, να αποδείξετε ότι:

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^3(x)-1}{f(x)-1}=3$

ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{f^2(x)+3}-2}{f(x)-1}=\dfrac{1}{2}$

16.80 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{|x^2-2x|-\lambda}{|x-1|-2},\quad \text{όπου } \lambda\in\mathbb{R}$$

Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι:

i) $\lambda=3$ και $\ell=4$ ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

β) να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2|1-f(x)|+1}{|f(x)-2|+3}$

ii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{f^2(x)-f(x)+2}-f(x)\right)$

iii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e-2^{-f(x)}}{f(x)+e^{f(x)}}$

iv) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^{-f(x)}\eta\mu f(x)\right)$

16.81 Δίνεται συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(f(x)-2x\right)=3$$

α) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

iii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f^2(3x)+xf(x)}{f^2(x)+x^2}$

iv) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f^2(x)-4x^2}{x}$

v) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{f^2(x)+5x^2}-3x\right)$

vi) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2e^{f(x)}+3e^{2x}}{4e^{f(x)+3}+e^{2x}}$

β) Αν επιπλέον η f είναι περιττή, να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

iii) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(-f(x))}{x}$

16.82 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x\to 2}\left(f(x)-xg(x)\right)=-1 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to 2}\big((x-4)f(x)+3g(x)\big)=3$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to 2} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 2} g(x)$$

16.83 Δίνεται συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\left|x^2 f(x)\right| \le |x\eta\mu x\eta\mu 3x|$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

β) Αν κοντά στο 0 ισχύει $f(x)\neq 0$, να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)-2|-|f^2(x)+f(x)+2|}{f(x)}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{f(x)+1}-1}{\sqrt{f(x)+4}-2}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\big(\ln(f(x)+1)-\ln f^2(x)\big)$

γ) Αν κοντά στο 0 ισχύει $f(x)\neq 0$, θεωρούμε τη συνάρτηση $g\colon \mathbb{R}\to(0,+\infty)$ η οποία για κάθε $x>0$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^2(x)g(x)\le \ln x$$

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$.

16.84 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{f(x)}}{x}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{f(x)}}{x}$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2f(x)}+x^2+xe^{f(x)}+x^2e^x\eta\mu e^{-x}}{e^{2f(x)}+x^2+x\eta\mu x}$

16.85 Δίνεται συνάρτηση $f\colon(-1,1)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1 \quad \text{και}$$

$$\alpha f(x)+1\le\sqrt{x+1} \quad \text{για κάθε } x\in(-1,1)$$

όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=\dfrac{1}{2}$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{f(x)}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\eta\mu(nx)}{f(2x)-\eta\mu x}$ με $n\neq 0$

Συνέχεια

16.86 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}, & \text{αν } x\neq 0\\ c, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

όπου $c\in\mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $c=0$,

β) να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x^2\right)$

γ) να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x)=1-x-\eta\mu^2 x$$

έχει στο διάστημα $(-\pi, 1)$ τουλάχιστον δύο λύσεις.

16.87 Δίνεται συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$x^2 f(x)\ge 1$$

α) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3f^2(x)+f(x)+1}{2f^2(x)+3}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0}\big(x\eta\mu f(x)\big)$

16.88 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu(\alpha x)+\eta\mu x}{x}, & \text{αν } x<0\\ \beta, & \text{αν } x=0\\ \dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}, & \text{αν } x>0\end{cases}$$

όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ και $\beta=\dfrac{1}{2}$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

16.89 Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} (\sqrt{x+1}-1)\eta\mu\dfrac{1}{x}, & \alpha\nu\ -1 \leq x \neq 0 \\ \alpha, & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$,

β) να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x}\cdot f(x)\right)$

γ) να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = x - 1$$

έχει τουλάχιστον μία θετική λύση.

16.90 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{1-x} - 1 \quad \text{και} \quad g(x) = x^2$$

α) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)+g(x))$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-g(x))$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) + g(x) = \frac{1}{4}$$

έχει τουλάχιστον μία λύση.

16.91 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(e^x + 2x - e - 1) = 2x - 1 - x^2$$

γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f$.

δ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1+\eta\mu x}{(f\circ f)(x) - \eta\mu x}$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(f\circ f)(x) + \eta\mu x}{x}$

16.92 Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{1-x} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^2}{x-\lambda} \ \text{με}\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Ο αριθμός $2-\lambda$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f και για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$ ισχύει $D_{f\circ g} \subseteq (-\infty, 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ και να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to1^-} (f\circ g)(x)$.

γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση fg και να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to-\infty} (fg)(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to1^-} (fg)(x)$$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(fg)(x) + \frac{1}{x} = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση.

16.93 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{\ln x + x - 1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $(f\circ g)^{-1}$.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$(f\circ g)^{-1}(x) = \alpha, \quad \text{όπου } \alpha \in \mathbb{R}$$

16.94 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^3 + 7x - 5$$

Α. Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι αντιστρέψιμη,

β) η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ έχει ακριβώς μία λύση.

Β. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}, & \alpha\nu\ x \neq 1 \\ \alpha^2 + 3\alpha, & \alpha\nu\ x = 1 \end{cases}$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν η F είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha = 2 \quad \text{ή} \quad \alpha = -5$$

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)\eta\mu x}{x^3}$

16.95 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:
$$f(x) = e^x + x - 3$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση.

γ) Να υπολογίσετε το όριο:
$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) + f(-x)\right)$$

16.96 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:
$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

δ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} δεν έχουν κοινά σημεία.

16.97 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και ισχύει:
$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$.

β) Να υπολογίσετε το όριο:
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x}$$

γ) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση:
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ \alpha, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$
είναι συνεχής.

