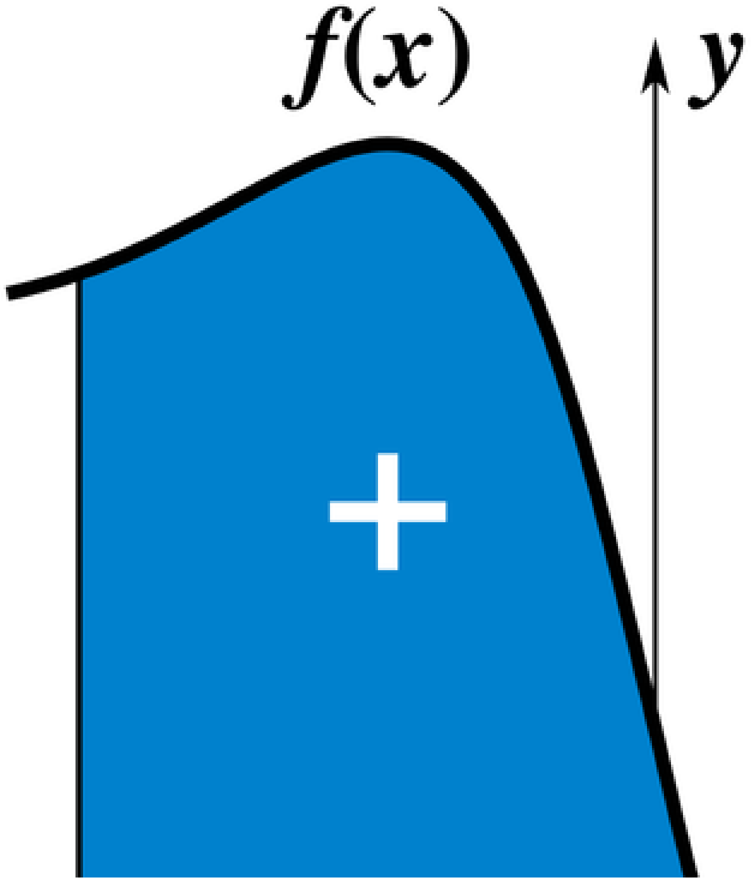
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ & ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Ε Ι Σ Α Γ Ω Γ Η

- ***Πεδίο Ορισμού – Ισότητα – Πράξεις συναρτήσεων***
- ***Σύνθεση συναρτήσεων***
  1. Εύρεση σύνθετης
  2. Εύρεση της "έξω"
  3. Εύρεση της "μέσα"
- ***Ένα προς ένα***
- ***Αντίστροφη***
- ***Συναρτησιακές σχέσεις*** $\left[f(x) + f(-x) = -x^2 + 1 \right]$

Ο Ρ Ι Ο

- ***Ρητό*** Παραγοντοποίηση
  1. κοινός παράγοντας
  2. ομαδοποίηση
  3. ταυτότητες
  4. τριώνυμο
  5. Horner
- ***Άρρητο***
  1. συζυγής παράσταση
  2. «θέτω»
  3. διάσπαση
- ***Τριγωνομετρικό***
  1. Αν περιέχει ημ΄΄0΄΄ , τότε το διαιρώ και το πολ/ζω με το ΄΄0΄΄ για να "πάρω": $\frac{\eta\mu 0}{0}$
  2. Αν περιέχει (συν΄΄0΄΄-1) τότε το πολ/ζω και το διαιρώ με τη συζυγή του παράσταση και εξασφαλίζω ημ΄΄0΄΄ ή το πολλαπλασιάζω και το διαιρώ με το ΄΄0΄΄
  3. Αν δεν περιέχει ημ΄΄0΄΄ ή συν΄΄0΄΄ τότε κάνω αλλαγή μεταβλητής. Δηλ. αν $\chi \to \pi \Rightarrow \chi - \pi \to 0$ πχ $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\eta\mu\chi}{\chi - \pi}$
  4. Χρησιμοποιώ τη μέθοδο της παρεμβολής (όταν έχω 0·ημ($\pm\infty$) ή $0 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pm\infty)$)
- ***Απόλυτης τιμής***
  1. αν δεν έχω απροσδιοριστία υπολογίζεται άμεσα

2. αν έχω απροσδιοριστία χωρίς μηδενισμό απολύτου «φεύγουν» τα απόλυτα
3. αν έχω απροσδιοριστία με μηδενισμό απολύτου τότε παίρνω πλευρικά όρια

- ***Παρεμβολής***

- ***Εκθετικό***

1. όταν $\chi \to +\infty$ βγάζω κοινό παράγοντα την εκθετική με τη μεγαλύτερη βάση
2. όταν $\chi \to -\infty$ βγάζω κοινό παράγοντα την εκθετική με τη μικρότερη βάση
3. Αν δεν «βγαίνει» με τους παραπάνω τρόπους τότε κάνω αντικατάσταση.

