17 Επανάληψη στην παράγωγο

Θεωρία - Ερωτήσεις κλειστού τύπου

Α. Ελέγχω τις γνώσεις μου στη θεωρία

Ορισμοί

17.1 Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

17.2 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon D_f \to \mathbb{R}$. Πότε η f λέγεται παραγωγίσιμη;

17.3 Πότε μια συνάρτηση $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

17.4 Έστω μια συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$. Ποια συνάρτηση λέγεται πρώτη παράγωγος της f;

17.5 Έστω μια συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$. Ποια συνάρτηση ονομάζεται δεύτερη παράγωγος της f;

17.6 Θεωρούμε δύο μεταβλητά μεγέθη x και y τα οποία συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$. Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0;

17.7 Θεωρούμε ένα υλικό σημείο που κινείται κατά μήκος ενός άξονα και έστω $x(t)$ η θέση του συναρτήσει του χρόνου t. Ποια είναι η ταχύτητα και ποια η επιτάχυνση του σημείου συναρτήσει του χρόνου;

17.8 Έστω μια συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο;

17.9 Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία ονομάζονται κρίσιμα σημεία της f;

17.10 Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

α) Πότε η f λέγεται κυρτή (ή ότι στρέφει τα κοίλα άνω) στο Δ;

β) Πότε η f λέγεται κοίλη (ή ότι στρέφει τα κοίλα κάτω) στο Δ;

17.11 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής της C_f;

17.12 Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

17.13 Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και πότε στο $-\infty$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

17.14 Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη στο $+\infty$ και πότε στο $-\infty$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

17.15 Τι λέγεται πίνακας μεταβολών μιας συνάρτησης f;

Προτάσεις

17.16 Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο x_0.

17.17 Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να αποδείξετε ότι:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

17.18 Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

α) $(c)' = 0$, όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερά

β) $(x)' = 1$ με $x \in \mathbb{R}$

γ) $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$ με $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ και $x \in \mathbb{R}$

δ) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ με $x > 0$

ε) $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ με $x \in \mathbb{R}$

στ) $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$ με $x \in \mathbb{R}$

17.19 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $x \in \mathbb{R}$, τότε $(e^x)' = \ldots$

β) Αν $x > 0$, τότε $(\ln x)' = \ldots$

17.20 Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

17.21 Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση fg είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

17.22 Αν οι συναρτήσεις $f, g, h\colon A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$(fgh)'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

17.23 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ και έστω $c \in \mathbb{R}$ σταθερά. Να αποδείξετε ότι:

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$$

17.24 Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και ισχύει $g(x_0) \neq 0$, ποια είναι η παράγωγος της συνάρτησης $\dfrac{f}{g}$ στο x_0;

17.25 Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $x \in \mathbb{R}$, τότε $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$.

β) Αν $x \neq 0$, τότε $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

γ) Αν $x \neq 0$, τότε $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$.

δ) Αν $x \in R_1 = \mathbb{R} - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$, τότε:

$$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

ε) Αν $x \in R_2 = \mathbb{R} - \{\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}\}$, τότε:

$$(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

17.26 Να συμπληρώσετε την παρακάτω πρόταση:

Αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε:

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = \ldots$$

17.27 Η συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη. Να συμπληρώσετε τη δεύτερη στήλη του παρακάτω πίνακα:

Συνάρτηση f	Παράγωγος f′
$f^\nu(x)$ με $\nu \in \mathbb{N}^*$	
$\sqrt{f(x)}$ με $f(x) \geq 0$	
$\eta\mu f(x)$	
$\sigma\upsilon\nu f(x)$	
$\varepsilon\varphi f(x)$ με $\sigma\upsilon\nu f(x) \neq 0$	
$\sigma\varphi f(x)$ με $\eta\mu f(x) \neq 0$	
$e^{f(x)}$	
$\alpha^{f(x)}$ με $0 < \alpha < 1$	
$\ln\lvert f(x)\rvert$ με $f(x) \neq 0$	
$f^\alpha(x)$ με $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ και $f(x) > 0$	

17.28 Να αποδείξετε τις επόμενες προτάσεις:

α) Αν $x > 0$ και $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, τότε:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

β) Αν $x \in \mathbb{R}$ και $0 < \alpha \neq 1$, τότε:

$$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha$$

γ) Αν $x \in \mathbb{R}^*$, τότε $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

δ) Αν $x \in \mathbb{R}^*$ και $0 < \alpha \neq 1$, τότε:

$$(\log_\alpha|x|)' = \frac{1}{x\ln\alpha}$$

17.29 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$. Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της C_f στο σημείο της $M(x_0,\ f(x_0))$;

17.30 Έστω μια ευθεία ε: $y = \lambda x + \beta$ και μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f. Πότε η ευθεία ε εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f;

17.31 Πότε μια συνάρτηση f εφάπτεται στον άξονα $x'x$;

17.32 Έστω συναρτήσεις f, g και x_0 ένα κοινό σημείο των D_f και D_g. Πότε οι C_f και C_g εφάπτονται στο x_0;

17.33 Έστω f και g δύο συναρτήσεις. Θεωρούμε τα σημεία $M(x_1,\ f(x_1))$ και $N(x_2,\ g(x_2))$ με $x_1 \neq x_2$. Πότε η ευθεία MN είναι κοινή εφαπτόμενη ευθεία των C_f και C_g;

17.34 Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

17.35 Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

17.36 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$e^x \ldots x + 1$$

β) Για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$1 - \frac{1}{x} \ \ldots\ \ln x \ \ldots\ x - 1$$

17.37 Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $f'(x) = 0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ.

17.38 Οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει:

$$f'(x) = g'(x) + c$$

Να αποδείξετε ότι $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$, όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερά.

17.39 Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) = f(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$, τότε ποιος είναι ο τύπος της f;

17.40 Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

β) Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

17.41 Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Fermat.

17.42 Έστω μια συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f;

17.43 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

β) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

γ) Αν η f' διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

17.44 Να διατυπώσετε το κριτήριο που συνδέει το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου μιας συνάρτησης f με την κυρτότητα της f.

17.45 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = \ldots$

β) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής είναι ....

γ) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν:

- η f'' .... εκατέρωθεν του x_0 και
- ορίζεται .... της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f.

17.46 Να συμπληρώσετε τα κενά στην παρακάτω πρόταση:
Αν η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f, τότε:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ldots \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \lambda x\right) = \ldots$$

17.47 Να διατυπωθούν οι κανόνες De L' Hospital που αφορούν τα όρια της μορφής $\frac{0}{0}$ και τα όρια της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$.

Β. Ερωτήσεις τύπου πολλαπλής επιλογής

Σε καθεμία από τις επόμενες ημιτελείς προτάσεις να επιλέξετε τη φράση που τη συμπληρώνει σωστά.

17.48 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ δύο διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. Στο διάστημα (x_1, x_2) η εξίσωση $f'(x) = 0$:

Α: Δεν έχει λύση.

Β: Δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν έχει ή δεν έχει λύση.

Γ: Έχει τουλάχιστον μία λύση.

Δ: Έχει ακριβώς μία λύση.

17.49 Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού:

Α: Έχει τουλάχιστον τρία σημεία καμπής.

Β: Δεν έχει σημεία καμπής.

Γ: Έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Δ: Έχει τουλάχιστον δύο σημεία καμπής.

17.50 Θεωρούμε μια πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)$ με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2. Η γραφική παράσταση της f:

Α: Έχει τουλάχιστον μία ασύμπτωτη.

Β: Δεν έχει ασύμπτωτες.