δ) Για $\alpha = 1$ να αποδείξετε ότι η C_g τέμνει την ευθεία $y = 2x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

16.98 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και ισχύει:
$$\lim_{x \to 0} \frac{x\left(f(x) + \alpha\right) + \eta\mu x}{\sqrt{x+1} - 1} = 8$$
όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

β) Αν κοντά στο 0 ισχύει $f(x) \neq 1$, να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu\left(f(x) - 1\right)}{f^3(x) - f(x)}$

ii) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{12\left(f(x) - 1\right)}{|f(x) + 1| - |f^2(x) + 3f(x) - 6|}$

16.99 Η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $f(\alpha) \neq 0$ είναι συνεχής.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με:
$$g(x) = f(x) + \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{\alpha - \beta}(x - \alpha)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η g είναι συνεχής,

β) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi) = 0$,

γ) $\dfrac{f(\xi)}{\xi - \alpha} = \dfrac{f(\beta) + f(\alpha)}{\beta - \alpha}$, **δ)** $f(\alpha)g(\alpha) = g^2(\beta)$.

16.100 Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:
$$f(x) = 2x + \alpha \quad \text{με } x > 0 \quad \text{και}$$
$$g(x) = 4x + \alpha \quad \text{με } x < 1$$

Αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\alpha \in (-4, 1)$,

β) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h: (1, 2) \to \mathbb{R}$ με:
$$h(x) = \frac{\alpha + 4}{x - 1} + \frac{1 - \alpha}{(x - 2)^3}$$
έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$,

γ) να ορίσετε τις συναρτήσεις $g^{-1} \circ f$ και $f \circ g^{-1}$,

δ) αν ισχύει ότι:
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{f(x) + 4} - \sqrt{\alpha + 5}}{xg(x) - \alpha x - 1} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$
να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$.

16.101 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:
$$f(x) = e^x + x - 2$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}.

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)+x+3^x}{4^x+2}$$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(\ln x)=f(-x)$$

έχει ακριβώς μία λύση.

16.102 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$2-\sqrt{x^2+4}\le xf(x)\le 3-\sqrt{x^2+9}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,4)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0)=-\frac{1}{x_0}$$

16.103 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=e^{x^3}+\ln x$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x)=-e$$

έχει ακριβώς μία λύση.

γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\eta\mu x}\right)$$

16.104 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

16.105 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύουν:

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}=4 \quad \text{και}$$

$$x+\eta\mu 3x\le xf(x)\le 4x \quad \text{για κάθε } x\ge 0$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(2)=2$ και $f(0)=4$.

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to2}\frac{xf(x)-4}{x^2-2x}$$

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon\colon y=6x+1$ τέμνει τη C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο $M(x_0,y_0)$ με $x_0\in(0,2)$.

δ) Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο $[0,2]$, να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$,

ii) υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi)=\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)+2f(1)+3f\left(\frac{3}{2}\right)}{6}$$

16.106 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=3$ είναι συνεχής και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f\big(f(x)\big)-f(x)=2$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(1)x^5+2x^3-4}{f(3)x^4+4x+1}=-\infty$,

β) αν $\lim\limits_{x\to6} f(x)=8$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(3,6)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=7$,

γ) υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2\in[1,6]$ τέτοιο, ώστε:

$$9f(x_2)=3f(2)+2f(4)+4f(5)$$

16.107 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύουν:

$$f(0)>0 \quad \text{και} \quad f(2)>0$$

Επίσης οι αριθμοί -1 και 1 είναι διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ και ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(2)f(x)+x^4+\eta\mu^2 x\right)=-\infty$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,1)$,

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, γ) η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη μεγαλύτερη του 2.

16.108 Η συνάρτηση $f\colon [0, 4] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 5$ είναι συνεχής, γνησίως μονότονη και ισχύει:

$$\lim_{x \to 4} \frac{(x^2 - 4x)f(x) + \eta\mu(x-4)}{\sqrt{x-3} - 1} = 18$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(4) = 2$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 4$ τέμνει τη C_f σε ένα μόνο σημείο.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 4)$ τέτοιο, ώστε:

$$3f(\xi) = f(1) + f(2) + f(3)$$

16.109 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^2(x) = 1 + 2xf(x)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Αν $f(1) > 1$, τότε:

i) να βρείτε τον τύπο της f,

ii) να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x)\eta\mu x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x)$$

16.110 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την f γνησίως φθίνουσα και την g γνησίως αύξουσα. Για την f ισχύει:

$$f^2(x) + 2f(x) + \sigma\upsilon\nu^2 x \leq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και για την g ισχύει:

$$|g(x)\eta\mu x - 3x| \leq x^2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 0} g(x) = 3$$

β) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(x)}{x-1} = \frac{g(x)}{x-2}$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(1, 2)$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)f(x-1) - g(x-1)\eta\mu(x-1)}{\sqrt{x^2+3} - 2}$$

16.111 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύουν:

$$f^2(x) - 2xf(x) = 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(0)x^4 - 5x^3 + 2}{x^3 - 2x^2 - x + 3} = +\infty$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - x \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

έχει σταθερό πρόσημο.

β) Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$.

γ) Να βρείτε τον τύπο της f.

δ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x))^x$

16.112 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f\colon [0, 5] \to \mathbb{R}$ με:

$$f(0) = -1, \quad f(2) = 4 \quad \text{και} \quad f(5) = 1$$

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, 5]$, να βρείτε:

α) το σύνολο τιμών της f,

β) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$,

γ) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 2$.

16.113 Έστω $\alpha > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu^2(\alpha x) + \eta\mu^2 5x}{x^2}, & \text{αν } x \neq 0 \\[2ex] \alpha^2 + 25, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

α) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.