- ***Υπολογισμός ορίου συνάρτησης που περιέχεται σε γνωστό όριο***
- ***Υπολογισμός ορίου από γνωστό όριο***

Θέτω Κ(χ) την συνάρτηση της οποίας γνωρίζουμε το όριο
και
κάνω αλλαγή ορίου «μέσα» ή «κάτω»

- ***Παραμετρικό όριο***

Παίρνω δυο εξισώσεις για τις παραμέτρους μια από την ύπαρξη του ορίου και μια από την τιμή του ορίου.

- ***Πλευρικά όρια***

Όταν έχουμε:

1. απόλυτο που μηδενίζεται και απροσδιοριστία
2. κλαδική συνάρτηση (πολλαπλού τύπου)
3. $\frac{\alpha}{0}$ (α#0) και δεν γνωρίζω το πρόσημο του παρονομαστή

<u>Σ Υ Ν Ε Χ Ε Ι Α</u>

- ***Μελέτη***
- ***Θεώρημα Bolzano (απόδειξη ύπαρξης τουλάχιστον μιας ρίζας)***
- ***Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (σπάνια)***
- ***Θεώρημα μεγίστου ελαχίστου (σπάνια)***
- ***Σύνολο τιμών – πρόσημο συνάρτησης***

Π Α Ρ Α Γ Ω Γ Ο Σ

- ***Υπολογισμός*** Με ορισμό στις κλαδικές και στις θεωρητικές . S.O.S. στις μορφής $\sqrt{\chi^2}$, χ^{χ}
- ***Γεωμετρική ερμηνεία***
- ***Φυσική ερμηνεία*** $\dfrac{df}{dx}$, ρυθμός μεταβολής
- ***Θεώρημα Rolle*** 1. ύπαρξη τουλάχιστον μίας ρίζας
  2. ύπαρξη το πολύ μίας ρίζας
- ***Θ.Μ.Τ.*** 1.Απόδειξη ανισοτήτων
  2.Απόδειξη ισοτήτων που περιέχουν δύο τουλάχιστον x_1 και x_2
- ***Ισότητα παραγώγων και εύρεση τύπου συνάρτησης***
  $\left(f'(x) = g'(x) \Rightarrow ...\right)$ *(Βλέπε στο τέλος περιπτώσεις)*
- ***Μονοτονία – Ακρότατα – Κυρτότητα***
- ***Θεώρημα Fermat***
- ***Μονοτονία***
  Ακρότατα
  Πλήθος ριζών
  Σύνολο τιμών
  Λύση εξισώσεων (αν έχει προφανείς ρίζες)
  Απόδειξη ανισοτήτων
  Πρόσημο συνάρτησης

Ακρότατα 1.άκρα κλειστού διαστήματος
2. σημεία μηδενισμού παραγώγου
3. σημεία μη ύπαρξης παραγώγου

Σημεία Καμπής 1. σημεία μηδενισμού δευτέρου παραγώγου
2. σημεία μη ύπαρξης δευτέρου παραγώγου

Κατακόρυφες ασύμπτωτες 1. σημεία ασυνέχειας
2. άκρα ανοιχτού διαστήματος

Τουλάχιστον μια ρίζα
1. Προφανής
2. Bolzano
3. Πολυώνυμο περιττού βαθμού
4. Rolle στην αρχική

Ακριβώς μία ρίζα

Το πολύ μια ρίζα
1. $1^{ου}$ βαθμού πολυώνυμο
2. Μονοτονία
3. Απαγωγή σε άτοπο με Rolle

Απόδειξη ανισοτήτων

1. Με πράξεις (παραγοντοποίηση) καταλήγουμε σε ανισότητα που ισχύει
2. Με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ.
3. Μαζεύω τους όρους σε ένα μέρος, θέτω το μέρος αυτό ίσο με μια συνάρτηση π.χ $(f(x), g(x)\kappa\tau\lambda$ και τον μελετώ ως προς τα ακρότατα
4. Σχηματίζω στο κάθε μέλος την ίδια συνάρτηση με διαφορετικό όρισμα και μελετώ την μονοτονία της.

