15 Επανάληψη στις συναρτήσεις

Θεωρία - Ερωτήσεις κλειστού τύπου

Α. Ελέγχω τις γνώσεις μου στη θεωρία

Ορισμοί

15.1 Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$;

15.2 Τι λέγεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f;

15.3 Πότε μια συνάρτηση $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ λέγεται άρτια, πότε περιττή και πότε περιοδική;

15.4 Τι λέγεται σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f\colon D_f \to \mathbb{R}$;

15.5 Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

15.6 Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f\colon D_f \to \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g\colon D_g \to \mathbb{R}$$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

$$f+g, \quad f-g, \quad fg \quad \text{και} \quad \frac{f}{g}$$

15.7 Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f\colon D_f \to \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g\colon D_g \to \mathbb{R}$$

Να ορίσετε τη σύνθεση της g με την f.

15.8 Θεωρούμε ένα διάστημα Δ και τη συνάρτηση $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$. Πότε η f λέγεται γνησίως αύξουσα στο Δ και πότε λέγεται γνησίως φθίνουσα στο Δ;

15.9 Πότε μια συνάρτηση f λέγεται αύξουσα και πότε φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

15.10 Θεωρούμε μια συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο και πότε (ολικό) ελάχιστο στο A;

15.11 Πότε μια συνάρτηση $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ λέγεται «1 - 1» (ένα προς ένα);

15.12 Έστω μια «1 - 1» συνάρτηση $f\colon D_f \to \mathbb{R}$. Ποια συνάρτηση λέγεται αντίστροφη της f;

Ιδιότητες - Προτάσεις

15.13 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$. Ποια είναι η σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και $-f$, καθώς και των συναρτήσεων f και $|f|$;

15.14 Έστω μια αντιστρέψιμη συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$. Ποιες είναι οι ιδιότητες της αντίστροφης συνάρτησης;

15.15 Δίνεται η αντιστρέψιμη συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ η οποία διχοτομεί τις γωνίες $\widehat{xOy}$ και $\widehat{x'Oy'}$.

Β. Ερωτήσεις τύπου πολλαπλής επιλογής

Σε καθεμία από τις επόμενες ημιτελείς προτάσεις να επιλέξετε τη φράση που τη συμπληρώνει σωστά.

15.16 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in A$. Η τιμή της f στο σημείο x_0 είναι:

Α: η τετμημένη του σημείου τομής της C_f με την ευθεία $x = x_0$.

Β: η τετμημένη του σημείου τομής της C_f με την ευθεία $y = x_0$.

Γ: η τεταγμένη του σημείου τομής της C_f με την ευθεία $x = x_0$.

Δ: η τεταγμένη του σημείου τομής της C_f με την ευθεία $y = x_0$.

15.17 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to [\alpha, \beta]$. Τότε:

Α: τα α, β είναι τα ολικά ακρότατα της f.

Β: αν $\gamma \in [\alpha, \beta]$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \gamma$.

Γ: το $[\alpha, \beta]$ είναι το σύνολο τιμών της f.

Δ: αν $\gamma \in (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$, η εξίσωση $f(x) = \gamma$ είναι αδύνατη.

15.18 Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f\colon A \to \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g\colon B \to \mathbb{R}$$

Αν $\Gamma = A \cap B \neq \varnothing$, τότε η συνάρτηση:

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{g}$$

έχει πεδίο ορισμού το σύνολο:

Α: Γ.

Β: $\{x \in \Gamma \mid f(x) - g(x) \neq 0\}$.

Γ: $\{x \in \Gamma \mid f(x)g(x) \neq 0\}$.

Δ: $\{x \in \Gamma \mid f(x) + g(x) \neq 0\}$.

15.19 Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f\colon A \to \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g\colon B \to \mathbb{R}$$

με $f(A) \subseteq B$. Η σύνθεση της f με την g έχει πεδίο ορισμού:

Α: το πεδίο ορισμού της g.

Β: το $f(A)$.

Γ: το $g(B)$.

Δ: το πεδίο ορισμού της f.

15.20 Έστω η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Τότε η συνάρτηση $f \circ f$:

Α: ορίζεται πάντα και έχει πεδίο ορισμού το Α.

Β: ορίζεται πάντα και έχει πεδίο ορισμού το $f(A)$.

Γ: ορίζεται εφόσον υπάρχουν τιμές του $x \in A$ για τις οποίες ισχύει $f(x) \in A$.

Δ: ορίζεται εφόσον υπάρχουν τιμές του $x \in A$ για τις οποίες ισχύει $f(x) \in f(A)$.

15.21 Αν μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι «1 - 1», τότε:

Α: κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ τέμνει τη C_f ακριβώς σε ένα σημείο.

Β: κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ τέμνει τη C_f το πολύ σε ένα σημείο.

Γ: κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ τέμνει τη C_f τουλάχιστον σε δύο σημεία.

Δ: κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ τέμνει τη C_f ακριβώς σε δύο σημεία.