γ) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq 10\alpha$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $\alpha = 5$,

ii) να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$,

iii) να βρείτε το σύνολο τιμών της f,

iv) να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 49$ έχει στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right)$ τουλάχιστον δύο λύσεις.

16.114 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(1 - \ln x) = 1 - x - \ln x \quad \text{για κάθε } x > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x - e^{1-x} \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = 2021$$

έχει ακριβώς μία λύση.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = x^2 - 2$$

έχει τουλάχιστον δύο λύσεις.

16.115 Η συνάρτηση $f: (0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύουν:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + 1}{x} = 2 \quad \text{και}$$

$$|f(x) + x| \leq (x - 1)^2 \quad \text{για κάθε } x \in (0, 1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - \ln x - 2 \quad \text{με } x \in (0, 1]$$

α) Να υπολογίσετε:

i) την τιμή $g(1)$, **ii)** το όριο $\lim_{x \to 0} g(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to x_0} \left(g(x)\eta\mu\frac{1}{g(x)} + \frac{\eta\mu g(x)}{g(x)} \right)$$

16.116 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$2f(x) - 3f(-x) = 5(e^x - e^{-x} + x)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^x - e^{-x} + x \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f^{-1} με την ευθεία $y = x$.

γ) Να βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x) = f(\ln x)$.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) - 1 = \eta\mu f(x) - x$$

έχει τουλάχιστον μία λύση.

16.117 Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

δ) Αν $0 \leq \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{\alpha+1} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta+1} - \sqrt{\beta}} > 1$$

ε) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - 1}{\eta\mu x}$

ii) $\lim_{x \to +\infty} \left(f(x+1) - f(x)\right)$

στ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

έχει ακριβώς μία λύση.

16.118 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = 1 - \ln x \quad \text{με } x > 0$$

i) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f^{-1} \circ g$.

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f^{-1} \circ g$ ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(f^{-1} \circ g)(x) = \alpha x \quad \text{με } \alpha > 0$$

έχει ακριβώς μία λύση.

16.119 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύουν $f(0) = 1$ και:

$$f^2(x) + 2f(x)\eta\mu x = x^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση $g(x) = f(x) + \eta\mu x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο,

ii) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \eta\mu x$ με $x \in \mathbb{R}$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 2 + \sigma\upsilon\nu x}{x}$ **ii)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

iii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}$ **iv)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(f(x))}{f(x)}$

16.120 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(1) > 1$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^2(x) = 1 + 2xf(x)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x)$ **ii)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x)\eta\mu x)$ **iv)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(f(x))}{x}$

16.121 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \ln(1 - x) - x \quad \text{με } x < 1 \quad \text{και}$$

$$g(x) = 1 - e^x \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

α) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$g^{-1}(x) = f(x) + x \quad \text{με } x < 1$$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(f + g)(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

έχει ακριβώς δύο λύσεις.

δ) Η συνάρτηση $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύει:

$$h(2017) + h(2018) = h(2019) + h(2020) + f(g(0))$$

Να αποδείξετε ότι η h δεν είναι αντιστρέψιμη.

16.122 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες είναι συνεχείς και ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\lim_{x \to 4} \frac{f(x)}{x - 4} = 3 \quad \text{και}$$

$$|g(x) - 2| \leq |f(x)| \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(4)$ και $g(4)$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{|g(x) - 2| - 1}{g^2(x) - 5g(x) + 4}$

ii) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\eta\mu(g^2(x) - 2g(x))}{g^3(x) - 4g(x)}$

iii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x + 4) + g(x + 4)}{x^2}$

16.123 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$x^2 f(x) + \sqrt{1 + \eta\mu^2 x} + \alpha = \beta\eta\mu^2 x$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 1$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = x^2$$

έχει τουλάχιστον δύο λύσεις.

16.124 Η συνάρτηση $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύουν:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 2 \quad \text{και}$$

$$\eta\mu 2x \leq xf(x) \leq 2x \quad \text{για κάθε } x \in [0, 1]$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$.

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(\sqrt{x})}{x - 1}$$

γ) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 2$.

δ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2x + 1$ τέμνει τη C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο.

16.125 Η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, γνησίως μονότονη και ισχύουν:

$$f(0) + f(1) = 0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - 2x - 3\big) = 0$$

α) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ **ii)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x^2)}{x + ημx}$

iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{f^2(x) + f(x) + 1} - 2x\right)$

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = f(x^2) + \ln x$$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$F(x) = f^2(x) \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

i) την ελάχιστη τιμή της F,

ii) το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

$$F(x) = \ln α + α - 1 \quad \text{με } α \in (0, 1]$$

16.126 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} + \dfrac{ημx}{x}, & \text{αν } x < 0 \\ \sqrt{x^2 + 1} - x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

α) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.

γ) Να αποδείξετε ότι:

i) η εξίσωση $f(x) = x$ έχει τουλάχιστον μία λύση,

ii) υπάρχει ακριβώς ένα $ξ \in (2, 4)$ τέτοιο, ώστε:

$$9f(ξ) = 2f(2) + 3f(3) + 4f(4)$$

16.127 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} 2α\dfrac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}, & \text{αν } x < 1 \\ αx^2 - βx + 1, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

όπου $α, β \in \mathbb{R}$ και:

$$g(x) = \frac{|x - 4| - |x|}{x^2 - 2x}$$

Αν η f είναι συνεχής και ισχύει:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 2} g(x)$$

τότε:

α) να αποδείξετε ότι $α = -1$ και $β = 1$,

β) να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

iii) $\lim\limits_{x \to 2} (f \circ g)(x)$ **iv)** $\lim\limits_{x \to 1} (g \circ f)(x)$

16.128 Η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ είναι συνεχής, γνησίως μονότονη και ισχύει:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2f(2)x + 2f(3)}{x - 1} = 4$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Αν $f(-1) = 0$ και $f(0) = -1$, να λύσετε την ανίσωση:

$$f\big(f^{-1}(|x - 3| - 2) + 1\big) > -1$$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση.