Γ: Έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Δ: Έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

17.51 Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες κοντά στο x_0 και ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

Για το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ μπορούμε να πούμε ότι:

Α: Εφόσον $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, τότε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Β: Εφόσον $g'(x) \neq 0$ κοντά στο x_0, τότε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Γ: Δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Δ: Εφόσον $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ και $g'(x) \neq 0$ κοντά στο x_0, τότε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Γ. Θέματα οργάνωσης λογικών δομών

Σε καθένα από τα επόμενα θέματα να επιλέξετε το ελάχιστο πλήθος από τις δοσμένες προτάσεις και να τις διατάξετε με τέτοιον τρόπο, ώστε οι πρώτες από αυτές να αποτελούν τις προϋποθέσεις και η τελευταία να είναι το συμπέρασμα της αντίστοιχης πρότασης.

17.52 Θεώρημα Rolle

Α: Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β).

Β: Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Γ: $f(\alpha)f(\beta) < 0$.

Δ: $f(\alpha) = f(\beta)$.

Ε: Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

17.53 Θ.Μ.Τ.

Α: Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\alpha - \beta}$$

Β: Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β).

Γ: Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Δ: Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

Ε: $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

17.54 Θεώρημα Fermat

Α: $f'(x_0) = 0$.

Β: Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε σημείο x_0.

Γ: Η f είναι παραγωγίσιμη.

Δ: Το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f.

Ε: Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

17.55 De L' Hospital

Έστω $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι ορισμένες κοντά στο x_0.

Α: Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0.

Β: $g'(x) \neq 0$ κοντά στο x_0.

Γ: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$.

Δ: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Ε: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

ΣΤ: Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες κοντά στο x_0, άλλα όχι απαραίτητα στο x_0.

Δ. Αποδείξεις και αντιπαραδείγματα σε ερωτήσεις τύπου «Σωστό - Λάθος»

Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις επόμενες προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ). Να αποδείξετε όσες θεωρείτε ότι είναι σωστές και να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα σε όσες θεωρείτε ότι είναι λανθασμένες.

17.56 Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την εξής ιδιότητα:
Η συνάρτηση $|f|$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

17.57 Κάθε συνάρτηση f που δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$, δεν είναι συνεχής στο x_0.

17.58 Για όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ προκύπτει ότι:

$$f'(x) > g'(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

17.59 Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$ με $f'(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $y_0 = f(x_0)$ και ισχύει:

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

17.60 Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[-1, 1]$.

17.61 Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|\eta\mu x - \eta\mu y| \leq |x - y|$$

17.62 Θεωρούμε ένα σύνολο Δ της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$ είναι σταθερή στο Δ.

17.63 Αν η συνάρτηση $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \geq 0$ ισχύει:

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}}$$

τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία λύση.

17.64 Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x) < 0$.

17.65 Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης $f\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ είναι πάντα η μέγιστη τιμή της συνάρτησης αυτής.

17.66 Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x_0) = 0$$

τότε η f παρουσιάζει πάντα ακρότατο στο x_0.

17.67 Κάθε κυρτή συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή.

17.68 Για κάθε συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει $f''(x_0) = 0$ για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$, το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της C_f.

17.69 Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και είναι κυρτή στο Δ, τότε:

$$f''(x) \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \Delta$$

Ασκήσεις για λύση

Α ομάδα

17.70 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \eta\mu x, & \text{αν } x \leq 0 \\ x^3, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της C_f στο σημείο $M(-\pi, f(-\pi))$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

17.71 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2} \quad \text{με } x \neq -2$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

17.72 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

δ) Να κατασκευάσετε τον πίνακα μεταβολών της f και να χαράξετε τη C_f.

ε) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

$$f(x) = \alpha + 1 \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}$$

17.73 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 4}$$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\eta\mu x}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x)\eta\mu x)$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(1+x) - f(1-x)}{x}$

17.74 Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}, & \text{αν } -1 \le x < 0 \\[2mm] \alpha^2 \ln(x+e) + 2\alpha + \dfrac{1}{2}, & \text{αν } x \ge 0 \end{cases}$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha = -1$,

β) η f δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x_0 = 0$ και $x_1 = -1$,

γ) η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ ακριβώς σε ένα σημείο.

17.75 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + \alpha x$. Αν η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στη θέση $x_0 = -1$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha = 2$,

β) η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1},

γ) η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2} \quad \text{με } x > 0$$

δ) από κάθε σημείο της ευθείας $x = -\dfrac{5}{4}$ διέρχεται ακριβώς μία ευθεία η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}.

17.76 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} + \alpha x + \beta, \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Αν η f είναι αντιστρέψιμη, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$,

β) να βρείτε την τιμή του β, ώστε η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $M(0, -4)$,

γ) να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα,

δ) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ και για κάθε $x > -1$ να αποδείξετε ότι:

$$f(x) + 2x \ge 1 + \beta$$

17.77 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = e^{-x}(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

δ) Να κατασκευάσετε τον πίνακα μεταβολών της f και να χαράξετε τη C_f.

17.78 Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{αν } 0 < x < 1 \\[2mm] \dfrac{2x}{x^2+1}, & \text{αν } x \ge 1 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f είναι συνεχής,

ii) η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.
δ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι άξονας συμμετρίας της C_f.
ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = 3 - x$$

έχει ακριβώς δύο λύσεις.

17.79 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{συν}\dfrac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}, & \text{αν } 0 \le x \ne 1 \\ \alpha, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.
β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της C_f στο σημείο $M\big(1, f(1)\big)$.

17.80 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon [0,1] \to [0,1]$ με:

$$f(x) = \frac{(x+1)(x+\alpha)}{x^2+1}, \quad \text{όπου } \alpha \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.
δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}(x) = f(x)$$

ε) Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

17.81 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^3 + 2 - 2^{1-x}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
γ) Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μία λύση.
δ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\text{ημ}x}$$

17.82 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + x - x\ln x, & \text{αν } x > 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
δ) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

17.83 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^3 + \text{ημ}x$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}.
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της C_f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = f(1)$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

17.84 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \ln^2 x - 2x$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\ln^2 x = 2(x-1)$$

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

17.85 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^x + \beta, & \text{αν } x > 0 \\ 3, & \text{αν } x = 0 \\ \alpha x + \beta + 2, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
β) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.
γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to \ln 4} \frac{\sqrt{f(x)} - 3}{x^2 - 4\ln^2 2}$$

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ε) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

17.86 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & \text{αν } x<0\\ 1, & \text{αν } x=0\\ \dfrac{1-e^{-x}}{x}, & \text{αν } x>0\end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι:
i) η f είναι άρτια, ii) η f είναι συνεχής.
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι $f(\mathbb{R})=(0,1]$.
γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

17.87 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.
δ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο.

17.88 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1}, & \text{αν } 0<x\neq 1\\ 1, & \text{αν } x=1\end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$.
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
γ) Να υπολογίσετε τα όρια:
i) $\lim\limits_{x\to+\infty}(xf(x))$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$
δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$(x^2+4x+7)\ln(x^2+x+2)>$$
$$>(x^2+x+1)\ln(x^2+4x+8)$$

17.89 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$2(e^x-x-1)<x^2$$

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
ε) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

17.90 Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ είναι παραγωγίσιμη.
α) Να υπολογίσετε τα όρια:
i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)-1}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(2x)-1}{x}$
β) Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^2(x)-4f(x)=x^2-3$$

τότε:
i) να βρείτε τον τύπο της f,
ii) να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών της C_f οι οποίες διέρχονται από το σημείο $B\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$,
iii) αν σημείο Μ με θετική τετμημένη κινείται κατά μήκος της C_f και απομακρύνεται από τον άξονα y′y με ταχύτητα 2 μονάδες/s, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΒΜ.

17.91 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x-1}\quad \text{με } x\neq 1$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.
δ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.
ε) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\ln(x^2+e^2)+\frac{1}{\ln(x^2+e^2)-1}=3$$

17.92 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+12x,\quad \text{όπου } \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στη θέση $x_1=2$

και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ διέρχεται από το σημείο $N(3, 5)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = -9$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς μία λύση.