<u>Ο Λ Ο Κ Λ Η Ρ Ω Μ Α Τ Α</u>

- ***Βασικά Ολοκληρώματα***
- ***Μέθοδοι αντικατάστασης – κατά παράγοντες***
- ***Τριγωνομετρικά***
  1. Αν ημχ περιττού βαθμού αντικαθιστώ το συνχ
  2. Αν ημχ, συνχ άρτιου βαθμού εφαρμόζω μέθοδο αποτετραγωνισμού
  3. S.O.S. στα $\int \varepsilon\phi\chi dx$, $\int \text{εφ}^2\chi dx$, $\int \text{εφ}^3\chi dx$ κ.λ.π
- ***Πηλίκου***
  1. αν ο βαθμ.αριθμ. ≥ βαθμ. παρονομ. τότε διαίρεση
  2. αν ο βαθμ. αριθμ. < βαθμ. παρονομ. τότε «μέθοδος» πηλίκου
- ***Άρρητα***
  1. αν έχω πρωτοβάθμιο υπόριζο, θέτω όλη τη ρίζα
- ***Ορισμένα***
  1. S.O.S. στην αντικατάσταση η οποία «φαίνεται»
  2. η αρχική της f(x) είναι $\int_0^x f(t)dt$
  3. $\left(\int_0^x f(t)dt\right)' = f(x)$
  4. εμβαδά

Χαρακτηριστικές περιπτώσεις ισότητας παραγώγων

1. $f'(x)=f(x)$ η $f'(x)=-f(x)$
2. $f'(x)+v\cdot f(x)=0$ ή $f'(x)-v\cdot f(x)=0$
3. $f'(x)+g'(x)\mathrm{f(x)}=0$ ή $f'(x)-g'(x)\mathrm{f(x)}=0$
4. $x\cdot f'(x)-v\cdot f(x)=0$ η $x\cdot f'(x)+v\cdot f(x)=0$
5. $kf'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ ή $kf'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)$
6. $f'(x)=\varepsilon\phi x\cdot f(x)$ η $f'(x)=-\varepsilon\phi x\cdot f(x)$ η $f'(x)=\sigma\phi x\cdot f(x)$ η $f'(x)=-\sigma\phi x\cdot f(x)$
7. $f^{v}(x)\cdot f'(x)=0$
8. $\left(f'(x)\right)^2+f(x)f''(x)=0$

Παραδείγματα

ΜΕ ΚΟΚΙΝΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ

Μιγαδικοί αριθμοί

Η έννοια του μιγαδικού - Πράξεις

- *Ισότητα μιγαδικών*

  Άσκηση: Να υπολογιστούν οι $x,y\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

  $(1-2i)^2x+(3+5i)y=3+7i$

- *Πράξεις με μιγαδικούς*

  Άσκηση : Να βρεθούν τα $x,y\in\mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

  a) $x(2+i)-3y(1+2i)+(3x+2y)i=i(x+21)-i(6y+i)$

  b) $\dfrac{x-1}{2-3i}+\dfrac{y-2}{3-2i}=\dfrac{10}{13(1-i)}$

- *Δυνάμεις μιγαδικών*

  Άσκηση : Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

  $A=(1+i)^4+(1-i)^4$

  $B=\left(1+i\sqrt{3}\right)^6+\left(1-i\sqrt{3}\right)^6$

- *Συζυγείς μιγαδικοί*

Άσκηση : Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί :
$z=\left(x^3+y^3\right)+\left(x^2+y^2\right)i$ και $w=2(x+y+10)-(xy+7)i$. Να βρεθούν οι $x,y\in\mathbb{R}$, ώστε $z=\overline{w}$.

- ***Κριτήρια*** $z\in\mathbb{R}$ η $z\in I$

Άσκηση : Αν $z,w\in\mathbb{C}^*$, να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί :

$a)z\overline{w}+w\overline{z}$ και $\dfrac{z}{\overline{w}}+\dfrac{\overline{z}}{w}$ είναι πραγματικοί.