δ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ημ^3x + συν^2x\,ημx}{f^2(x)}$$

16.129 Η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$x\big(f(x) - 1\big) = 2ημx$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) \leq 3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0} \frac{ημx}{xf(x) - 3x}$$

δ) Αν είναι $α \neq 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = αx$ έχει τουλάχιστον μία λύση.

16.130 Η συνάρτηση f: $[0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση:

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{x}+2 \quad \text{με } x\in(0,\,1]$$

ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(x)}{x}=1+2f(x)$$

έχει ακριβώς μία λύση.

16.131 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon [3,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(\sqrt{10})=\ln 2$ η οποία είναι συνεχής και για κάθε $x\geq 3$ ισχύει:

$$e^{4f(x)}-6e^{2f(x)}=x^2-18$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=\frac{1}{2}\ln x \quad \text{με } x>0$$

i) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f^{-1}\circ g$.

ii) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(f^{-1}\circ g)(x)-3}{x^3-27}$$

16.132 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=x+e^x-1$$

Επιπλέον θεωρούμε τη συνάρτηση $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$g(x)+e^{g(x)}=x+1$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο.

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$(g\circ f)(x)>0$$

δ) Να ορίσετε τη συνάρτηση g^{-1}.

16.133 Η συνάρτηση $f\colon (0,+\infty)\to(0,+\infty)$ είναι συνεχής και για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f(x)-2\sqrt{f(x)}=x-1$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=x+1+2\sqrt{x} \quad \text{με } x>0$$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu\big(f(x)-1\big)}{x}$$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=f(x)+\ln x \quad \text{με } x>0$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η g είναι αντιστρέψιμη,

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g^{-1}(x)-x}{g^{-1}(x)+x}=-1$,

iii) η εξίσωση $g^{-1}(x)=\dfrac{x^2}{4}$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις.

16.134 Η συνάρτηση $f\colon [-2,\,3]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα. Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(-2,\,3)$ τέτοιο, ώστε:

$$2f(x_0)=f(-2)+f(3)$$

β) η εξίσωση:

$$\frac{f(x)-f(-2)}{x+1}+\frac{f(x)-f(3)}{3x-7}=0$$

έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(-2,\,3)$,

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{\ln|x-1|}=0$,

δ) υπάρχει ακριβώς ένα $\alpha>0$ τέτοιο, ώστε η συνάρτηση $g(x)=f(e^x+x-3)$ να έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $D_g=[0,\,\alpha]$ και στη συνέχεια να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση g.

16.135 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής με:

$$f(1)<1 \quad \text{και} \quad f(3)>3$$

Επιπλέον θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=\big(f(x)-x\big)^2+4 \quad \text{με } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,\,3)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0)=x_0 \quad \text{και} \quad f(x_0)+g(x_0)=x_0+4$$

β) Να αποδείξετε ότι η g έχει ελάχιστη τιμή.

γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ημ(2021x)}{x^3 g(x)}$$

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$g(21)g(121)g(1021)g(2021) > 250$$

16.136 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^2 + \big(f(1)-1\big)x + 2f(2)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 - 2x$ με $x\in\mathbb{R}$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{f(x)+4}-2}{ημx}$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f(x)}-x\right)$ iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

γ) Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & \text{αν } x\neq 0 \\ α-3, & \text{αν } x=0 \end{cases}$$

Να βρείτε την τιμή του $α\in\mathbb{R}$ για την οποία η g είναι συνεχής.

16.137 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g\colon \mathbb{R}\to[0,+\infty)$ οι οποίες για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιούν τη σχέση:

$$2\sqrt{g(x)} \le f(x)-5 \le g(x)+1$$

Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-1}{x-1} = 1$$

τότε:

α) να αποδείξετε ότι $f(1) = 7$,

β) να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-7}{x-1}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-7x^2}{f(x)-7}$

γ) αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $ξ\in[2,4]$ τέτοιο, ώστε:

$$f(ξ) = \frac{f(2)+2f(3)+3f(4)}{6}$$

16.138 Η συνάρτηση $f\colon [0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, γνησίως μονότονη και για κάθε $x\ge 0$ ισχύει:

$$x^2 - 1 < f(x) < e^x$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι γνησίως αύξουσα,

ii) η ευθεία $y = x+1$ τέμνει τη C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x)+1}$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g.

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία.

iii) Αν $f(0) = 0$, να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g.

Β ομάδα

Όρια

16.139 Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^3-3x+2|-|x^3-2x-3|+4\sqrt{x}}{x^3-x\sqrt{x}}$

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ημ(πx)}{\sqrt[3]{x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1}-2}$

16.140 Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+x^4ημ\frac{π}{x}+συνx}{x^3+x^2ημ^2x}$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x+1}-e^xημx)$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4\left(1-συν\dfrac{1}{x}\right)\left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right)\right)$

16.141 Δίνεται συνάρτηση $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1} = 2$$

α) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3 f(x)-1}{x-1}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)-\dfrac{\eta\mu x}{x}}{f\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)-1}$

β) Αν κοντά στο 1 ισχύει $f(x)\neq 1$, τότε:

i) να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)\sqrt{f^2(x)+3}-\alpha}{f(x)-1}=\beta$$

ii) να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(\pi f(x))}{x-1}$$

16.142 Η συνάρτηση $f\colon [0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)}{f(x)}=1$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)}{f(x^2)}$$

16.143 Δίνεται συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{f(x)}=1$$

α) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(4x)}{f(x)}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(8x)}{f(x)}$

β) Να αποδείξετε ότι κοντά στο 0 ισχύουν:

i) $f(2x)>\dfrac{f(x)}{2}$

ii) $f(2x)f(8x)>\dfrac{3}{4}f^2(x)$

γ) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{f(x)}=1$$

16.144 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)>0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x)-f(-x)=x^3$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

16.145 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(f(x))-f(x)=1-\frac{x}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\ell\in\mathbb{R}$,

να αποδείξετε ότι $\ell=\dfrac{1}{2}$.