δ) Αν $n \in \mathbb{N}^*$, να διερευνήσετε το όριο:

$$\ell = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^n}$$

17.93 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς μία εφαπτόμενη ευθεία της C_f η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$|g(x) + x - 1| \le |f(x)|$$

i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = -x + 1$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

ii) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{g(x)} + 3^{g(x)}}{2^{g(x)} - 3^{g(x)+1}}$$

17.94 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = xe^{-x}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$f(x) = \ln(x - 1)$$

δ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) f(\eta\mu x)\right)$$

17.95 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = e^x \ln x$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας ε της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε τέμνει τη C_f σε ένα ακόμα σημείο N, το οποίο έχει τετμημένη:

$$0 < x_1 < \frac{1}{2}$$

δ) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

17.96 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x - \ln(e^x - x)$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

17.97 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι γνησίως φθίνουσα και κυρτή,

ii) $f((0, +\infty)) = \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της C_f η οποία διέρχεται από το σημείο $M(0, 3)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f^2(x) + 2xf(x) = 3f(x)$$

έχει ακριβώς δύο λύσεις.

δ) Έστω $\rho \neq 1$ η λύση της εξίσωσης του ερωτήματος (γ). Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x > 0$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\ln g(x) = e^{-x} \ln x$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \to \rho} \frac{g(x) + g(\rho)}{g(x) - g(\rho)} = -\infty$$

17.98 Η συνάρτηση $f: [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)f(x) + 3x - x^2}{\eta\mu(x-3)} = 4 \quad \text{και}$$

$$f^2(x) = 2f(x)\sqrt{x+1} + x^2 + 3x + 3$$

για κάθε $x \ge -1$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(3) = 7$,

ii) $f(x) > 0$ για κάθε $x \ge -1$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x)\eta\mu(\pi x) \quad \mu\varepsilon\ x \geq -1$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο:

$$x_0 = -1$$

ii) $g'(-1) = -\pi$,

iii) οι C_f και C_g εφάπτονται στο σημείο:

$$M\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

17.99 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{x}{3}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

δ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(f(x)) - x\right)$$

17.100 Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(1) = f'(1) = 1 \quad \text{και} \quad g(1) = g'(1) = 2$$

α) Να βρείτε την παράγωγο στο σημείο $x_0 = 1$ των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $F(x) = x^2 f(x) - \sqrt{x} \cdot g(x)$

ii) $G(x) = \left(f(x) + g(x)\right)\ln x$

iii) $H(x) = f^3(x) - g(x^2) + f^2(x^2)$

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{F(x) + 1}{x^2 - 1}$ **ii)** $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{G(x)}{\eta\mu(x - 1)}$

iii) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{H(-x)}{x + 1}$

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων G και H εφάπτονται και να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτόμενης ευθείας.

17.101 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 3$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} \quad \text{για κάθε } x > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x + \frac{2}{x} - \ln x \quad \mu\varepsilon\ x > 0$$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

$$x^2 + 2 = x(\alpha + \ln x)$$

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.

ε) Να αποδείξετε ότι:

$$e^{3x^2 - 5x + 2} \geq x^x \quad \text{για κάθε } x > 0$$

17.102 Έστω συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι περιττή,

β) αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση, τότε η f είναι «1 - 1»,

γ) αν για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) > 0$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα,

δ) αν $f'(0) = 1$, τότε $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

17.103 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, γνησίως αύξουσα και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(1) = 2\lim_{x \to 2} \frac{\eta\mu(\sqrt{x - 1} - 1)}{\eta\mu(x - 2)} \quad \text{και}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1 - h)}{h} = 2$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1) = 1$ και $f'(1) = 1$,

β) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{f^2(x^2) - 1}{x - 1} = 4$,

γ) υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) + x_0 = 1$$

δ) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{1}{1 - x_0} - 1$$

17.104 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = xe^x - (1 + e^x)\ln(1 + e^x)$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$g(x) = (1 + e^x)^{\frac{1}{x}}$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η g είναι γνησίως φθίνουσα,

ii) $g\big((0, +\infty)\big) = (e, +\infty)$.

17.105 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x) + f(x) = 2\text{συν}x$$

α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$g(x) = e^x(\text{ημ}x + \text{συν}x)$$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \text{ημ}x + \text{συν}x$$

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

δ) Να βρείτε στο $[0, 2\pi]$ το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

17.106 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$xf'(x) - 2f(x) = x^2 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Η συνάρτηση $g\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν:

$$g(1) = 1 \quad \text{και} \quad g(2) = 2^8$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση $F(x) = x^3\ln x - \ln g(x)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[1, 2]$,

ii) η εξίσωση:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = x^2 + 3f(x)$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$.

17.107 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - x + \alpha, & \text{αν } x \le 0 \\ \dfrac{e^{4x} - 1}{e^{3x} - 1}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x^3}$$

β) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η f είναι συνεχής.

γ) Για $\alpha = \dfrac{4}{3}$ να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

δ) Αν $\alpha \in (-6, -3)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

17.108 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(e^x) = 1 + e^{-x}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \ln x + x - 1 \quad \text{με } x > 0$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}.

ε) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

στ) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

17.109 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(2) = -2e$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$xf'(x) = f(x) + 2e^{\frac{2}{x}}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -xe^{\frac{2}{x}}$ με $x > 0$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

17.110 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x \to 0} \left((e^x - 1)f(x)\right) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = 2$$

Επίσης δίνεται η συνάρτηση $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και για την οποία κοντά στο 0 ισχύει:

$$\frac{x + \eta\mu x}{x} \le h(x) \le f(x)g(x)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $h(0) = 2$,

β) αν $\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - 2}{e^x + x - 1} = 3$, τότε $h'(0) = 6$.

17.111 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x^2}}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\sqrt[4]{2}, \ \sqrt[9]{3} \quad \text{και} \quad \sqrt[16]{4}$$

17.112 Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \alpha\ln x + \beta x^2 - 2, \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Αν η C_f παρουσιάζει καμπή στο σημείο $M(1, -1)$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 1$,

β) να βρείτε το σύνολο τιμών της f,

γ) να λύσετε την εξίσωση:

$$\ln\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2} + (x^2 - 1)^2 = 0$$

δ) αν $x \ge 1$, να αποδείξετε ότι:

$$2\ln x + x^2 + e^2 \ge 2\left(\frac{1}{e} + e\right)x$$

17.113 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = 2e^x - x^2 + 1$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(e^{x^2} - e^x) = x^4 - x^2$$

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με:

$$2e^\alpha = \alpha^2 + \beta \quad \text{και} \quad 2e^\beta = \beta^2 + \alpha$$

να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$.

17.114 Μια δεξαμενή περιέχει νερό. Ανοίγουμε μια βρύση που βρίσκεται στον πάτο της και η στάθμη του νερού αρχίζει να κατεβαίνει. Μετά από t min η μάζα m του νερού που βρίσκεται στη δεξαμενή δίνεται από τη σχέση:

$$m(t) = 50\left(1 - \frac{t^2}{15}\right)^3 \quad \text{σε kg}$$

Να υπολογίσετε:

α) τη μάζα του νερού που υπήρχε αρχικά στη δεξαμενή,

β) το χρονικό διάστημα που χρειάζεται για να αδειάσει η δεξαμενή,

γ) την παροχή της βρύσης τη χρονική στιγμή:

$$t_0 = 1 \text{ min}$$

17.115 Δίνεται η συνάρτηση $f: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{2x}{x+1} + 1$$

α) Να βρείτε το σημείο M της C_f στο οποίο η εφαπτόμενη ευθεία της C_f είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 2x + 5$.

β) Σημείο N κινείται κατά μήκος της C_f και η τεταγμένη του μειώνεται με ρυθμό 1 μονάδα/s. Τη χρονική στιγμή t_0, που το σημείο N διέρχεται από το σημείο M, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου NOM.

17.116 Ένα σημείο M βρίσκεται τώρα στην αρχή O των αξόνων και αρχίζει να κινείται κατά μήκος του τμήματος της παραβολής:

$$C: \ y^2 = 4x \quad \text{με } y \ge 0$$

Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M είναι πάντα θετικός.