15.22 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη. Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν κοινά σημεία, τότε τα σημεία αυτά βρίσκονται:

Α: στην ευθεία $y = x$.

Β: στην ευθεία $y = -x$.

Γ: στην ευθεία $y = x$ εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ: στην ευθεία $y = -x$ εφόσον η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Γ. Αποδείξεις και αντιπαραδείγματα σε ερωτήσεις τύπου «Σωστό - Λάθος»

Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις επόμενες προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ). Να αποδείξετε όσες θεωρείτε ότι είναι σωστές και να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα σε όσες θεωρείτε ότι είναι λανθασμένες.

15.23 Δίνεται η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Δεν υπάρχουν δύο σημεία της C_f με την ίδια τετμημένη και διαφορετική τεταγμένη.

15.24 Αν για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(x)g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

15.25 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την f άρτια και την g περιττή.

α) Η συνάρτηση fg είναι περιττή.

β) Η συνάρτηση $f \circ g$ είναι άρτια.

15.26 Αν η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι «1 - 1», τότε και η συνάρτηση $f^{-1}: f(A) \to A$ είναι «1 - 1».

15.27 Δίνεται η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) \neq f(x_2)$ ισχύει $x_1 \neq x_2$, τότε η f είναι «1 - 1».

15.28 Κάθε γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

15.29 Κάθε συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[f(\alpha), f(\beta)]$.

15.30 Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (-\infty, 0)$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

15.31 Έστω συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και B ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν για κάθε $y \in B$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x) = y$, τότε $f(\mathbb{R}) = B$.

15.32 Έστω οι συναρτήσεις $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την f γνησίως αύξουσα και την g γνησίως φθίνουσα.

α) Η συνάρτηση $f - g$ είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) > 0$ και $f(x) > 0$, τότε η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα.

15.33 Για όλες τις συναρτήσεις $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $f \circ g = g \circ f$.

15.34 Έστω τρεις συναρτήσεις f, g και h. Αν ορίζεται η συνάρτηση $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η συνάρτηση $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

15.35 Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι «1 - 1».

15.36 Αν μια συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ είναι «1 - 1», τότε για κάθε στοιχείο $y \in f(A)$ η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

15.37 Μια συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ είναι «1 - 1», αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

15.38 Αν η συνάρτηση $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, τότε η συνάρτηση $f^{-1}\colon f(D_f) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

15.39 Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα σύνολο A και είναι «1 - 1», είναι γνησίως μονότονη στο A.

15.40 Αν μια συνάρτηση $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι «1 - 1».

15.41 Αν η συνάρτηση $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ είναι «1 - 1», τότε στο σύνολο $D_f \cap f(D_f)$ οι εξισώσεις:

$$f(x) = x \quad \text{και} \quad f^{-1}(x) = x$$

είναι ισοδύναμες.

15.42 Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f\colon D_f \to \mathbb{R}$. Στο σύνολο $D_f \cap f(D_f)$ οι εξισώσεις:

$$f^{-1}(x) = f(x) \quad \text{και} \quad f(x) = x$$

είναι ισοδύναμες.

15.43 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon A \to B$ με $A, B \neq \varnothing$. Αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

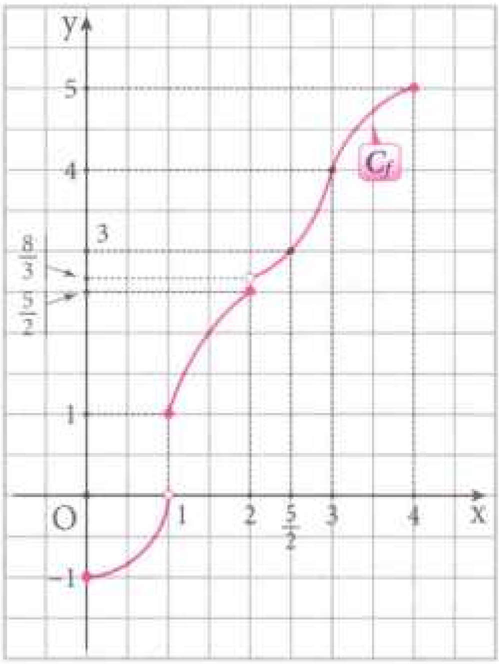
$$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2$$

τότε η f είναι αύξουσα.

Ασκήσεις για λύση

Α ομάδα

15.44 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

β) Να δικαιολογήσετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε τις τιμές:

$$f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) \quad \text{και} \quad f\left(f^{-1}(4)\right)$$

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}.

δ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ f$ και να υπολογίσετε την τιμή $f\left(f(2)\right)$.

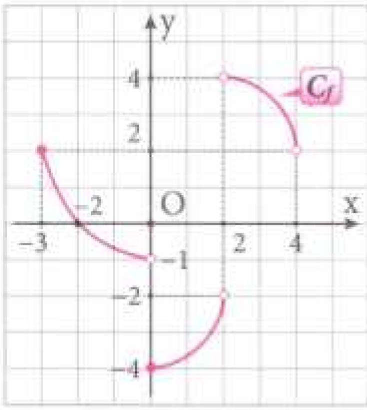
ε) Να λύσετε:

i) την εξίσωση $f(x^2 - 1) = 6$,

ii) την ανίσωση $f(2x) > 1$.