16.146 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=x^3+6x^2+12x+10$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)-10}{\eta\mu x}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{-1}(x)-f^{-1}(0)}{x}$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{\sqrt{x}}$

16.147 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι περιττή και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^3(x)+2f(x)=3x$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x^3-e^{x-2})+f(e^{2-x}-x^3)=0$$

ε) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{-1}(x)}{f^3(x)+2f(x)}$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f^{-1}(x)\,\eta\mu\dfrac{1}{f^{-1}(x)}\right)$

16.148 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$f(f(x)) = x + f(x) \quad \text{και}$$

$$f(g(x) - e^x - x + 1) = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0) = 0$

ii) $g(x) = e^x + x - 1$ με $x \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$G(x) = \ln g(x)$$

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη, να βρείτε το πεδίο ορισμού της g^{-1} και να λύσετε την εξίσωση:

$$g^{-1}(e^{x^2+1} + x^2) = 2$$

16.149 Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \to 0} \left(f^2(x) - 2xf(x) + x^2\right) = 0$$

α) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{f(x)+1} - 1}{f(x)}$

β) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^2(x) + 2x^2 \le 2xf(x) + \etaμ^2 x + x^4$$

να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ **ii)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(ημ2x)}{ημx}$

γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3 \cdot 8^{\frac{1}{|f(x)|}} - 2^{\frac{1}{|f(x)|}}}{4^{\frac{1}{|f(x)|}} - 3^{\frac{1}{|f(x)|}}}$$

16.150 Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = e^{x-1} + 2$$

Επιπλέον θεωρούμε τη συνάρτηση g: $(2, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$(g \circ f)(x) = x - 1$$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση g^{-1}.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(g(x^2 + x) - g(x^2)\right)$

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ημg(x)}{g(x)}$

iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x+1) - 3^{x+1}}{f(x+2) - 3^{x-1}}$

16.151 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(x-3) + x - 2 \quad \text{με } x > 3$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

γ) Δίνεται συνάρτηση g: $(0, +\infty) \to (3, +\infty)$ τέτοια, ώστε η συνάρτηση $f \circ g$ να είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

i) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln(g(8) - 3) - \ln(g(e^{x-1}) - 3) >$$

$$> g(e^{x-1}) - g(8)$$

δ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ημx}{f(x)}$$

16.152 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^x - 2} - \lambda e^x, \quad \text{όπου } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \ln x \quad \text{και} \quad h(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

α) Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

$$f \circ g \quad \text{και} \quad h \circ g$$

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\ell_1 = \lim_{x \to +\infty} (f \circ g)(x)$$

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h \circ g$ είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση:

$$(h \circ g)^{-1}$$

δ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\ell_2 = \lim_{x \to 1^-} \left((h \circ g)^{-1}(x)\, ημ \frac{1}{(h \circ g)^{-1}(x)}\right)$$

16.153 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$2e^{f(x)} + f(x) = x + 1$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$f^{-1}(x) = 2e^{x} + x - 1 \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(\frac{\sqrt{2x^2+5x+4} + x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x^2+x+1}}\right) > 0$$

δ) Να βρείτε τον τύπο της $g\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f\Big(f\big(g(x^2) + x^4 - x^2\big) + 3 + \ln 2\Big) = \ln 2$$

16.154 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ με $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ η οποία είναι «1 - 1». Επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) \geq x + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και:

$$f^{-1}(x) \geq 2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2x} \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{x} + \text{συν} f(x)}{e^{-f(x)} + 1} = +\infty$

β) $\displaystyle\lim_{x\to 1} f^{-1}(x) = f^{-1}(1)$

16.155 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x^2 \leq f(x) \leq x^2 + 2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\text{ημ}x\right)$$

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)\text{ημ}^3 x + x}{x^2 + \text{ημ}2x}$ **ii)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)\text{ημ}x}{x^3}$

γ) Να βρείτε την τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xf(x) + \mu x^3 + x^2\text{συν}x}{x^3 + \mu x \text{ημ}\frac{1}{x} + 2^{-x}} = 2$$

16.156 Δίνεται συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{f(x)} + f(x) = x$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1},

ii) $f^{-1}(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\big(\ln\big(f^{-1}(x) - x\big) - \ln(2^{x} + e^{x})\big)$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f^{-1}\big(\sqrt{x^2+1} + x\big)$

iii) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{f^{-1}(x) - e^{x}} - \sqrt{f^{-1}(x) - e^{x}}}{x - 1}$

16.157 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$x^3\big(g(x) + g(-x) - 1\big) = g(-x) \quad \text{και}$$

$$g\big(f(x)\big) - e^{3x} = e^{x} - f(x)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η g είναι περιττή, **ii)** $g(x) = x^3$ με $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = f(x) - \frac{e}{f(x)} + e \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία.

ii) Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{\text{ημ}x} - e^{x} = e^{1-\text{ημ}x} - e^{1-x}$$

iii) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{g^2(x) + x^4}{g(x^2 - x)}\,\text{ημ}\left(\frac{1}{\text{συν}x - 1}\right)\right)$$