α) Να βρείτε τη θέση N του σημείου M στην οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του M είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

β) Αν η τεταγμένη του M μεταβάλλεται με ρυθμό 1 μονάδα/s, τότε τη χρονική στιγμή t_0 που το M διέρχεται από το σημείο N να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

i) της γωνίας $x\widehat{OM}$,

ii) του εμβαδού του τριγώνου OMN.

17.117 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$ με $x > 0$ και έστω $M(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f.

α) Να βρείτε:

i) την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας ε της C_f στο σημείο M,

ii) την τιμή του x_0 για την οποία η ευθεία ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Ένα σημείο N κινείται κατά μήκος της C_f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2e μονάδες/s. Τη χρονική στιγμή t_0 που το σημείο N διέρχεται από το σημείο M, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

i) της τεταγμένης του M,

ii) της απόστασης του σημείου $P(0, -1)$ από την ευθεία ε.

17.118 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - x$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f^2(x) = f(x)$$

έχει ακριβώς τρεις λύσεις.

δ) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

ε) Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει ασύμπτωτες.

στ) Αν $\alpha < -1$ και $\beta > 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{x-\alpha}{f(x)+1} - \frac{x-\beta}{f(x)-1} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο (α, β).

17.119 Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\ln(1-x) - x\ln x, & \text{αν } x \in (0, 1) \\ 0, & \text{αν } x \in \{0, 1\} \end{cases}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της C_f στο σημείο $M\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη.

ε) Αν $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha + \beta = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha\ln\alpha + \beta\ln\beta \geq \ln\frac{1}{2}$$

17.120 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = \frac{1}{2}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$e^x f'(x) = f(x) - f'(x)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(f(x)) > \frac{\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}}$$

δ) Αν $g(x) = \ln x$ με $x > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

17.121 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x) = f(x) + e^x \eta\mu x$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

δ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

17.122 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = -1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f'(x)e^{x+f(x)} = 2x - x^2$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = 2\ln x - x \quad \text{με } x > 0$$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και τις ασύμπτωτες της C_f.

α) Να βρείτε τη θέση N του σημείου M στην οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του M είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

β) Αν η τεταγμένη του M μεταβάλλεται με ρυθμό 1 μονάδα/s, τότε τη χρονική στιγμή t_0 που το M διέρχεται από το σημείο N να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

i) της γωνίας $\widehat{xOM}$,

ii) του εμβαδού του τριγώνου OMN.

17.117 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$ με $x > 0$ και έστω $M(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f.

α) Να βρείτε:

i) την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας ε της C_f στο σημείο M,

ii) την τιμή του x_0 για την οποία η ευθεία ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Ένα σημείο N κινείται κατά μήκος της C_f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2e μονάδες/s. Τη χρονική στιγμή t_0 που το σημείο N διέρχεται από το σημείο M, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

i) της τεταγμένης του M,

ii) της απόστασης του σημείου $P(0, -1)$ από την ευθεία ε.

17.118 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - x$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f^2(x) = f(x)$$

έχει ακριβώς τρεις λύσεις.

δ) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

ε) Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει ασύμπτωτες.

στ) Αν $\alpha < -1$ και $\beta > 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{x - \alpha}{f(x) + 1} - \frac{x - \beta}{f(x) - 1} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο (α, β).

17.119 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\ln(1-x) - x\ln x, & \text{αν } x \in (0, 1) \\ 0, & \text{αν } x \in \{0, 1\} \end{cases}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της C_f στο σημείο $M\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη.

ε) Αν $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha + \beta = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha\ln\alpha + \beta\ln\beta \geq \ln\frac{1}{2}$$

17.120 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = \frac{1}{2}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$e^x f'(x) = f(x) - f'(x)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(f(x)) > \frac{\sqrt{e}}{1 + \sqrt{e}}$$

δ) Αν $g(x) = \ln x$ με $x > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

17.121 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x) = f(x) + e^x \eta\mu x$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

δ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

17.122 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = -1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f'(x)e^{x + f(x)} = 2x - x^2$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = 2\ln x - x \quad \text{με } x > 0$$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και τις ασύμπτωτες της C_f.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\ln\frac{x^2+2}{x^2-2x+3}=2x-1$$

δ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

$$f(x)=\alpha \quad \text{με } \alpha\in\mathbb{R}$$

ε) Να βρείτε το σημείο της C_f το οποίο απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία $y=x$.

17.123 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=x\ln x+\alpha x+1,\quad \text{όπου } \alpha\in\mathbb{R}$$

Αν για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)\geq \alpha+1$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$,

β) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της C_f η οποία είναι παράλληλη με την ευθεία $y=x$,

γ) να βρείτε το σύνολο τιμών της f,

δ) να αποδείξετε ότι:

$$x^x\geq e^{x-1}\quad \text{για κάθε } x>0$$

17.124 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0 \quad \text{και}$$

$$f''(x)+f(x)=1 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)}{x^3}=0$,

β) $f^2(x)-2f(x)+\left(f'(x)\right)^2=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

γ) $-1\leq f'(x)\leq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{x^2+1}=0$,

ε) αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$, τότε:

$$f(\alpha)+\alpha-\beta\leq f(\beta)\leq f(\alpha)+\beta-\alpha$$

17.125 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(e)=0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$x\big(f'(x)+f(x)\big)+e^{-x}=0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\frac{1-\ln x}{e^x}\quad \text{με } x>0$$

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο στο οποίο παρουσιάζει ελάχιστη τιμή.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=1-\ln(-x)\quad \text{με } x<0$$

i) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h=g\circ f$.

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

17.126 Δίνεται η συνάρτηση $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\ln\big(1+g^2(x)\big)=g(x)$$

Επίσης θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ για την οποία ισχύει:

$$g(x)=2x-\frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

β) $f(x)=x^2e^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

γ) η εξίσωση:

$$f\left(x^2-e^{-2x-3}\right)=0$$

έχει ακριβώς τρεις λύσεις.

17.127 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=2$ έχει γνησίως αύξουσα παράγωγο και ισχύει:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}=2$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(2)=f'(2)=2$,

β) υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$,

γ) $f(x)\geq f(\xi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

δ) αν F είναι μια αρχική της f και ισχύει $f(\xi)>0$, τότε η εξίσωση:

$$F(x)+2x=x^2+F(1)$$

έχει ακριβώς μία λύση στο $(0,1)$.

17.128 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon [1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(e)=1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\geq 1$ ισχύει:

$$xf(x)f'(x)=\ln x$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = \ln x$ με $x \geq 1$,

β) η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1},

γ) $e^{1+f(x)} \leq f^{-1}(x) \leq f^{-1}(x)(e^{f(x)} - 1) + e$ για κάθε $x \geq 1$,

δ) αν για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f^{-1}(x) \geq x^{\alpha}, \quad \text{όπου } \alpha \in \mathbb{R}$$

τότε $\alpha = e$.

17.129 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + 1}{x} = -1 \quad \text{και}$$

$$xf'(x) = xe^x + x^2e^x - 2x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0) = -1$,

ii) $f(x) = x(e^x - 2) - 1$ με $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(x)}{x} - \frac{f(x) + 4}{x - 2} = 1$$

έχει ακριβώς δύο λύσεις.

17.130 Η συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ με $f(1) = 2$ είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση:

$$2\big(f'(x)\big)^3 = 27f(x) \quad \text{για κάθε } x > 0$$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της C_f στο σημείο της $M(1, 2)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.

γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{συν}f(x)}{f(x)}$$

δ) Να βρείτε τον τύπο της f.