- ***Εξισώσεις στο*** $\mathbb{C}$

Άσκηση : Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει

$\overline{z}=z^3$

- ***Γεωμετρικοί τόποι***

Άσκηση : Αν η εικόνα M του μιγαδικού αριθμού $z\neq 0$ κινείται στον κύκλο : $(c):x^2+y^2=1$ να αποδειχθεί ότι η εικόνα N του μιγαδικού $w=\dfrac{1}{\overline{z}}$ κινείται στον ίδιο κύκλο.

Μέτρο μιγαδικού , το μιγαδικό επίπεδο

- ***Εύρεση μέτρου- ιδιότητες***

Άσκηση : Να βρεθεί ο μιγαδικός $z\in\mathbb{C}^*$ για τον οποίον ισχύει : $\left|1+\dfrac{2}{z}\right|=1$ και $\dfrac{z}{\overline{z}}=i$

- ***Ταυτότητες με μέτρο***

Άσκηση : Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, να αποδειχθεί ότι :

$\left|\alpha\overline{\beta}-1\right|^2-\left|\alpha-\beta\right|^2=\left(\left|\alpha\right|^2-1\right)\left(\left|\beta\right|^2-1\right)$

- ***Ανισότητες με μέτρο***

Άσκηση : Αν είναι $|z-1+i|\leq 2$, να αποδειχθεί ότι $3\leq|z-4+5i|\leq 7$.

- $|z|=\theta>0$ και $|z|=|\overline{z}|$

Άσκηση : Αν $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ και $|z_1|=|z_2|=|z_3|=3$, να αποδειχθεί ότι :

Α) ο αριθμός $w=\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός

Β) $|z_1+z_2+z_3|=\dfrac{1}{3}|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$

- ***Κριτήρια :*** $z\in\mathbb{R}$ η $z\in I$

Άσκηση : Δίνονται οι μιγαδικοί $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}^*$, των οποίων οι εικόνες βρίσκονται στον κύκλο

$(c): x^2+y^2=1$. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $w=\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$ είναι φανταστικός.

- ***Εξισώσεις με μέτρα – συστήματα***

  Άσκηση : Να λυθεί στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση : $z^3=|z|, \quad z\in\mathbb{C}$.

- ***Η γεωμετρία των μιγαδικών***

  Άσκηση : Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί α,β,γ διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο.

  Α) Να αποδειχθεί ότι

  $i)|\alpha-\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2-\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}$

  $ii)|\alpha-\beta|^2+|\alpha-\gamma|^2=\frac{1}{2}|\beta-\gamma|^2+2\left|\alpha-\frac{\beta+\gamma}{2}\right|^2$

  Β) Να ερμηνευτεί γεωμετρικά η ταυτότητα του ερωτήματος ii).

- ***Γεωμετρικοί τόποι***

  Άσκηση : Έστω Μ,Ν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z και w αντίστοιχα, οι οποίοι συνδέονται με τη σχέση: $w=z+\frac{8}{z}, \quad z\neq 0$. Αν το Μ κινείται σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2, να αποδειχθεί ότι το Ν κινείται σε μια έλλειψη.

- ***Μέγιστο – ελάχιστο μέτρο***

  Άσκηση : Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει : $|z-6-8i|=5$

  Α) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος (C) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών Z καθώς και η καρτεσιανή εξίσωσή του.

  Β) Να αποδειχθεί ότι $5\leq|z|\leq 15$.

  Γ) Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να βρεθούν αυτοί που έχουν i) το ελάχιστο μέτρο και ii) το μέγιστο μέτρο.

  Δ) Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί που επαληθεύουν τη δοσμένη σχέση , να βρεθεί η μέγιστη τιμή του $|z_1-z_2|$.

Ανάλυση

Συναρτήσεις

- Συναρτησιακές σχέσεις
  Άσκηση : Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα: $f(x-2)+2f(3-x)=11-2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της f.
- Σύνθεση συναρτήσεων
  Άσκηση : Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2x-1$, $x\in[-3,3]$ και $g(x)=5-2x$, $x\in[3,7]$. Να ορισθούν οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$.
  Άσκηση : Να βρείτε τη συνάρτηση f αν ισχύει $(g\circ f)(x)=e^{x+1}+3$ και $g(x)=x+3$.
  Άσκηση : Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με την ιδιότητα $(f\circ f)(x)=xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί το $f(0)$.
- Μονοτονία (μέθοδοι ορισμού)
  Άσκηση : Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-2)-e^{1-x}$ και να λυθεί η ανίσωση $\ln(x-2)>e^{1-x}-\dfrac{1}{e^2}$.
- Συνάρτηση ''1-1''- Αντίστροφη συνάρτηση.
  Άσκηση : Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+2f(x)=3x^{2009}-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι ''1-1'' και να λύσετε την εξίσωση $f(x^3-2x)=f(x-2)$.
  Άσκηση : Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x+2$. Να αποδειχθεί ότι είναι γνησίως αύξουσα. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=1$. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=x-1$. Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x)\ge x-1$.