16.158 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1 \quad \text{και}$$

$$f(x + y) = f(x)f(y) \quad \text{για κάθε } x,\ y \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ **ii)** $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iii) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iv) $f(x - y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$ για κάθε $x,\ y \in \mathbb{R}$

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 \left(f\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(\frac{1}{x+1}\right) \right) \right)$$

16.159 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\left| xf(x) - \eta\mu 2x \right| \leq x^2$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$ **ii)** $f(x) > 1{,}99$ κοντά στο 0

β) Αν κοντά στο 0 ισχύει ότι $f(x) \neq 2$, να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 f(x) - \eta\mu^2 x}{x^2 + 2\eta\mu^2 x}$

ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{f^2(x) + f(x) + 3} - 3}{f^3(x) - 8}$

iii) $\lim\limits_{x \to 0} \left((f(x) - 2)\eta\mu \dfrac{1}{x} \right)$

iv) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left| f^2(x) - 3f(x) \right| - 2}{\left| f(x) - 3 \right| - 1}$

16.160 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$\ln f(x) = e^{x - \ln f(x)} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

β) η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1},

γ) $f(1) < \left(f(0)\right)^e$, **δ)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{f^2(x)} = 0$.

Συνέχεια

16.161 Η συνάρτηση $f: [0, 4] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 2$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in [0, 4]$ ισχύει:

$$f\left(f(x)\right) + f(x) = 6$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(2) = 4$,

β) η C_f τέμνει την ευθεία $y = 3x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο,

γ) υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [0, 4]$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = \frac{f(1) + f(3) + 8}{5}$$

16.162 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + x + 1, & \text{αν } x < 0 \\ 2 - \ln(x + 1), & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f\left(f(x) + 2020\right) = 2$$

έχει ακριβώς δύο λύσεις x_1 και x_2 με $x_1 < x_2$.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(x_1 - x)\left(f(x) - 2\right) - (x_2 - x)\left(3 - f(x)\right) =$$

$$= \left(f(x) + 2020\right)^2$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο (x_1, x_2).

ε) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \leq 0 \leq \beta$ για τις οποίες ισχύει:

$$e^\alpha + \alpha - 1 = \ln(\beta + 1)$$

16.163 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = 27^x - 3 \cdot 9^x + 3^{x+1}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

γ) Αν $\lambda > -1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f\left(f^3(x) + f(x) - \lambda\right) = 9$$

έχει ακριβώς μία λύση.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(e^{\eta\mu x}) = f\left(1 - |x|\right)$$

16.164 Έστω συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x > 0$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f\left(e^{f(x)}\right) = \ln x$$

α) Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x) = e^{f(e^x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \ln x$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$.

γ) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να βρείτε τον τύπο της.

16.165 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^3 + x$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή και γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς τη μονοτονία.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}(x) = 1 + f\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\right) + f\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\right)$$

ε) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\eta\mu x - \eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^3\left(f(x) + f^{-1}(x)\right)}$$

16.166 Δίνεται συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f^3(x)t^2 + 3f(x)t\sqrt{t^2+1}}{t^2 + 2t + 3} = x^3 + 4x + 1$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f^3(x) + 3f(x) = x^3 + 4x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

β) η f είναι γνησίως αύξουσα,

γ) η f είναι συνεχής,

δ) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,

ε) υπάρχει ακριβώς ένα $\xi_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi_1) = 0$,

στ) υπάρχει ακριβώς ένα $\xi_2 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$2f(\xi_2) = f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{1}{2020}\right)$$

16.167 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\left|f(x) - f(y)\right| \geq \frac{1}{\theta}|x - y|, \quad \text{όπου } \theta \in (0, 1)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι αντιστρέψιμη,

β) $\left|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\right| \leq \theta|x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

γ) η f^{-1} είναι συνεχής,

δ) η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ έχει το πολύ μία λύση.

16.168 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(1) = \frac{1}{2}$ είναι συνεχής και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$ ισχύει:

$$f(xy) = f(x)f\left(\frac{3}{y}\right) + f(y)f\left(\frac{3}{x}\right)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(3) = \frac{1}{2}$

β) $f\left(\frac{3}{x}\right) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

γ) $f(xy) = 2f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

δ) $f^2(x) = \frac{1}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ε) $f(x) = \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

16.169 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 3$$

α) Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \alpha$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f\left(2f^3(x) - 4x\right) = f\left(1 - x^2 + f(9)\right)$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(0, 9)$.

δ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\left(f(x)-1\right)^2}$$

16.170 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$e^{1-f^{-1}(x)} - f^{-1}(x) = x+1$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^{1-x} - x - 1 \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f^{-1}(x) + x\right)$ ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f^{-1}(x)}{x}$

16.171 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}\left(\frac{1}{1-e} + 2 - f(\ln x)\right) = -1$$

δ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} f^{-1}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}} + \sqrt{x} \cdot \eta\mu \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{x^2+1} + 1\right)$$

16.172 Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 8x^3 + 1 - \alpha, & \text{αν } x < 0 \\ 4x^2 + \ln\alpha, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

όπου $\alpha > 0$. Αν η f είναι συνεχής, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$,

β) να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1},

γ) να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1},

δ) για $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

$$f(x^{2021}+1) - f^{-1}(2021) > f(x^{2021}) - f^{-1}(2022)$$

ε) να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0}\left(f^{-1}(x)\,\eta\mu \frac{1}{f^{-1}(x)}\right)$$

16.173 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + f(x) + 2x = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f^{-1}\left(f(-34) - x^2\right) < 0$$

δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

ε) Οι συντεταγμένες του σημείου $M(x, y)$ ικανοποιούν τη σχέση:

$$f(x^2+4x+7) + f(y^2-6y-10) = 0$$

Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ βρίσκεται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

16.174 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$e^{-f(x)} - 2f^3(x) = x+2$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Θεωρούμε τα σημεία $E(3, 0)$, $E'(-3, 0)$ και $M(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση:

$$f(ME + ME' - \alpha) = f^{-1}(f(0))$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha \geq 7$,

ii) για $\alpha = 11$ το σημείο Μ βρίσκεται σε έλλειψη της οποίας να βρείτε την εξίσωση και την εκκεντρότητα.