17.131 Η συνάρτηση $f\colon (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(e) = \frac{1}{e - 1}$$

είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x > 1$ ισχύει:

$$xf'(x) + f(x) = \frac{1}{x} + f'(x)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x - 1} \quad \text{με } x > 1$$

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$(2e^x + \sqrt{x} + 1)^{e^x + 1} = (e^x + 2)^{2e^x + \sqrt{x}}$$

17.132 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = |3x + \alpha\,\text{εφ}x - 2\,\text{ημ}x|, \quad \text{όπου } \alpha \in \mathbb{R}$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στη θέση $x_0 = 0$,

β) να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$,

γ) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία,

δ) να βρείτε το σύνολο τιμών της f,

ε) να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

17.133 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\colon (1, +\infty) \to \mathbb{R}$$

με:

$$f(x) = (x - \alpha)\ln(x - 1) - \beta x$$

Αν η C_f εφάπτεται της ευθείας $y = -2$ στο σημείο $M(2, -2)$, τότε:

α) να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

β) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα,

γ) να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 > 1$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$,

δ) να βρείτε το σύνολο τιμών της f,

ε) να αποδείξετε ότι:

$$f(x + 1) + f(x - 1) > 2f(x)$$

για κάθε $x > 2$,

στ) να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (e+1, e^3+1)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) - f'(\xi_2) = -1$$

17.134 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) + \ln f(x) = x + 1$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή,

β) η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την f^{-1},

γ) ισχύει ότι:

$$0 < f(2) < 3 - \frac{2}{e}$$

Β ομάδα

17.135 Σημείο Μ κινείται κατά μήκος της γραφικής παράστασης του παραβολικού τμήματος:

$$y = x^2 \quad \text{με } x \geq 0$$

Η τετμημένη $x(t)$ του Μ ως συνάρτηση του χρόνου t δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = \frac{t^2}{4}$$

Η εφαπτόμενη ευθεία ε της παραβολής στο σημείο Μ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Ν. Επιπλέον θεωρούμε το σημείο $P(3, 0)$. Τη χρονική στιγμή που η ευθεία ε είναι κάθετη στη ΜΡ να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\widehat{MNP}$.

17.136 Έστω συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x, y > 0$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(xy) = f(x) + f(y) + xy - x - y$$

α) Αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 2$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη,

ii) να βρείτε τον τύπο της f,

iii) να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

17.137 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \lambda$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Η τετμημένη ενός σημείου $M(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha > 0$ αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες/s και τη χρονική στιγμή t s το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα σημεία $O(0, 0)$, $A(\alpha, 0)$ και $B(0, f(\alpha))$ είναι $E(t)$.

i) Τη χρονική στιγμή που η τετμημένη του Μ είναι 4, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(t)$.

ii) Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο Μ έχει τετμημένη 2, να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(t)$.

17.138 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(\sqrt{x})}{\sqrt{x} - 1} = 0$$

και:

$$2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x) = e^x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(1) = 0$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$xe^{x^2 - x} \geq \frac{\ln^2 x + 1}{(x^2 - x)^2 + 1}$$

17.139 Η συνάρτηση $f\colon (1, +\infty) \to (0, +\infty)$ με $f(e) = 1$ είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση:

$$xf'(x) + f^2(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x > 1$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} \quad \text{με } x > 1$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{e}{\ln x} + x \geq 2e$$

για κάθε $x > 1$.

δ) Αν $e < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$e\ln\frac{\alpha}{\beta} + (\beta - \alpha)\ln\alpha\ln\beta > 0$$

17.140 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = xe^{-\lambda x}, \quad \text{όπου } \lambda < 0$$

Η εφαπτόμενη ευθεία ε της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ διέρχεται από το σημείο $N(0, -e)$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\lambda = -1$,

β) η ευθεία ε δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη C_f εκτός του $M(1, f(1))$,

γ) αν $0 < \alpha < \beta$, τότε:

$$\frac{2\alpha + \beta}{3} < \ln\frac{2f(\alpha) + f(\beta)}{2\alpha + \beta}$$

17.141 Η συνάρτηση $f\colon (e, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(e^2) = 0$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x > e$ ισχύει:

$$f(x) + \ln(xf'(x)) = 0$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι γνησίως αύξουσα,

β) $f(x) = \ln(\ln x - 1)$ με $x > e$,

γ) $f((e, +\infty)) = \mathbb{R}$,

δ) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \ln f(x)) = +\infty$.

17.142 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κοίλη και η C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $M(2, 0)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

ii) η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή στη θέση $x_0 = 2$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$g(x) = f(x^2 - x)$$

i) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις.

17.143 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = 3(x^2 + 1)\ln(x^2 + 1) - 2x^3 - 3x^2$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$\ln(x^2 + 1) = \frac{2x^3 + \alpha + 3x^2}{3(x^2 + 1)}$$

δ) Αν $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$e^{\alpha + \beta} > (\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1)$$

17.144 Η συνάρτηση $f\colon (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν:

$$f(e) = 0 \quad \text{και} \quad f'(x) = \frac{f(x)}{x} - e^{\frac{f(x)}{x}} \quad \text{για κάθε } x > 1$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = -x\ln(\ln x) \quad \text{με } x > 1$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x}$$

ε) Αν $x > e$, να αποδείξετε ότι:

$$f'(x+1) < f'(x) < \frac{f(x)}{x} < \frac{e}{x} - 1$$

17.145 Η συνάρτηση $f\colon (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x \leq 0$ ισχύει:

$$f''(x) = e^{2f(x)} + e^{f(x)}$$

Αν η ευθεία $y = 2x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $O(0, f(0))$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) = 1 + e^{f(x)} \quad \text{για κάθε } x \leq 0$$

β) να βρείτε τον τύπο της f,

γ) να βρείτε το σύνολο τιμών της f,

δ) να αποδείξετε ότι:

$$2x \leq f(x) \leq x \quad \text{για κάθε } x \leq 0$$

ε) να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = 1 - \text{συν}x$$

17.146 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στη θέση $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f''(x) + f(x) + 2 > 2f'(x) + x$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^n f(x^{-n})\right) = 0$ με $n \in \mathbb{N}^*$,

β) η συνάρτηση $g(x) = \left(f(x) - x\right)e^{-x}$ είναι κυρτή,

γ) $f(x) \geq x(1 - e^x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

δ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ημx}{xf(x) + x^2e^x} = 0.$

17.147 Η συνάρτηση $f\colon [1, 4] \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

$$f(1) = 2,\ f(4) = 1 \quad \text{και} \quad f\left([1, 4]\right) = [-2, 3]$$

Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$,

β) η C_f έχει τουλάχιστον δύο οριζόντιες εφαπτόμενες ευθείες και έχει ένα τουλάχιστον πιθανό σημείο καμπής,

γ) η ευθεία ε: $y = -x + 2$ τέμνει τη C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο,

δ) υπάρχει τουλάχιστον μία εφαπτόμενη ευθεία της C_f η οποία διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$,

ε) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 4)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια, ώστε:

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} - \frac{1}{2f'(\xi_2)} = -\frac{3}{2}$$

17.148 Η συνάρτηση $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και ισχύουν:

$$f(2) < f(1) + f'(1),\ \ f'\left([0, 2]\right) = [1, 3] \quad \text{και}$$

$$f''(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$,

β) η f είναι κοίλη,

γ) η εξίσωση $f(x+1) - f(x) = 3x^2$ έχει ακριβώς μία λύση,

δ) η ευθεία $y = 3x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$h(x) = \ln f(x)$$

ε) αν η συνάρτηση $g\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ με:

$$g(1) = g'(1) = 3$$

είναι κυρτή, τότε ισχύει:

$$f(x) < e^{g(x)} \text{ για κάθε } x \in [0, 2]$$

17.149 Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις:

$$f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R} \text{ και } g\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$

με $f(1) = 0$ και $g(1) = 2$. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$f'(x)g(x) = 1 + \frac{1}{x} \text{ και } g'(x)f(x) = \ln x$$

τότε:

α) να αποδείξετε ότι:

$$f(x)g(x) = (x+1)\ln x \quad \text{με } x > 0$$

β) να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων f και g,

γ) να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$h(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{2}{g(x)}$$

δ) αν $0 < α < β$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{f(β) - f(α)}{β - α} > \frac{2}{g(α) + g(β) - 2}$$

ε) να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{4(x-1)}{(x+1)(x^2+1)}$$

17.150 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^2(x) + x^2 = 2xf(x) + e^{2x}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + e^x$ με $x \in \mathbb{R}$.