Όριο συνάρτησης

- Μορφή $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ σε ρητή συνάρτηση

  Άσκηση : Να βρεθεί το όριο $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-5x+6}$
- Μορφή $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ σε άρρητη συνάρτηση

  Να υπολογισθούν τα όρια $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x^2-1}$ και $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-3}{x-1}$

- Μορφή $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ με απόλυτες τιμές.

  Να υπολογισθεί το όριο $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|+x^2-4}{x^2-4}$

- Κριτήριο παρεμβολής
  - Να βρεθεί το όριο $A=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{\nu}\eta\mu\dfrac{1}{x}\right),\ \nu\in\mathbb{N}^*$.
  - Αν $|f(x)-3x+5|\le x^2$ για κάθε $x\neq 0$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.
- Παραμετρικό όριο
  Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β , ώστε :
  $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\alpha x^2-(\beta+3)x+2\alpha+\beta}{x^2-4x+3}=2$.
- Τριγωνομετρικό όριο
  - Να βρεθεί το όριο $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x}{x^2+x}$
  - Να βρεθεί το όριο $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{x^2}$
  - Να βρεθεί το όριο $\Gamma=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu\pi x}{x-2}$
  - Να βρεθεί το όριο $A=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{\nu}\eta\mu\dfrac{1}{x}\right),\ \nu\in\mathbb{N}^*$.
- Από γνωστό όριο βρίσκουμε το όριο της συνάρτησης που εμπεριέχεται
  Άσκηση: Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει
  $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)-x^2+x-5\right)=7$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.
- Από γνωστό όριο βρίσκουμε άλλο όριο. (Αλλαγές ''μέσα'' ή και ''κάτω'')
  Άσκηση: Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι
  $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+x}{x-1}=2$, να βρεθεί το: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+1}{x^2-1}$.
  Άσκηση: Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει
  $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=2$, να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$.
- Όριο της μορφής $\left(\dfrac{a}{0},a\neq 0\right)$

  Άσκηση: Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-x}{x^2-2x-3}$.
- Όριο συνάρτησης στο άπειρο.

- Ρητά: Να βρεθεί το $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+3x+7}{2x^2+x+3}$
- Άρρητα: Να βρεθεί το $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}+x+2\right)$ και το $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{4x^2+4x+3}-3x\right)$
- Με απόλυτα: Να βρεθεί το $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left|2x^3+3x^2-3x+5\right|-\left|x^2-7x-13\right|}{\left|x^3+x-5\right|+\left|7-x\right|}$.
- Παραμετρικό: Να βρεθεί το $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\lambda^2+\lambda-2)x^2+(\lambda-1)x+2}{(\lambda+5)x+7}$ για τις διάφορες τιμές του λ.
- Όριο εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης: Να βρεθούν τα όρια $A=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3^{x+1}}{2^{x+1}+3^x}$ $B=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln(1+e^x)\right)$.

Συνέχεια συνάρτησης

- Μελέτη συνέχειας

  Άσκηση : Να εξετασθεί αν είναι συνεχής η συνάρτηση

  $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}, & \text{αν } x<1\\ 2x-3, & \text{αν x} \geq 1\end{cases}$$

  Άσκηση : Οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχουν την ιδιότητα $f^2(x)+g^2(x)+2f(x)+5\leq 4g(x)+\sigma\upsilon\nu^2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι οι f,g είναι συνεχείς στο $x_0=\frac{\pi}{2}$.

- Εύρεση παραμέτρων

  Άσκηση : Να βρεθούν τα α και β ώστε να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}, & \text{αν x<1}\\ \beta+1, & \text{αν x=1}\\ \alpha x^2-1, & \text{αν x>1}\end{cases}$

- Εύρεση τιμής η του τύπου της f

  Άσκηση : Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ και $\left|xf(x)-\eta\mu 2x\right|\leq x^4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρεθεί η τιμή $f(0)$.