15.45 Στο επόμενο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.



β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να βρείτε την τιμή $f\left(f(-2)\right)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

ε) Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$f(x) \geq 0 \quad \text{και} \quad f(x) < 0$$

15.46 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ για κάθε $x > 0$,

ii) η f δεν είναι «1 - 1»,

iii) η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή στη θέση $x_0 = 1$.

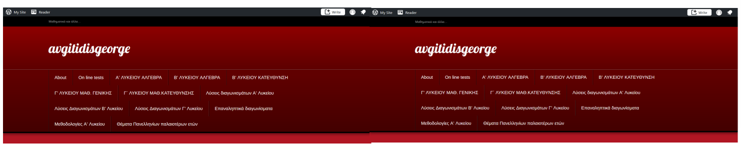
β) Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων g και h, οι οποίες έχουν γραφικές παραστάσεις συμμετρικές της C_f ως προς τις ευθείες $y = 1$ και $x = 1$ αντίστοιχα.

15.47 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f$.



γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} και να αποδείξετε ότι $f^{-1} = f$.

15.48 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{1-x} - 1 \quad \text{με } x \leq 1 \quad \text{και}$$

$$g(x) = x^2 \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

α) Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

i) $f+g$, $f-g$, fg και $\dfrac{f}{g}$,

ii) $f \circ g$ και $g \circ f$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f^{-1}(x+1) \leq x+1$$

15.49 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{3x+2}{|x|+1}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$-3 < f(x) < 3$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

δ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

15.50 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{6x+\lambda}{x^2+5}, \quad \text{όπου } \lambda \in \mathbb{R}$$

Αν η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή το 1, τότε:

α) να βρείτε την τιμή του λ,

β) να αποδείξετε ότι:

i) η f δεν είναι «1 - 1»,

ii) η τιμή $f\left(-\dfrac{5}{3}\right)$ είναι η ελάχιστη τιμή της f.

15.51 Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\alpha(x-2)}, & \text{αν } x \neq 2 \\[2ex] \dfrac{\alpha}{2}, & \text{αν } x = 2 \end{cases}$$

όπου $\alpha > 0$. Αν η f είναι αντιστρέψιμη, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$,

β) να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1},

γ) να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f$.

15.52 Δίνεται η συνάρτηση $f: \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x + \text{ημ}x + \text{συν}x$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

15.53 Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: [\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

α) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του α για την οποία η f είναι γνησίως μονότονη.

β) Έστω $\alpha = 2$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

ii) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

iii) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

iv) Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με $g(x) = f(\kappa x + \lambda)$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.

15.54 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{x+|x|}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

δ) Να αποδείξετε ότι $f^{-1} = f$.

15.55 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = 1 - x \quad \text{και} \quad g(x) = -x - \sqrt{x}$$

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = g \circ f$.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h \circ h$.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και να ορίσετε τη συνάρτηση h^{-1}.

15.56 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x+2, & \text{αν } x<0\\ 2-2x, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Αν $\alpha<0$, να ορίσετε τις συναρτήσεις:

i) $\frac{1}{f}$ **ii)** $f\circ f$ **iii)** f^{-1}

15.57 Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x)=\alpha x+\beta \quad \text{με } \alpha, \beta\neq 0$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Αν $f=f^{-1}$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=x \text{ με } x\in\mathbb{R} \quad \text{ή}$$

$$f(x)=\beta-x \text{ με } x\in\mathbb{R}$$

ii) να βρείτε τον τύπο της $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(1)=-2$, η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$(g\circ f)(x)=x^2-2$$

iii) να εξετάσετε αν η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη.

15.58 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=2^x+x-4$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι «1 - 1».

β) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $f^{-1}(x)=x$ **ii)** $f\big(f(x)\big)=f(2^x)$

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f^{-1}(x-2)<3$$

15.59 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\ln x+x-1 \quad \text{με } x>0 \quad \text{και}$$

$$g(x)=e^{-x} \quad \text{με } x\in\mathbb{R}$$

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$e^{-1-x^2}+1>e^{-2}+x^2$$

15.60 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\sqrt{x+1}-1 \quad \text{και} \quad g(x)=2-x$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

δ) Να ορίσετε τη συνάρτηση:

$$f\circ f\circ g$$

15.61 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{αν } x>0\\ x^2, & \text{αν } x\leq 0\end{cases} \quad \text{και}$$

$$g(x)=\begin{cases}x^3, & \text{αν } x>0\\ x, & \text{αν } x\leq 0\end{cases}$$

α) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις f και g.

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$g(x^3)\leq g(x)$$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση fg είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση $(fg)^{-1}$.