δ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ iv) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{f^3(x)}$

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f\left(2f^3(x)+3x\right)=f\left(x^2-2\right)$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(-1,\,0)$.

16.175 Θεωρούμε συναρτήσεις f, g: $(0,\,+\infty)\to\mathbb{R}$ με την g γνησίως φθίνουσα, οι οποίες για κάθε $x>0$ ικανοποιούν τη σχέση:

$$g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Αν για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$\ln x\le f(x)\le x-1$$

τότε:

i) να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$,

ii) αν η g είναι συνεχής και $\rho>1$ είναι ρίζα της g, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\kappa^2 f(x)+\lambda^2 g(x)=0 \quad \text{με } \kappa,\,\lambda\in\mathbb{R}^*$$

έχει ακριβώς μία λύση.

16.176 Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$2f^3(x)+3f(x)=2x+3$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x)=x^2$$

έχει τουλάχιστον μία λύση.

16.177 Η συνάρτηση f: $[0,\,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, συνεχής και για κάθε $x\ge 0$ ισχύει:

$$x^2 f\left(f(x)\right)=f(x)$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x\eta\mu x}$ **ii)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2f(x)}{1+|\eta\mu x|}$

16.178 Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=x^3+2x+1$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

$$f^3(x)+2f(x)=12$$

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\eta\mu f(x)\right)$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f^2(x)+f(x)\eta\mu f(x)}{f(x)+\sigma\upsilon\nu f(x)}$

δ) Η συνάρτηση g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(-2)=-3$ και $g(0)=-1$ είναι συνεχής και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$g^2(x)+x^2=2xg(x)+\sqrt{f(x)+x^2-x^3}$$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$g(x)=x-\sqrt{|x+1|} \quad \text{με } x\in\mathbb{R}$$

ii) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g\left(g(x)\right)}{x}$$

16.179 Δίνονται οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha<\beta$ και θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(\alpha)=2\beta,\quad f(\beta)=2\alpha \quad \text{και}$$

$$\left|f(x)\right|<1 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$2x=f(\beta)\eta\mu x+f(\alpha)$$

έχει στο διάστημα $(0,\,\alpha+\beta]$ τουλάχιστον μία λύση.

β) Αν η f είναι γνησίως μονότονη, να αποδείξετε ότι:

i) η εξίσωση $f(x)=\alpha+\beta$ έχει ακριβώς μία λύση,

ii) η C_f τέμνει την ευθεία $y=2x$ ακριβώς σε ένα σημείο.

γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf(x)\eta\mu f(x)}{x^2+1}$$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - (\alpha + \beta)x \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ετερόσημες λύσεις, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση.

16.180 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) > 0$ η οποία είναι συνεχής και ισχύει:

$$f(x)\left(f(x) + 2e^{-x}\right) = x^2 - e^{-2x} \quad \text{για κάθε } x > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x - e^{-x}$ με $x > 0$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = 0$$

δ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^{2x}}{(xe^x - 1)^2}$$

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$f^5(\xi) + f(\xi) = 1 - \xi$$

16.181 Δίνονται οι αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ για τους οποίους ισχύει:

$$\lim_{x \to -\infty}\left(\sqrt{x^2 + (\alpha^2 - \beta^2)x - 1} + x\right) = 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 - \beta^2 = -2$.

β) Η συνάρτηση $f\colon [-2, 2] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in [-2, 2]$ ισχύει:

$$f^3(x) + 2\alpha f^2(x) + \beta^2 f(x) = \alpha x^3 + x - 1$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι γνησίως αύξουσα,

ii) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση,

iii) υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-2, 0)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 + 1) + f(x_0 + 2)}{x_0}$$

iv) υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi) = \frac{x_0 f(x_0) + (x_0 + 1)f(x_0 + 1) + (x_0 + 2)f(x_0 + 2)}{2x_0 + 5}$$

16.182 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) = \frac{e^x}{2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \xi$.

16.183 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

ii) η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε:

i) να αποδείξετε ότι:

$$f(x) > 1 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

ii) να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{f(x^3)}{f(2)} > \frac{f(x)}{f(2x)}$$

γ) Αν $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(4x) - f(x)}{f(3x) + f(2x)}$$

16.184 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$2f(x) + f(-x) = x^3 + x$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x^3 + x \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να λύσετε την ανίσωση:

$$f^{-1}\left(f^{-1}(x)\right) > 1$$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = e^{-x}$$

έχει ακριβώς μία λύση.

δ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) \eta\mu \dfrac{x}{f(x)} \right)$ **ii)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f^{-1}(x) - 1}{x - 2}$

16.185 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ με:

$$f\left((0, +\infty)\right) = (0, +\infty) \quad \text{και} \quad f(1) = e$$

είναι γνησίως μονότονη, συνεχής στο $x_0 = 0$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση:

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0) = 1$ και $f(-1) = e^{-1}$,

ii) η f είναι συνεχής,

iii) η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

iii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(1 - x)}{f(x)}$ **iv)** $\lim\limits_{x \to 0^-} f^{-1}(x)$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) \right)$$

έχει ακριβώς μία λύση.

16.186 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\frac{x^2}{2} + 1 \le f(x) \le x^4 + x^2 + 1$$

Επίσης η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = 3x$$

έχει τουλάχιστον μία λύση x_0.