- Ύπαρξη μία τουλάχιστον ρίζας (Θ. Bolzano)

Άσκηση : Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α,β] , με α>0. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $\frac{f(\xi)}{\xi}=\frac{\alpha}{\alpha-\xi}+\frac{\beta}{\beta-\xi}$

- Εύρεση πρόσημου η και τύπου συνάρτησης
  Άσκηση : Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ με : $f^2(x)=9-x^2$ για κάθε $x\in A$. i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού Α. ii) Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης f(x)=0. iii) Να αποδειχθεί ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα (-3,3). iv) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f .
- Θεώρημα μέγιστης κι ελάχιστης τιμής.
  Άσκηση : Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,4]. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in[0,4]$ τέτοιο ώστε $2f(1)+3f(2)+4f(3)=9f(\xi)$.

- Μονοτονία - Συνέχεια - Σύνολο τιμών
  Άσκηση :Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x)=e^{-x}-2x+1$στο Δ=[0,1).

Παράγωγοι

- Υπολογισμός παραγώγου
- Εξίσωση εφαπτομένης
- Εύρεση παραμέτρων
  Άσκηση : Να βρεθούν τα α, β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-1$. $f(x)=\begin{cases} x^3+(\beta-1)x-3\alpha, & x\le -1 \\ x^2+(\alpha^2+5)x+2-\beta, & \text{x>-1}\end{cases}$.
- Παράγωγος και όριο
  Άσκηση : Μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=2$ και $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)}{h}=5$. Να βρεθούν α) η τιμή f(2) , β) η παράγωγος της f στο $x_0=2$, γ) το όριο $A=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+3x-6}{x^2-4}$.
  Άσκηση : Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα : $\left|xf(x)-\eta\mu^2 x\right|\le x^4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, να αποδειχθεί ότι : α) f(0)=0, β) η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=1$.
- Παραγώγιση με δύο μεταβλητές
  Άσκηση : Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(2x+3y)=2f(x)-3f(y)$. Α) Να εξετασθεί αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Β) Να αποδειχθεί ότι $f'(0)=0$. Γ) Να υπολογισθεί το όριο $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

- Ύπαρξη τουλάχιστον μίας ρίζας (Θεώρημα Rolle στην αρχική)
  Άσκηση : Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)-f(\beta)=\alpha^3-\beta^3$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=3\xi^2$.
- Ύπαρξη το πολύ μίας ρίζας (Απαγωγή σε άτοπο με το Θ. Rolle)
  Άσκηση : Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $4x^3+18x+\mu=21x^2$ δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο (1,2).
- Απόδειξη ανισοτήτων (Θ.Μ.Τ. ή μονοτονία)
  Άσκηση : Να αποδειχθεί ότι για κάθε x>0 ισχύει $\dfrac{1}{x+1}<\ln\dfrac{x+1}{x}<\dfrac{1}{x}$.
- Ύπαρξη ξ_1,ξ_2 σε μία σχέση.
  Άσκηση : Δίνεται συνεχής συνάρτηση f στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β), με $f(\alpha)\neq f(\beta)$. Να αποδειχθεί ότι α) υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $4f(x_0)=f(\alpha)+3f(\beta)$. β) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi\in(\alpha,\beta)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοια ώστε: $\dfrac{3}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{4}{f'(\xi)}$.

- Ισότητα παραγώγων - εύρεση συνάρτησης- σταθερή συνάρτηση
  Άσκηση : Να βρεθεί η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)+3f(x)=2e^{-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=2$.
- Μελέτη μονοτονίας – ακροτάτων – πλήθους ριζών – συνόλου τιμών – απόδειξη ανισοτήτων (με πίνακα μεταβολών)
- Θεώρημα Fermat
  Άσκηση : Για τη συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-x^\alpha$ με x>0 α) Να βρεθεί η παράγωγος β) Αν ισχύει $\alpha^x\geq x^\alpha$ για κάθε x>0, να αποδειχθεί ότι α=e.
- Κυρτότητα - σημεία καμπής
- Ασύμπτωτες
- Κανόνας De l’ Hospital

Ολοκληρώματα

Αόριστο Ολοκλήρωμα

- Μέθοδος «κατά παράγοντες»

Άσκηση : Να υπολογισθεί το $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$

- Μέθοδος «αντικατάστασης»

  Άσκηση : Να υπολογισθεί το $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$

- Ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης

  Άσκηση : Να υπολογισθεί το $\int_2^3 \frac{x^3+2x+6}{x^2+x-2} dx$

- Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα

  Άσκηση : Να υπολογισθεί το $\int_0^{\pi/2} \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x dx$

  Άσκηση : Να υπολογισθεί το $\int_0^{\pi/2} \eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x dx$

  Άσκηση : Να υπολογισθεί το $\int_0^{\pi/4} \varepsilon\phi x dx$ και το $\int_0^{\pi/4} \varepsilon\phi^2 x dx$ και το $\int_0^{\pi/4} \varepsilon\phi^3 x dx$ κ.τ.λ.