15.62 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{\alpha x-1}{x+1} \quad \text{με } x\neq -1 \text{ και } \alpha>0$$

Αν η C_f και η ευθεία $y=x$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\alpha=3$,

β) να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ f$,

γ) να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1},

δ) να βρείτε το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

15.63 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=\frac{1}{x} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{1}{x+2}$$

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση h η οποία για κάθε $x > 0$ έχει την ιδιότητα:

$$(f \circ h)(x) = g(x)$$

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση h^{-1}.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $h^{-1}(x^2) < 2$.

15.64 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{αν } x \leq 1 \\ x^2 + 4x - 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

α) Να μελετήσεστε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

15.65 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^3 + 2x - 2$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f^{-1}(e^{2x} - 2e^x + 1) < 1$$

15.66 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\ln^2 x - 1}{\ln x + 1}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$g(e^x) = x - 1$$

i) Να εξετάσετε αν ισχύει $f = g$.

ii) Να ορίσετε τη συνάρτηση g^{-1}.

15.67 Έστω οι συναρτήσεις $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Επιπλέον δίνεται ότι η συνάρτηση $g \circ f$ είναι «1 - 1».

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι «1 - 1».

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(2x^2 + 1) = f(x^2 + 3x - 1)$$

γ) Αν $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, να λύσετε την ανίσωση:

$$f^{-1}(x^2 - 1) < f^{-1}(x + 1)$$

15.68 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$|f(x)| < 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $y_0 \in (-1, 1)$ η εξίσωση $f(x) = y_0$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

ε) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + \ln(x + 1) + e^x - 1 = 0$$

15.69 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x) = e^x + 1$ με $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = 1 - \ln x$ με $x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως μονότονες.

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ και το διάστημα στο οποίο η C_g είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f - g$ με την ευθεία $y = e$.

δ) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $f^{-1} \circ g$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln \frac{x^8 - x}{1 - x} < 0$$

15.70 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \ln(x^2 - x) \quad \text{και} \quad g(x) = \ln(x - 1)$$

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f - g$.

β) Να εξετάσετε αν το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης h.

γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση h^{-1}.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$h^{-1}(x - 1) + h^{-1}(x) = h^{-1}(1) + eh(e)$$

15.71 Δίνεται η συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x > 0$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 3\ln x$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$ με $x > 0$.

β) Έστω η συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \quad \text{με } x \neq 0$$

i) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = g \circ f$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση h^{-1}.

iii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\frac{1}{h^{-1}}$.

15.72 Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με:

$$f(x) = e^x + x - 1 \quad \text{και} \quad g(x) = \ln x$$

α) Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

$$h = f \circ g \quad \text{και} \quad \varphi = g \circ f$$

β) Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $h(x) > 0$ **ii)** $\varphi(x) < 1$

γ) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $ex + \ln x = 0$

ii) $\ln \frac{x+3}{x^2+1} = x^2 - x - 2$

15.73 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = -2x^3 - 3x + 1$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 2$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f^{-1}(x) \geq x - 1$$

15.74 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

β) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(f(x)) > \frac{\sqrt{e}}{1 + \sqrt{e}}$$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x$ με $x > 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

15.75 Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 2x + 9 \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

και:

$$g(x) = \sqrt{x - 8} \quad \text{με } x \geq 8$$

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = g \circ f$.

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$F(x + 2) = f(x)$$

γ) Να βρείτε τον τύπο της $\varphi: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \geq 0$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$g(\varphi(x)) = x$$

δ) Να αποδείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη και ότι $g^{-1} = \varphi$.

15.76 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x}{x - x^2}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f \circ f$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ότι $f^{-1} = f \circ f$.

δ) Να βρείτε το σημείο $M(x, f(x))$, με $x > 1$, της C_f το οποίο απέχει από το σημείο $A(1, 0)$ την ελάχιστη απόσταση.

15.77 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x + \ln x$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

γ) Αν $0 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\ln \frac{\alpha}{\beta} < \beta - \alpha$$

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln(x + \ln x) + \ln x > 1 - x$$

15.78 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(f(x)) = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Θεωρούμε την «1 - 1» συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$g(x) = e^x + e^{f(x)}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι «1 - 1»,

ii) $g(f(x)) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

15.79 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x) = \frac{3e^x}{1 + 2f^2(x)}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln f(x) > f(0) + \ln\frac{1}{e}$$

15.80 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{f(f(x))} = 2$$

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

15.81 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \sqrt{x} + e^{\sqrt{x}} - 1 \quad \text{και} \quad g(x) = 1 - e^{\sqrt{x}}$$

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι «1 - 1».

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση g^{-1}.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h = f \circ g^{-1}$.

i) Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία.

ii) Να υπολογίσετε την τιμή $h^{-1}(e)$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $h^{-1}(1 - x) = x$.