β) Αν $α < β$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν:

$$\xi_1, \xi_2 \in (α, β) \quad \text{με } \xi_1 \neq \xi_2$$

τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = e^{\xi_2} - 1$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to e+1} \dfrac{x - e - 1}{f^{-1}(x) - 1}$ **ii)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f^{-1}(x)}{f(x)}$

17.151 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \quad \text{με } f(x) = 2x - ημ^2x$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f\left([0, 2\pi]\right) = [0, 4\pi]$,

β) $\left|f(α) - f(β)\right| \geq |α - β|$ για κάθε $α, β \in [0, 2\pi]$,

γ) αν $α, β \in [0, 2\pi]$, τότε ισχύει:

$$\left|f(α) - f(β)\right| = |α - β| \Leftrightarrow α = β$$

δ) η συνάρτηση $F(x) = f^{-1}(x) - x$ με $x \in [0, 4\pi]$ είναι γνησίως φθίνουσα.

17.152 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$xf''(x) > f'(x)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f'(x)}{x} \quad \text{με } x > 0$$

είναι γνησίως αύξουσα,

ii) η συνάρτηση $h(t) = t^2 f(x) - x^2 f(t)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, x]$ με $x > 0$,

iii) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε:

$$g(\xi) = \frac{2f(x)}{x^2}$$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση:

$$F(x) = \frac{f(x)}{x^2}$$

ως προς τη μονοτονία.

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^2 f(x) > f(x^2)$$

17.153 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ είναι κυρτή, η συνάρτηση $g\colon \mathbb{R} \to (-\infty, 0)$ είναι κοίλη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x) > 0 > g'(x)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση fg είναι γνησίως φθίνουσα και κοίλη,

β) αν η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ είναι ασύμπτωτη των C_f και C_g στο $-\infty$, τότε:

$$\alpha = \beta = 0$$

γ) αν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ με $\kappa < \lambda$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(\kappa) + g(\kappa) = 2\kappa \quad \text{και} \quad f(\lambda) + g(\lambda) = 2\lambda$$

τότε η εξίσωση:

$$\big(x - f(x)\big)\big(1 - f'(x)\big) = \big(x - g(x)\big)\big(1 - g'(x)\big)$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο (κ, λ).

17.154 Η συνάρτηση $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f(\alpha) < f(\beta) = 0 < f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0) = 0$$

β) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi) \geq f'(\xi)$$

γ) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f''(\rho) < 0$$

δ) η εξίσωση:

$$f(x) + x^5 = \alpha^5$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α, β).

17.155 Έστω συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}^*$ με $f(1) = 1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x > 0$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$xf'(x) + 2f(x) < 0$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{x^2} \quad \text{με } x > 0$$

ως προς το πρόσημο.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

γ) Αν $\alpha > 1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(\frac{1}{\alpha}, \alpha\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) + \alpha + \frac{1}{\alpha} < 0$$

17.156 Έστω συνάρτηση $f\colon [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \ell \in \mathbb{R} \quad \text{και}$$

$$f(x)\ln f(x) = x \quad \text{για κάθε } x \geq 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \geq 0$,

ii) $f'(0) = 1$.

β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 > 0$, να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο το οποίο έχει τετμημένη $-f(x_0)$.

γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη, με $f(2e^2) = e^2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία εφαπτόμενη ευθεία της C_f η οποία διέρχεται από το σημείο $M(0, 2)$.

17.157 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = \ln 2$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x) \geq \frac{e^x}{e^x + 1} + 2$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$,

β) η f δεν έχει ακρότατα,

γ) η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ ακριβώς σε ένα σημείο,

δ) $f(1) \geq \ln(1 + e) + 2$.

17.158 Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = e$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$\frac{x}{x+1} f'(x) = f(x) + \frac{x^2 - e^x}{x+1}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^x + xe^{x-1} - x \quad \text{με } x > 0$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) \geq (e+1)x - 1 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

17.159 Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f'(x) - f(x) = f(x)\ln x$$

α) Να αποδείξετε ότι:

  i) $f(x) = x^x$ με $x > 0$,

  ii) $f(x+1) > f(x)$ για κάθε $x > 0$.

β) Να βρείτε την τιμή του $\alpha > 0$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) \geq \alpha^{x-1} \text{ για κάθε } x > 0$$

γ) Θεωρούμε την $g(x) = 1 + \ln x$ με $x > 0$. Να αποδείξετε ότι:

  i) οι C_f και C_g εφάπτονται,

  ii) $1 + \ln x \leq x \leq e^{x-1} \leq x^x$ για κάθε $x > 0$.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = f(x)f(1-x) \quad \text{με } x \in (0, 1)$$

  i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της.

  ii) Αν $\alpha, \beta \in (0, 1)$, να αποδείξετε ότι:

$$1 \leq h(\alpha) + h(\beta) < 2$$

17.160 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ισχύουν:

$$f(0) = \ln 2, \ \ 2f'(0) + 1 = 0 \quad \text{και}$$

$$f''(x)e^{-x} = \left(f'(x)\right)^2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(x) + 1 = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$ με $x \in \mathbb{R}$,

β) η f είναι κυρτή,

γ) $f(x-2) + f(x+4) > 2f(x+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

δ) $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$ με $x \in \mathbb{R}$.

17.161 Οι συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = -1$ και $g(1) = 2$ είναι παραγωγίσιμες και για κάθε $x > 0$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$f'(x) = f^2(x) > 0 \quad \text{και} \quad \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

α) Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων f και g.

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(g(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}}$$

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$\frac{2\ln x + 3}{f'(x) + 1} + \frac{2e^{x-1}}{g'(x) - 1} = 0$$

17.162 Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

$$f(1) = 1, \ \ f'(1) = 0 \quad \text{και}$$

$$f'(x)(1 - 2\ln x) + xf''(x) = \frac{2f(x)}{x} \quad \text{για κάθε } x > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x^{\ln x} \quad \text{με } x > 0$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x}$$

δ) Να βρείτε τις τιμές των α, $\beta > 0$ και $\gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$\alpha^{\ln\alpha} + \beta^{\ln\beta} = 2 - \gamma^2$$

17.163 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$2e^{f(x)} - f^2(x) = 2x$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

δ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$

17.164 Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο και ισχύουν:

$$f(1) = 0,\ \ f'(1) = 1,\ \ f(x) \geq \ln x \quad \text{για κάθε } x > 0$$

και:

$$xf'(x)\ln x + f(x) \geq 2\ln x \quad \text{για κάθε } x > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $g(x) = \ln x$ εφάπτονται στο σημείο $M(1, 0)$.

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{e^{f(x)} - e^{-f(x)}}{\ln x - x + 1}$$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = f(x)\ln x - \ln^2 x \quad \text{με } x > 0$$

i) Να αποδείξετε ότι η h είναι αύξουσα.

ii) Αν $0 < \alpha < \beta$ τέτοια, ώστε:

$$h'(\alpha)e^{h(\beta)} = h'(\beta)e^{h(\alpha)}$$

να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$\left(h'(x_0)\right)^2 = h''(x_0)$$

δ) Αν $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha, \alpha+1)$ τέτοιο, ώστε:

$$1 + f(\xi) \geq \ln\frac{(\alpha+1)^{\alpha+1}}{\alpha^\alpha}$$

17.165 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0) = 0$,

ii) η f είναι παραγωγίσιμη,

iii) $\dfrac{x}{2} < f(x) < xf'(x) < x$ για κάθε $x > 0$.

β) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$$

17.166 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f^2(x) + f(x) = 8x^3$$

για κάθε $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1},

ii) $0 < f(x) < 2x$ για κάθε $x > 0$,

iii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 2$.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

17.167 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + f(x) = 2e^x$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

ε) Να αποδείξετε ότι:

$$\left|f(x) - f(y)\right| \leq 2|e^x - e^y| \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

στ) Να αποδείξετε ότι:

$$e^{\frac{x}{3}} < f(x) < e^{\frac{x}{2}} \quad \text{για κάθε } x > 0$$

17.168 Η συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x > 0$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) \geq x - 1 \quad \text{και} \quad e^{f'(x)-1}f''(x) = 1$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι κυρτή,

ii) αν $x \in (0, 1)$, τότε:

$$f(1-x) + f(1+x) > 0$$

iii) $f'(1) = 1$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

δ) Αν $0 < \alpha < \beta$ και επιπλέον ισχύει η σχέση:

$$\alpha^{\alpha} = \beta^{\beta}$$

να αποδείξετε ότι $\beta \in (e^{-1}, 1)$.

ε) Αν $x > 1$, να αποδείξετε ότι:

$$(x-1)^{x-1}(x+1)^{x+1} > x^{2x}$$

17.169 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x) = e^{2x}f(-x)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f''(x) = 2f'(x) - f(x)$ με $x \in \mathbb{R}$,

ii) $f(x) = e^x$ με $x \in \mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση:

$$g\big(2x + f(x) + 1\big) = 2g(x) + f\big(g(x)\big) + 1$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(g \circ g)(x) = x$ έχει τουλάχιστον μία λύση.

17.170 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x)f'(-x) = -x$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + f(3x) = f(\eta\mu x) + f(2x)$$

17.171 Η συνάρτηση $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(x) = (e^x - 1)\ln x$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

β) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$.

δ) Αν $x > 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{e^x - 1}{e - 1} > \frac{x - 1}{\ln x}$$

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$e^{\xi}\ln(e\xi^{\xi}) = 1$$

17.172 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} + f'(x) + e^{-x} = 0$$

και:

$$f(x) \leq e^{-1} = f(1)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f''(x) + f'(x) + e^{-x} = 0$ με $x \in \mathbb{R}$,

ii) $f(x) = xe^{-x}$ με $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Αν $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$1 + e^2f(x+1) \geq e^2f(x)$$

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$g(x) = xf(x)$$

17.173 Οι συναρτήσεις $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες, η f είναι «1 - 1» και η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ρίζες $\rho_1 < 0 < \rho_2$. Επίσης ισχύουν οι σχέσεις:

$$f\big(f(x)\big) = f\big(g(x)\big) + f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) - g(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

β) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία λύση,

γ) υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτόμενη ευθεία είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$,

δ) αν η g είναι γνησίως αύξουσα, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα,

ε) αν η g είναι κυρτή, τότε η f είναι κυρτή.

17.174 Δίνεται συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ η οποία για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\left|f(x)-f(y)-2^x+2^y\right|\leq(x-y)^2$$

Η συνάρτηση $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(1)=2g(0)=2$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$g'(x)-g'(y)=-2x+2y$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x)=2^x$ με $x\in\mathbb{R}$,

β) $g(x)=-x^2+2x+1$ με $x\in\mathbb{R}$,

γ) οι C_f και C_g έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία, τα οποία να βρείτε,

δ) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi)g'(\xi+1)+f'(\xi)g(\xi+1)=0$$

17.175 Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$2f(x)=x+\eta\mu^2 f(x)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

β) η f είναι παραγωγίσιμη,

γ) $f(0)=0$ και $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$,

δ) $\dfrac{1}{3}\leq f'(x)\leq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

ε) $\left|f(\alpha)-f(\beta)\right|\leq|\alpha-\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$,

στ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{2}$, **ζ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)+x}{f(x)+2x}=\dfrac{4}{5}$.

17.176 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο με $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f'(0)<\frac{f(2)-f(0)}{2}\quad\text{και}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}=0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι κυρτή, **ii)** $f'(1)=0$,

iii) η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στη θέση $x_0=1$.

β) Έστω F μια αρχική της f. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$G(x)=F(x)-F(2-x)$$

i) Να μελετήσετε την G ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

ii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$G(x)>2f(1)(x-1)$$

17.177 Έστω $f\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια μη σταθερή συνάρτηση η οποία για κάθε $x, y>0$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(xy)=\kappa f(x)f(y),\quad \text{όπου } \kappa>0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1)=\dfrac{1}{\kappa}$

ii) $f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{\kappa^2}$ για κάθε $x>0$

iii) $f(x)>0$ για κάθε $x>0$

iv) $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)\geq\dfrac{2}{\kappa}$ για κάθε $x>0$

β) Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=\lambda$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και αν $\kappa=1$, να βρείτε τον τύπο της f.

17.178 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f\left(f(x)\right)=\ln(e^x+4)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι αντιστρέψιμη,

β) υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0)=\ln(e^{x_0}+2)$$

γ) ισχύει ότι $f\left(f(x_0)\right)=\ln(e^{f(x_0)}+2)$,

δ) η f είναι γνησίως αύξουσα,

ε) αν η f είναι παραγωγίσιμη, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{e^{\xi}}{e^{\xi}+2}$$

17.179 Η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=0,\ f'(1)=f'(-1)=2$$

και:

$$f''(x)\neq 2x \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=1$ και $f'(0)=0$,

ii) η εξίσωση $f'(x)=x^2$ έχει ακριβώς μία λύση.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}$$

με $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) η g είναι γνησίως αύξουσα,

ii) για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$g(\text{συν}x)>g\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$$

γ) Σημείο Μ με θετική τετμημένη κινείται κατά μήκος της C_g και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι πάντα θετικός. Να βρείτε τη θέση του Μ στην οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

17.180 Η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=1$ είναι περιττή, γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$g(x)=\frac{\left(1+f(x)\right)^2}{1+f^2(x)} \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

β) $g(1)=2$ και $g(-1)=0$,

γ) υπάρχουν $\xi_1,\ \xi_2\in(-1,\,1)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοια, ώστε:

$$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=1$$

δ) η g' είναι άρτια,

ε) αν η f είναι παραγωγίσιμη, τότε $g(\mathbb{R})=[0,\,2]$.

17.181 Η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση:

$$(x^2+1)f'(x)+xf(x)=0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{με } x\in\mathbb{R}$$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(f(x)\right)\geq\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

δ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f\left(f\left(\dfrac{\sqrt{x^2+\text{ημ}x}}{x^3+2021x}\right)\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{f\left(f(x)\right)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$$

ε) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2}{\sqrt{f^2(x)+1}}+2=2\text{συν}x+\sqrt{2}$$

17.182 Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} e^{\alpha x}+\beta x, & \text{αν } x<0\\ f(0)+\beta x-\ln(x+1), & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\geq 1$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=1$,

β) να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)+f(x-h)-2f(x)}{h}<f(x)$$

γ) αν $x\neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$1<f(x)<xf'(x)+1$$

δ) αν $\kappa,\ \lambda\in\mathbb{R}^*$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{\kappa f'(\kappa)}{x-1}+\frac{f(\lambda)-1}{x+1}=0$$

έχει ακριβώς μία λύση,

ε) να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x^2)=x^2-e^{-x}+2$$

17.183 Η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\text{ημ}x}=1 \quad \text{και}$$

$$f''(x)+2x=f'(x)+x^2 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = e^x - \frac{x^3}{3} - 1$ με $x \in \mathbb{R}$,

β) υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε η f να παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στη θέση x_0,

γ) $-1 < f(x_0) < 0$,

δ) $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{3\left(f(x) - e^{x_0} + 1\right) + x_0^3}{f'(e^x - x^2)} = 0$.