γ) Δίνεται η συνάρτηση:

$$F(x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right) + x, & \text{αν } x < 0 \\[2ex] f\left(\dfrac{1}{x}\right) - x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

i) Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της F και το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $F(x) = 3$.

δ) Αν $x_1 > 0$ είναι μια λύση της εξίσωσης $F(x) = 3$, να αποδείξετε ότι:

$$F\left(\frac{1}{x_0}\right) < F(x_1)$$

16.187 Έστω συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής. Επιπλέον θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{e^x - f(x)}{e^x + 2e^{f(x)}}$$

α) Αν $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \dfrac{1}{3}$, να αποδείξετε ότι:

$$f(0) = 0$$

β) Αν $g(0) > 0$ και $g(1) < 0$, να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_1) = e^{x_1}$$

ii) υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (x_1, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_2) = e$$

16.188 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f\left(f(x)\right) = x + f(x)$$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση:

$$f^{-1}(x) = f(x) - x$$

γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f\left(f\left(f(x)\right)\right)}{xf(x)}$$

16.189 Η συνάρτηση $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + 3f(x) = e^x - 1$$

για κάθε $x \ge 0$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι γνησίως αύξουσα,

ii) η f είναι συνεχής.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f^{-1}(x) - \ln(x^3 + 2x + 1)}{x^3 - \eta\mu(2021x)}$$

16.190 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0)=2$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(f(x)) + 2f(x) = 4 - x$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι αντιστρέψιμη, **ii)** $f(2) = 0$.

β) Αν η f είναι συνεχής, τότε:

i) να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = x_0$$

ii) να βρείτε την τιμή $f(1)$,

iii) να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f^{-1}(2x - x^2) - 1\right) = 2$$

γ) Αν είναι:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell \in (-\infty, 0)$$

τότε:

i) να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

ii) να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{f^2(x) + f(x) + 2} + f(x)\right)$$

iii) να αποδείξετε ότι $\ell = -1$.

16.191 Δίνεται η συνάρτηση $f: (-\infty, -1) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = -x + \ln(-x - 1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

δ) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < -1$, να αποδείξετε ότι:

$$e^{\alpha} - e^{\beta} > \alpha e^{\beta} - \beta e^{\alpha}$$

16.192 Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύουν:

$$f(e^{-1}) = -e - 1, \quad f(e) = 1 - e^{-1} \quad \text{και}$$

$$x^2 f^2(x) + 1 = x^2 \ln^2 x - 2x f(x)$$

για κάθε $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{x} \quad \text{με } x > 0$$

β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

$$x \ln x = 1 + \alpha x \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}$$

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln(\ln x) + e^{-1} < \frac{1}{\ln x} + 1$$

δ) Αν $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha}{\beta} < e^{\frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta}}$$

ε) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to e} \frac{x \ln^2 x - 3x f(x) + 2x - 3}{\ln x - 1}$$

Κριτήριο αξιολόγησης

Θέμα 1

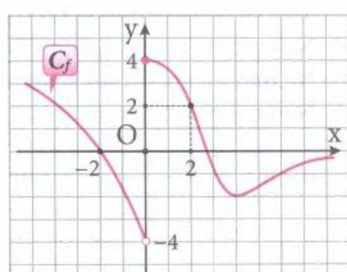
A. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{f(x)} = \dots$

β) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = \dots$

γ) $\lim_{x \to 2} \frac{x}{(f(x) - 2)^2} = \dots$

δ) $\lim_{x \to 0^-} \frac{\text{συν}x}{f(x) + 4} = \dots$



Β. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ). Να αποδείξετε όσες θεωρείτε ότι είναι σωστές και να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα σε όσες θεωρείτε ότι είναι λανθασμένες.

α) Αν για τις συναρτήσεις f και g υπάρχουν τα όρια:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0} g(x)$$

τότε υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ και ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

β) Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

τότε είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

γ) Αν για τη συνεχή συνάρτηση $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $f(\alpha)f(\beta) > 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο (α, β).

δ) Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και έχει ελάχιστη τιμή τον αριθμό m. Αν για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $mf(x_0) \leq 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Γ. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x+2}, & \text{αν } x < -2 \\[2ex] \sqrt{x^2-1}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{f(x)}$

δ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ **ε)** $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - x)$ **στ)** $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)}{\eta\mu(1-x)}$

Θέμα 2

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{x-1} - 2 \quad \text{με } x \geq 1 \quad \text{και} \quad g(x) = (x-3)^2 + 1 \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(f\circ g)(x)}{x^2-1}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(f\circ g)(x)}{\sqrt{x}\cdot f(x)}$ **iii)** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{f^{-1}(x)-1}{x+2}$ **iv)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f^{-1}(x)-x}{g(x)-1}$

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = e^{x-1} + x^3 - 2$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο.

β) Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$e^{x-1} + x^3 - 2 = y$$

έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x-1} - 3}{f(x)}$$

δ) Αν $\alpha < 1 < \beta$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,\, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{f(\alpha)}{1-\xi} + \frac{f(\beta)}{\xi} = f(\xi)$$

ii) να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{\xi^x}$$

Θέμα 4

Η συνάρτηση $f\colon (0,\, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ είναι συνεχής και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f^2(x)t^2 + \sqrt{t^2+1}}{t^2 + t + \eta\mu t} = 2xf(x) + 1$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f^2(x) - 2xf(x) = 1$$

για κάθε $x > 0$.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+1} \quad \text{με } x > 0$$

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(2x + 1 - \sqrt{(2x+1)^2 + 1}\right) = -1$$

ε) Αν $\alpha > 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(x)}{1 + \ln\alpha} = 2021$$

έχει ακριβώς μία λύση.