15.82 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$(f \circ f)(x) = 4x - 3 \quad \text{και}$$

$$(f \circ g)(x) = x + 1 - e^{x-1}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι αντιστρέψιμη,

ii) $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}\left(f(x) + 3\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $f(x) = x$ **ii)** $f(x) = g(x)$

15.83 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη και η C_f διέρχεται από τα σημεία $M(-1, 2)$ και $N(2, -1)$. Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι γνησίως φθίνουσα,

β) η συνάρτηση $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα,

γ) η f είναι αντιστρέψιμη και να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(f^{-1}(x^3) - 3\right) > 2$$

δ) αν η f είναι περιττή, τότε ισχύει:

$$\frac{f(x)}{e^x - 1} < 0 \quad \text{για κάθε } x \neq 0$$

15.84 Δίνεται η συνάρτηση $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = 1 - \sqrt{x - 1}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^3 + f^3(x) = f^{-1}(x) + x$$

γ) Να βρείτε τον τύπο της $g: (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \geq 1$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$g(f(x)) = \sqrt{2x - 2}$$

15.85 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \ln\frac{2x}{x^2 + 1}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή στη θέση $x_0 = 1$,

β) για κάθε $x > 0$ η C_f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{1}{x}, f(x)\right)$,

γ) για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$e^x + x > \frac{2x}{x^2 + 1} + f(x)$$

15.86 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \ln(1 + e^x) \quad \text{και}$$

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

β) Να αποδείξετε ότι η g είναι περιττή.

γ) **i)** Να βρείτε τον τύπο της h: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$h \circ f = g$$

ii) Αν $x > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$h(e^x) + h(e^{2x}) < h(e^{3x}) + h(e^{4x})$$

15.87 Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = e^{x-1} + x - 2$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε την τιμή $f^{-1}(0)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f^{-1}(e^{x^2} + x^2 - 1) - x\right) = 0$$

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f^{-1}\left(e^2 + 1 - f(\ln x + 2)\right) > 1$$

15.88 Δίνεται η συνάρτηση f: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{1}{x^2 + 5} - \dfrac{1}{2x^2 + 1} < \ln\dfrac{x^2 + 5}{2x^2 + 1}$

ii) $f^{-1}\left(\dfrac{1}{x + 1}\right) > x + 1$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{x+1}$ με $x \in \mathbb{R}$.

i) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση:

$$(f \circ g)(x) = \frac{1 - e}{e}$$

15.89 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την f γνησίως φθίνουσα, $f(2) = 1$ και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Επίσης η g έχει μοναδική θέση ελαχίστου τη $x = 1$ με $g(1) = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η $f \circ g$ έχει μέγιστη τιμή το 1.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τιμές της f οι οποίες είναι μεγαλύτερες από 1.

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\left(f^{-1}(x) - 2\right)\left(2 - g(x)\right) \le 0$$

Β ομάδα

15.90 Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$(f \circ f)(x) = x + 4$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι «1 - 1», **β)** $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,

γ) $f^{-1}(x) = f(x) - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

δ) η C_f δε διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

15.91 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) + 1 = g(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η g είναι γνησίως αύξουσα:

α) να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι γνησίως αύξουσα,

ii) $g(f^{-1}(x)) = x^3 + x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

β) και αν επιπλέον η f είναι περιττή, τότε:

i) να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι περιττή,

ii) αν $x > -2$, να αποδείξετε ότι:

$$f^{-1}(x + 2) + f^{-1}(x + 4) + f(x + 3) > 0$$

15.92 Έστω συνάρτηση f: $(0, +\infty) \to (0, +\infty)$ η οποία για κάθε $x > 0$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^2(x) + \ln f(x) = 1 + \ln x$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{f(x)}{x} = f(1)$$

15.93 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + 2f(x) - 4x = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Να υπολογίσετε τις τιμές:

$$f(0) \quad \text{και} \quad f\left(\frac{3}{4}\right)$$

δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

15.94 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη και η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(5, 9)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $f\left(2 + f^{-1}(x^2 + x)\right) = 9$

ii) $f(e^{3-x} - 1) - f\left(\ln(x-2)\right) = 0$

γ) Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $f\left(f(x^2 - 4x) - 6\right) < 2$

ii) $f(2^{2-x}) > f\left(\ln(x+2) + 8\right)$

δ) Η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$(f \circ g)(x-1) \geq f(x) \geq f\left(g(x) - 1\right)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της g.

15.95 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$$f\left(f(x)\right) + f^3(x) = 2x + 3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και:

$$f\left(g(x) - x\right) = f(\ln x + 1) \quad \text{για κάθε } x > 0$$

α) Να βρείτε τον τύπο της g.