- Αναδρομικά (Αναγωγικά) ολοκληρώματα

  Άσκηση : Για το το $I_\nu = \int_1^2 \frac{e^x}{x^\nu} dx$ με $\nu \in \mathbb{N}^*$ να δειχθεί ότι

  $$I_\nu = \left[-\frac{e^x}{(\nu-1)x^{\nu-1}}\right]_1^2 + \frac{1}{\nu-1} I_{\nu-1}$$

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

- Ίδιες μέθοδοι επίλυσης ολοκληρωμάτων με το αόριστο ολοκλήρωμα.
- Ανισότητες Ολοκληρωμάτων

  Άσκηση : Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με : $f(x) = x^2\eta\mu x + 2x\sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = 2\eta\mu x,\ \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Αν $h(x) = f(x) - g(x),\ \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε α) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. β) να αποδειχθεί ότι $\int_\alpha^\beta h(x)dx \ge 0$ με $0 \le \alpha \le \beta \le \frac{\pi}{2}$ γ) να αποδειχθεί ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx \ge \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

  Άσκηση : Αν για τη συνεχή συνάρτηση f ισχύει $\int_0^1 f^2(x)dx + \frac{1}{3} \le 2\int_0^1 xf(x)dx$ τότε να βρεθεί ο τύπος της f .

- Χαρακτηριστικές αντικαταστάσεις.

Άσκηση : Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\eta\mu x}dx = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\eta\mu x}dx$.

- Ολοκλήρωση της f^{-1}.

  Άσκηση : Να δείξετε ότι η $f(x)=x^3+x-1$ αντιστρέφεται και να βρείτε το $I=\int_{-1}^{1} f^{-1}(x)dx$.

- Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$. (Προσοχή στην παραγώγιση της και στις μεταβλητές μέσα και έξω από το ολοκλήρωμα).

  Άσκηση : Αν $g(x)=\int_1^x\left(\int_1^t\left(\int_1^u xtu\cdot f(y)dy\right)du\right)dt$ με $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχή συνάρτηση, να δείξετε ότι

$$f(x)=\left(\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\left(\frac{g(x)}{x}\right)'\right)'\right)', \quad x\neq 0.$$

- Πεδίο ορισμού της $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$.

  Άσκηση : Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

$$f(x)=\int_{x^2}^{x+3}\frac{\ln(1+t^2)}{t-4}dt$$

- Εύρεση ορίων

  Άσκηση : Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με f(0)=0 και f΄(0)=2. Να υπολογισθεί το όριο

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+2\sigma\upsilon\nu x-2}\int_0^x x^2 f(t)dt.$$

- Συνδυαστικά θέματα με θεωρήματα συνέχειας-παραγώγων.

  Άσκηση : Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [1,2]. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi)\int_{\xi}^{2} g(x)dx = g(\xi)\int_1^{\xi} f(x)dx.$$

  Άσκηση : Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα : $\int_{2-x}^{x^2} f(t)dt \geq x^2+x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. α) Να βρεθεί η παράγωγος της $g(x)=\int_{2-x}^{x^2} f(t)dt,\quad x\in\mathbb{R}$. β) Να αποδειχθεί ότι $f(1)=f(4)$. γ) Να αποδειχθεί ότι η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο διάστημα $(1,4)$.

Άσκηση : Να υπολογισθεί το $A=\int_0^1\left(\int_1^x 2e^{-t^2}dt\right)dx$. Να αποδείξετε ότι A<0.

Άσκηση : Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι : $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να αποδειχθεί ότι α)

$\left(\int_{2x}^{4x-2} f(t)dt\right)'=4f(4x-2)-2f(2x)$ και

β) $\int_{2x}^{4x-2} f(t)dt\le\int_2^{2x} f(t)dt$.

Εμβαδά

- Εμβαδά μεταξύ δύο συναρτήσεων
- Εμβαδά μεταξύ περισσότερων συναρτήσεων
- Εμβαδά με αντίστροφη συνάρτηση.