17.184 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ είναι άρτια, δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν οι σχέσεις:

$$f'(1) = 1,\ \ f(1) = 0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{h} = -\frac{2f'(x)}{x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \ln|x| \quad \text{με } x \in \mathbb{R}^*$$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = |f(x)| \quad \text{με } x \in \mathbb{R}^*$$

i) Να βρείτε την παράγωγο της g.

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_g.

iii) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e \cdot 2^{f(x)} + e^{g(x)}}{e^{f(x)} + 2^{g(x)}}$$

γ) Ένα σημείο Μ με θετική τετμημένη κινείται κατά μήκος της C_f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $e^2 + 1$ μονάδες/s. Τη χρονική στιγμή t_0 η εφαπτόμενη ευθεία ε της C_f στο σημείο Μ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$, τη χρονική στιγμή t_0.

17.185 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2h) + 2f(-h)}{h^2} > 0$$

και:

$$f''(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν η συνάρτηση $g(x) = |f(x) - x|$ είναι παραγωγίσιμη, τότε:

α) να αποδείξετε ότι:

i) $f''(0) > 0$, **ii)** η f είναι κυρτή,

β) να βρείτε:

i) την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της C_f στο σημείο $O(0, 0)$,

ii) το σημείο της C_f το οποίο απέχει από την ευθεία ε: $x - y - 2020 = 0$ ελάχιστη απόσταση, καθώς και την ελάχιστη αυτή απόσταση,

γ) αν $x > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$e^x f(e^x) + f(e^{3x}) > (e^x + 1) f(e^{2x})$$

17.186 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = \sqrt{2}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(x) f'\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$,

β) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ για κάθε $x > 0$,

γ) η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1},

δ) οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν την ίδια πλάγια ασύμπτωτη.

17.187 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6} = \ell \in \mathbb{R}$$

και:

$$3e^{f(x)} + 4f(x) \geq 3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(2) = f'(2) = 0$ και $\ell = 4$,

β) $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$,

δ) η εξίσωση $f(x)e^x = x$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(2, +\infty)$, ενώ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(-\infty, 2)$.

17.188 Έστω η συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 1 + e^{-1}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x > 0$ ισχύουν οι σχέσεις:

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = e^x - \dfrac{x^3}{3} - 1$ με $x \in \mathbb{R}$,

β) υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε η f να παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στη θέση x_0,

γ) $-1 < f(x_0) < 0$,

δ) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{3\left(f(x) - e^{x_0} + 1\right) + x_0^3}{f'(e^x - x^2)} = 0.$

17.184 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ είναι άρτια, δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν οι σχέσεις:

$$f'(1) = 1, \ \ f(1) = 0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{h} = -\frac{2f'(x)}{x} \ \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \ln|x| \quad \text{με } x \in \mathbb{R}^*$$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = \left|f(x)\right| \quad \text{με } x \in \mathbb{R}^*$$

- **i)** Να βρείτε την παράγωγο της g.
- **ii)** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_g.
- **iii)** Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e \cdot 2^{f(x)} + e^{g(x)}}{e^{f(x)} + 2^{g(x)}}$$

γ) Ένα σημείο M με θετική τετμημένη κινείται κατά μήκος της C_f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $e^2 + 1$ μονάδες/s. Τη χρονική στιγμή t_0 η εφαπτόμενη ευθεία ε της C_f στο σημείο M διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$, τη χρονική στιγμή t_0.

17.185 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2h) + 2f(-h)}{h^2} > 0$$

και:

$$f''(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν η συνάρτηση $g(x) = |f(x) - x|$ είναι παραγωγίσιμη, τότε:

α) να αποδείξετε ότι:

- **i)** $f''(0) > 0$,
- **ii)** η f είναι κυρτή,

β) να βρείτε:

- **i)** την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της C_f στο σημείο $O(0, 0)$,
- **ii)** το σημείο της C_f το οποίο απέχει από την ευθεία $\varepsilon\colon x - y - 2020 = 0$ ελάχιστη απόσταση, καθώς και την ελάχιστη αυτή απόσταση,

γ) αν $x > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$e^x f(e^x) + f(e^{3x}) > (e^x + 1) f(e^{2x})$$

17.186 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = \sqrt{2}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(x) f'\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$,

β) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ για κάθε $x > 0$,

γ) η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1},

δ) οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν την ίδια πλάγια ασύμπτωτη.

17.187 Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6} = \ell \in \mathbb{R}$$

και:

$$3e^{f(x)} + 4f(x) \geq 3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(2) = f'(2) = 0$ και $\ell = 4$,

β) $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$,

δ) η εξίσωση $f(x)e^x = x$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(2, +\infty)$, ενώ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(-\infty, 2)$.

17.188 Έστω η συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 1 + e^{-1}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x > 0$ ισχύουν οι σχέσεις:

17.193 Η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(0) = f'(0) = 0$$

και $f(x) < f'(x)$ για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι γνησίως αύξουσα,

β) $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$,

γ) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, +\infty)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) < f''(\xi_2)$$

δ) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\rho) + f(\rho) = \eta\mu f(\rho) + (\rho - 1)^2$$

17.194 Η συνάρτηση $f: [2, 4] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(2) > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει μέγιστη τιμή στη θέση $x_0 = 2$.

β) Αν $f(2) = 5$ και $f(4) = 9$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (2, 4)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_1) = 7$$

ii) να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_2, x_3 \in (2, 4)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(x_2) + f'(x_3) = f'(x_2)f'(x_3)$$

iii) να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f'(x) = 4 - \frac{f(x) - 1}{x}$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(2, 4)$,

iv) αν η f είναι κυρτή, να βρείτε το σύνολο τιμών της f,

v) αν ισχύει $f'(x) \le 2$ για κάθε $x \in (2, 4)$, να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{για κάθε } x \in [2, 4]$$

17.195 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(0) = f'(1) + 2 - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1 + 3h) - f(1 - 2h)}{h} = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \quad \text{και}$$

$$\eta\mu\big((f'(x) + 1)(f(x) + x) - x\big) =$$

$$= f(x)f'(x) + f(x) + xf'(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0) = 1$,

ii) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ με $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x) - 1}{x} \quad \text{με } x > 0$$

είναι αντιστρέψιμη.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$h(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$$

Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

$$f(h(x)) = \frac{1}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}} \quad \text{με } \lambda \in \mathbb{R}$$

Κριτήριο αξιολόγησης

Θέμα 1

A. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ με $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x - x$ με $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $g \circ f = g - f$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g \circ f$.

γ) Η ευθεία $x = \lambda > 0$ τέμνει τις C_f και C_g στα σημεία A και B αντίστοιχα. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση των σημείων A και B.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{1}{e^2}$$

B. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon (-\alpha, \alpha) \to (0, +\infty)$ με $\alpha > 0$. Αν $f(0) = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \to 0} \left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}} = e^{f'(0)}$$

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1, & \text{αν } x < 0 \\ \ln(x+1), & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να εξετάσετε αν η f παρουσιάζει ακρότατα.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

δ) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

ε) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)}$

ii) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)}$

Θέμα 3

Η συνάρτηση $f\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$f'(x) + f(x)\text{εφ}x = \text{ημ}x$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \left(1 - \ln(\text{συν}x)\right)\text{συν}x$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x)}{\text{συν}x} \quad \text{με } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

i) Να κατασκευάσετε τον πίνακα μεταβολών της g και να σχεδιάσετε τη C_g.

ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $g(x - \pi) = \alpha$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

Θέμα 4

Η συνάρτηση $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ είναι συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(e^{xh} - 1)\left(f(x + 2h) - f(x)\right)}{2h^2} = 2f(x) + 2x(\ln x - 1) \quad \text{για κάθε } x > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x\ln x, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x^{2021}) = f(x^2) + f(x^{2022})$.

ε) Σημείο Μ κινείται κατά μήκος της C_f και η τετμημένη του απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με σταθερή ταχύτητα. Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο σημείο Μ με τον άξονα $x'x$. Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ κατά την οποία η γωνία θ γίνεται ελάχιστη.