β) Να λύσετε την ανίσωση:

$$3 + \ln\frac{2x^2 + 4}{3x^2 + 2} > x^2$$

γ) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $g^{-1}\left(3g(|x| + 1) - 4\right) = 1$

ii) $g(x) + g(x^2) = g(x^5) + g(x^{10})$

15.96 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + 3f(x) - 3 = e^x$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε την τιμή $f^{-1}(1)$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\left(f\left(f(x) - 1\right) - 1\right) > 1$$

15.97 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^5 + x^3 + x - 2$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f(\ln x)\right) = 1$$

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f^{-1}\left(f(x^2 - x) - 39\right) < 1$$

ε) Έστω A, B δύο διαφορετικά σημεία της C_f και Γ, Δ τα συμμετρικά σημεία των A, B αντίστοιχα ως προς την ευθεία $y = x$. Αν λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών AB και ΓΔ, να αποδείξετε ότι:

$$\lambda_1\lambda_2 = 1$$

15.98 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}(x^2) + f^{-1}(x^6) = f^{-1}(x^4) + f^{-1}(x^8)$$

15.99 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (-1, +\infty)$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + f(x) = e^x - 2$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο.

β) Να αποδείξετε ότι $f(\mathbb{R}) = (-1, +\infty)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f^3(f(x)) + f(f(x)) + 1 > 0$$

15.100 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^{-1}(x) = e^{x+1} + x$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
γ) Αν $x \neq e$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{f(x)}{x-e} > 0$$

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f^2(x) \leq 2 - f(x)$$

ε) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης:

$$g(x) = f^2(x) + 2f(x) + 2 \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

15.101 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x, y > 0$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$xy\ln(xy) \leq yf(x) + xf(y) \leq f(xy)$$

Να αποδείξετε ότι:
α) $f(1) = 0$,
β) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}f(x)$ για κάθε $x > 0$,
γ) $f(x) = x\ln x$ για κάθε $x > 0$.

15.102 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x) + \ln f(x) = x$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(1) = 1$.
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.
δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(f(e^x + x^3)) + \ln f(f(e^x + x^3)) < 1$$

15.103 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{f(x)} + f(x) = x + 2$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.
γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(\ln x) < f\left(\frac{e}{x}\right)$$

15.104 Οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι «1 - 1» και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) = 8 + (f \circ g^{-1})(x) \quad \text{και}$$

$$3(f \circ g)(x) + 2(f \circ g^{-1})(x) = 10x - 7$$

α) Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων f και g.
β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$h\Big(g(f(x))\Big) = e^{-2x} - 4x - 2$$

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{e}{e^{x^2}} - \frac{e}{e^{3x}} > 2x^2 - 6x$$

15.105 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x, y > 0$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

Επίσης για κάποιο $\alpha > 0$ ισχύει:

$$f(\alpha) \neq 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:
 i) $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$,
 ii) $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}$ για κάθε $x, y > 0$.

β) Αν η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει ακριβώς μία λύση, τότε:
 i) να αποδείξετε ότι η f είναι «1 - 1»,
 ii) να αποδείξετε ότι $f^{-1}(xy) = f^{-1}(x)f^{-1}(y)$ για κάθε $x, y \in f\big((0, +\infty)\big)$,
 iii) να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = \sqrt{f\left(\frac{x}{2} + 1\right)f(2)}$$

15.106 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(f(x)) - x = e^x(1 - e^{f(x)-x})$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι «1 - 1».
β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(e^{x^2-x} + x^2) = f(e^{2x} + 3x)$$

γ) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να βρείτε τον τύπο της.

15.107 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιττή και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

και:

$$f(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$,

ii) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

β) Αν η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει ακριβώς μία λύση, τότε:

i) να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη,

ii) να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f\left(f(x) - \frac{1}{f(x)}\right) + 1\right) = 1$$

15.108 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ είναι «1 - 1» και για κάθε $x \neq 0$ ισχύει:

$$(f \circ f)(x)f(x) = 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν άπειρα κοινά σημεία από τα οποία μόνο δύο βρίσκονται στην ευθεία $y = x$.

15.109 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$x \leq f(f(x)) \leq f(x)$$

Επιπλέον θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) + e^x - 1 \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$g(x) = e^x + x - 1 \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

β) Να λύσετε την ανίσωση:

$$g(g(x) + 1) > g(1)$$

γ) Έστω $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση:

$$H(x) = e^{h(x)} + h(x)$$

είναι γνησίως αύξουσα με $H(0) = 1$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα,

ii) $h(0) = 0$,

iii) να λύσετε την εξίσωση:

$$(h \circ g)(x) = h(x + 3)$$

15.110 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$(f \circ f)(x) = x + f(x) \quad \text{και}$$

$$f(g(x) - e^x - x + 1) = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι «1 - 1».

β) Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$.

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g.

δ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = \ln g(x)$.

ε) Να αποδείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη και να λύσετε την ανίσωση:

$$g^{-1}(e^{x^2+1} + x^2) < 2$$

15.111 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(f \circ f)(x) = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι «1 - 1», **β)** $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,

γ) $f^{-1} = f$,

δ) αν η συνάρτηση $g(x) = f(x) + x$ με $x \in \mathbb{R}$ είναι «1 - 1», τότε:

$$f(x) = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

15.112 Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to (1, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)\ln f(x) = x \quad \text{για κάθε } x > 0$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln f(e-1) f(f^{-1}(x) - 1) > f(e) - 1$$

15.113 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με την f γνησίως φθίνουσα, οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν τη σχέση:

$$f\big(f(x)\big) = 2g(x) - x$$

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις g και $h = f - g$.

β) Αν για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x_0) = x_0$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο,

ii) να λύσετε την εξίσωση:

$$f\big(f(x + x_0 - 2)\big) + x + x_0 =$$
$$= 2f(x + x_0 - 2) + 2$$

iii) να λύσετε την ανίσωση:

$$f\big(f(\ln x + x_0 + 1)\big) + \ln x + 1 < x_0$$

15.114 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την f γνησίως μονότονη και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Αν οι C_f, C_g είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = \alpha$, να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη,

β) οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο,

γ) $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

15.115 Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) + e^{f(x)} = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$g(x) = f(2 - 3x) - f(3 + 2x)$$

i) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\big(g(x^3 - x^2)\big) > f\big(g(4x - x^2)\big)$$

15.116 Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f\big(f(x) - 1\big) = x$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι αντιστρέψιμη,

β) $f^{-1}(x) = f(x) - 1$ με $x \in \mathbb{R}$,

γ) $f(x - 1) = f(x) - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

δ) η συνάρτηση:

$$g(x) = f(x + 1) - f(x - 1) \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

είναι σταθερή.

15.117 Η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη και για κάθε x, $y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f\big(f(x) + y\big) = x + f(y)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι $f = f^{-1}$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\big(f(x) + e^x\big) = x + f(e - \ln x)$$

δ) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

15.118 Έστω $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\lambda x}{x - 2} \quad \text{με } x \neq 2$$

η οποία για κάθε $x \neq 2$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$(f \circ f)(x) = x$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ισχύει $f^{-1} = f$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\big(f(x + 1)\big) + f(x + 1) = x + \frac{2e^{-x}}{e^{-x} - 2} + 1$$

δ) Η συνάρτηση g: $\mathbb{R} \to (2, +\infty)$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f\big(g(x)\big) + \frac{1}{g(x) - 2} = e^x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) η g είναι αντιστρέψιμη,

ii) $g^{-1}(x) = \ln\dfrac{2x + 1}{x - 2}$ με $x > 2$.

15.119 Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = -x$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι περιττή,

β) η f είναι αντιστρέψιμη,

γ) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,

δ) $f^{-1}(x) + f(f(x)) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

15.120 Έστω συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ με $f(0) = 0$ για την οποία ισχύουν:

$$f(x) > 0 \quad \text{για κάθε } x > 0 \quad \text{και}$$

$$f(f(x)) = x^2 \quad \text{για κάθε } x \geq 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι αντιστρέψιμη,

ii) $f^{-1}(x) = \sqrt{f(x)}$ με $x \geq 0$,

iii) $f(x^2) = f^2(x)$ για κάθε $x \geq 0$.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}\Big(f^2(|x|+1) + f\big((|x|+1)^2\big) - 1\Big) = 1$$

γ) Αν η f είναι γνησίως μονότονη, να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι γνησίως αύξουσα,

ii) αν $x \geq 1$, τότε:

$$f^{-1}(x) \leq x \leq f(x) \leq x^2$$

15.121 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^7 + x^5 + x^3 + x$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = f(1) + f^{-1}(4) + f(-1) + f^{-1}(-4) + f^{-1}(0)$$

γ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f\big(f^{-1}(x^2 - 4x) + 2\big) \leq 4$$

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\big((x-1)^2\big) + f\big((1-x)^3\big) +$$
$$+ f\big((x-1)^4\big) + f\big((1-x)^5\big) = 0$$

15.122 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(2) = 10$ και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ είναι περιττή και γνησίως μονότονη. Θεωρούμε συνάρτηση g για την οποία ισχύει:

$$g(x) = f\big(-f(x)\big) - (f \circ f \circ f)(x) \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

β) Να αποδείξετε ότι η g είναι «1 - 1».

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$f(-x) = (g \circ f^{-1})(x) + (f \circ f)(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(-x) = (f \circ f)(x)$$

15.123 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$(f \circ f)(x) = e^{-x}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$,

ii) η f είναι αντιστρέψιμη,

iii) $f^{-1}(x) = -\ln f(x)$ για κάθε $x > 0$,

iv) $f(e^{-x}) = e^{-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\Big(f\big(f(x)\big)\Big)^2 + f^{-1}\big(e^{-f(x)}\big) = 6$$

15.124 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f\big(x + f(x+y)\big) = f(2x) + y \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0) = 0$,

β) $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

γ) η f είναι αντιστρέψιμη,

δ) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,

ε) $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

15.125 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1) = f(0) = 1$,

β) η f δεν είναι αντιστρέψιμη,

γ) η f δεν είναι γνησίως μονότονη,

δ) $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

15.126 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$$

Να αποδείξετε ότι:

α) οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι «1 - 1»,

β) $|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leq |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

γ) η συνάρτηση $F(x) = 2x + f^{-1}(x)$ είναι γνησίως μονότονη.

15.127 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$e^{f(x)} + f(x) + x = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι γνησίως φθίνουσα,

ii) η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(\ln x - e^x - 1) = x$$

γ) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{e^\beta - e^\alpha}{\alpha - \beta} < 1$$

15.128 Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x, y > 0$ ισχύει:

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση, τότε:

α) να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη,

β) να αποδείξετε ότι:

$$f^{-1}(x - y) = \frac{f^{-1}(x)}{f^{-1}(y)} \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

γ) να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + f(x^2 + 1) = f(x^2 + 6) + f(x - 1)$$

δ) αν για κάθε $x > 1$ ισχύει $f(x) > 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

15.129 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x + f(y)) = f(x) + y + 1 \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι αντιστρέψιμη,

β) $f(-1) = 0$,

γ) η f δεν είναι περιττή,

δ) $f(2x) = f(x) + f^{-1}(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

15.130 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(1) + f(e) = 2e + 3$$

η οποία για κάθε $x, y > 0$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x) - f(y) = \ln\frac{x}{y} + 2(x - y)$$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(e)$.

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln\frac{x^2 + 10}{3x^2 + 8} > 4(x^2 - 1)$$

15.131 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(1 - f(x)) = -x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι «1 - 1»,

ii) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,

iii) $f(x + 1) = f(x) - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(g(x) - x) = f(\ln x + 1) \quad \text{για κάθε } x > 0$$

i) Να βρείτε τον τύπο της g.

ii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^2 - 4 < \ln\frac{x^2 + 7}{2x^2 + 3}$$

15.132 Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και για κάθε $x, y > 0$ ισχύει:

$$f(yf(x)) = x^2 f(xy)$$

Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2$ για κάθε $x > 0$.

15.133 Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ η οποία για κάθε $x, y > 0$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$x^2(f(x) + f(y)) = (x + y)f(yf(x))$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

Κριτήριο αξιολόγησης

Θέμα 1

Α. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

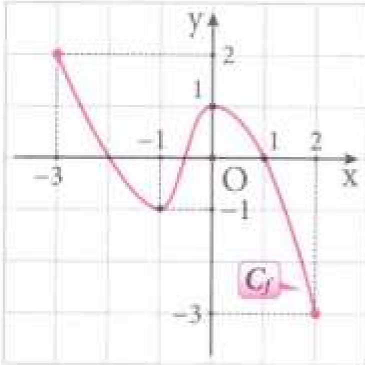
α) Να γράψετε στο τετράδιό σας:

i) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

ii) τα διαστήματα μονοτονίας της f και τα ακρότατα της f.

β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$-f \quad \text{και} \quad |f|$$



Β. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 2} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x - 1}{x^2 - x - 6}$$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f + g$, fg και $\frac{f}{g}$.

Γ. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ). Να αποδείξετε όσες θεωρείτε ότι είναι σωστές και να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα σε όσες θεωρείτε ότι είναι λανθασμένες.

α) Δίνεται η συνάρτηση $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(e^{x-1})$ είναι το διάστημα $(-\infty, 1]$.

β) Αν για δύο συναρτήσεις $f\colon A \to \mathbb{R}$ και $g\colon B \to \mathbb{R}$ ορίζεται η συνάρτηση $f + g$, τότε ορίζεται και η συνάρτηση $f \circ g$.

γ) Κάθε συνάρτηση $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ έχει ολικά ακρότατα.

δ) Κάθε περιττή συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι «1 - 1».

ε) Έστω η αντιστρέψιμη συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$. Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν μόνο ένα κοινό σημείο Μ, τότε το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία $y = x$.

Θέμα 2

Α. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x < -1 \text{ ή } x > 1 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι $f \circ f = f$.

Β. Η συνάρτηση $g\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και η C_g διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \ln x - g(x) \quad \text{με } x > 0$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την ανίσωση:

$$2\ln x < 2 + g(x^2)$$

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2} \quad \text{με } x \neq -2$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι «1 - 1».

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f^{-1} \circ f^{-1}$ και να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση δεν τέμνει τη γραφική παράσταση της f.

δ) Η συνάρτηση $g\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Αν η C_g διέρχεται από τα σημεία $A(2, f^{-1}(4))$ και $B(f(1), f^{-1}(-1))$, να λύσετε την ανίσωση:

$$g^{-1}\big(g(x+1) - g(3x) - 3\big) > 2$$

Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{f(x)-x} = \frac{1}{f^2(x) - 4f(x) + 6}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι αντιστρέψιμη και ισχύει:

$$f^{-1}(x) = x + \ln(x^2 - 4x + 6) \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

β) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^{-1}(x) \geq x + \ln 2 > x - \ln 2 \geq f(x)$$

γ) αν $M(x, f(x))$ και $N(f(x), x)$ είναι σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα, τότε η ελάχιστη τιμή του μήκους MN είναι $\sqrt{2} \cdot \ln 2$.