

Ρυθμός μεταβολής στο x_0

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$.
Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f ως προς x , όταν $x = 1$.
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x+1}$.
Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f ως προς x , όταν $x = -2$.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5\eta\mu x - \pi$.
Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της παραγώγου της f ως προς x , όταν $x = 0$.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - ax^2 - x + 1$.
Να βρείτε την τιμή του a , για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x , όταν $x = 2$ είναι 5.
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (3x - 1)(ax - 2)$.
Να βρείτε την τιμή του a , για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x , μηδενίζεται, όταν $x = 2$.

Προβλήματα

6. Η αξία μίας δίκυκλης μηχανής (σε ευρώ) t χρόνια μετά την αγορά της δίνεται από τη σχέση

$$f(t) = 20.000 - 50t^2, \quad 0 \leq t \leq 15$$
 - α. Ποια είναι η τιμή αγοράς της μηχανής;
 - β. Ποια είναι η αξία της μηχανής μετά από 10 χρόνια;
 - γ. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της αξίας της μηχανής οποιαδήποτε χρονική στιγμή και ποιος ο ρυθμός μεταβολής της αξίας της μετά από 7 χρόνια;
7. Μια ώρα μετά τη λήψη x mg ενός αντιπυρετικού, η μείωση της θερμοκρασίας ενός ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $T(x) = x^2 - \frac{x^3}{4}$, $1 < x < 3$.
Να βρείτε τη δόση του αντιπυρετικού, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας ως προς x να είναι 1.

8. Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι $K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000$ σε €, για $0 \leq x \leq 105$, ενώ η είσπραξη από την πώληση των x μονάδων είναι $\Pi(x) = 420x - 2x^2$ σε €. Να βρείτε τότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους $P(x) = \Pi(x) - K(x)$ ως προς x είναι θετικός.

Προβλήματα Γεωμετρίας

9. Έστω κυκλικός δίσκος ακτίνας r και εμβαδού E .



Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του E ως προς r , όταν $r=1$.

10. α. Η επιφάνεια μιας σφαίρας ακτίνας r είναι $E = 4\pi r^2$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του E ως προς r , όταν $r=2$.

- β. Ο όγκος V μιας σφαίρας ακτίνας r είναι $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του V ως προς r , όταν $r=3$.

11. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $\alpha = x^2$ και $\beta = x+1$ ως προς x , όταν $x=1$.

Ταχύτητα - Επιτάχυνση

12. Ένα σώμα κινείται σε έναν άξονα και η θέση του x τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = t^3 - t^2 - t$$

όπου το x μετριέται σε μέτρα και το t μετριέται σε δευτερόλεπτα.

- α. Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t=3$ δευτερόλεπτα.
β. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα είναι ακίνητο.
γ. Να βρείτε την επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t=5$ δευτερόλεπτα.

13. Ένα σώμα κινείται σε έναν άξονα και η θέση του x τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση $x(t) = -t^3 + 6t^2 - 9t$,

όπου το x μετριέται σε μέτρα και το t μετριέται σε δευτερόλεπτα.

- α. Πότε το σώμα κινείται στην θετική κατεύθυνση;
β. Πότε η ταχύτητα αυξάνει;
γ. Ποια είναι η απόσταση που διανύθηκε από το σώμα στη διάρκεια του πρώτου δευτερολέπτου;

14. Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x = x(t) = t(t-9)^2$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα και το x σε m.
- Να βρείτε την ταχύτητα σε χρόνο t .
 - Ποια είναι η επιτάχυνση σε χρόνο 2 sec;
 - Πότε το σημείο είναι (στιγμιαία) ακίνητο;
 - Πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;
 - Να βρείτε το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 4 sec.

B' ΟΜΑΔΑ

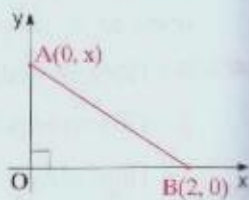
15. Οι διαστάσεις a , b ενός ορθογωνίου μεταβάλλονται με το χρόνο σύμφωνα με τις σχέσεις $a(t) = 3t + 2$ και $b(t) = t^2 + 1$, όπου $t > 0$ ο χρόνος σε sec.
- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο $E(t) = 3t^3 + 2t^2 + 3t + 2$.
 - Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου ως προς t , τη χρονική στιγμή $t = 2$ sec.
16. Ο όγκος V ενός κυλίνδρου με ακτίνα βάσης r και ύψος h είναι $V = \pi r^2 \cdot h$. Αν $h = 2r + 1$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του V :
- ως προς h , όταν $h = 2$
 - ως προς r , όταν $r = 2$.
17. Η επιφάνεια E ενός κυλίνδρου με ακτίνα βάσης r και ύψος h έχει εμβαδόν $E = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$. Αν $h = 3r + 2$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του E ως προς r , όταν $r = 2$.
18. Δύο ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες r και $R = 2r + 3$. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής ως προς r του εμβαδού E του δακτυλίου, όταν $r = 2$.



19. Έστω τα σημεία $A(0, x)$, $x > 0$ και $B(2, 0)$.

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

- της απόστασης d των σημείων A και B ως προς x , όταν $x = 1$.
- του εμβαδού E του τριγώνου OAB ως προς x , όταν $x = 1$.



20. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης d των σημείων $A(2, 1)$ και $B(x, 0)$ ως προς x , όταν $x = 1$.
21. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει βάση τετράγωνο πλευράς $a = x + 1$ και ύψος $u = x$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου V του ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου ως προς x , όταν $x = 1$.
22. Έστω ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με μήκος x cm, πλάτος $(x - 2)$ cm και ύψος $(5 - x)$ cm.
- α. Να αποδείξετε ότι:
- Ο όγκος V του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου δίνεται από τον τύπο $V(x) = -x^3 + 7x^2 - 10x$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
 - Το εμβαδόν E του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου δίνεται από τον τύπο $E(x) = -2x^2 + 20x - 20$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- β. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής ως προς x του όγκου και του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, όταν $x = 3$ cm.
23. Ένα σώμα αφήνεται να πέσει από την κορυφή ενός κτιρίου ύψους 45 m, τη χρονική στιγμή $t = 0$ sec. Αν θεωρήσουμε την αντίσταση του αέρα αμελητέα, το διάστημα που διανύει το σώμα μετά από t sec πτώσης δίνεται από τη συνάρτηση $S(t) = 5t^2$ m.
- α. Να υπολογίσετε το διάστημα που θα διανύσει το σώμα σε χρόνο $t = 2$ sec.
- β. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να φτάσει στο έδαφος, είναι $t = 3$ sec.
- γ. Να υπολογίσετε:
- Τον τύπο της ταχύτητας $u(t)$ του σώματος κάθε χρονική στιγμή t .
 - Την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή της πρόσκρουσης στο έδαφος.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{\lambda}{2}x^2 - 6x + \sqrt{5}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Αν ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x , όταν $x=3$ είναι 0, τότε:

α. Να δείξετε ότι $\lambda = -1$.

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x)}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β. Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της f , όταν $x=3$, ισούται με $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

γ. Αν $h(x) = \frac{f(x) - \sqrt{3}}{x - 2}$ για $x \neq 2$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$. Θ.Ε.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

α. Να βρείτε την εφαπτομένη ε στη γραφική παράσταση της f που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

β. Αν $M(x, y)$ σημείο της ε , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων M και $O(0, 0)$ ως προς x , όταν $x=4$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{10}(x^2 - x - 1)^{10}$.

α. Να βρείτε την εφαπτομένη ε στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

β. Αν $M(x, y)$ σημείο της ευθείας ε , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης d των σημείων M και $O(0, 0)$ ως προς x , όταν $x=2$.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, ένα σημείο $M(x, f(x))$ και το σημείο $A(4, 0)$.

α. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f και το τρίγωνο MOA .

β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής ως προς x του εμβαδού E του τριγώνου MOA , όταν $x=2$.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

- α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β.** Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$ της συνάρτησης f .
- γ.** Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x , όταν $x = 2$.
- δ.** Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = -2$.
- ε.** Να βρείτε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{2 - \sigma\upsilon\nu x}$.

- α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β.** Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{2\sigma\upsilon\nu x - 1}{(2 - \sigma\upsilon\nu x)^2}$.
- γ.** Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x , όταν $x = \frac{\pi}{2}$.
- δ.** Να βρείτε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f , στο σημείο της $A(0, f(0))$.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 0$ είναι 9 και ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x , όταν $x = 1$ είναι 0.

- α.** Να δείξετε ότι $a = -6$ και $b = 9$.
- β.** Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, δίνεται από τον τύπο $x = x(t) = f(t)$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα και το x σε μέτρα.
 - i.** Να βρείτε την ταχύτητα του σημείου σε χρόνο t .
 - ii.** Πότε το σημείο είναι (στιγμιαία) ακίνητο;
 - iii.** Να βρείτε την επιτάχυνση του σημείου μετά από 5 sec.

- 32.** Σε μία άδεια δεξαμενή σχήματος κύβου ακμής 2 m προσθέτουμε πετρέλαιο. Το ύψος h (σε m) της στάθμης του πετρελαίου στη δεξαμενή, ως συνάρτηση του χρόνου t (σε min) είναι $h(t) = \frac{t^2}{18}$.
- i.** Να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου σε χρόνο $t = 3$ min.
 - ii.** Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του ύψους του πετρελαίου σε χρόνο $t = 3$ min.
- β.**
- i.** Να δείξετε ότι ο όγκος του πετρελαίου στη δεξαμενή μετά από χρόνο t min είναι $V(t) = \frac{2t^2}{9} \text{ m}^3$.
 - ii.** Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου του πετρελαίου τη χρονική στιγμή $t = 5$ min.
- γ.** Να βρείτε σε πόσο χρόνο θα γεμίσει η δεξαμενή.
- 33.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ και ένα σημείο της $M(x, y)$. Έστω K, Λ οι προβολές του σημείου M στους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα.
- α.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και το ορθογώνιο $ΜΚΟΛ$.
 - β.** Να εκφράσετε ως συνάρτηση x την περίμετρο $\Pi = \Pi(x)$ του ορθογωνίου $ΜΚΟΛ$.
 - γ.** Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου, όταν $x = 2$.
- 34.** Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = -x + 5$.
- α.** Να βρείτε τα σημεία τομής A, B της ευθείας ε με τους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα και να σχεδιάσετε την ευθεία ε .
 - β.** Έστω ένα σημείο $M(x, y)$ εσωτερικό του τμήματος AB και K, Λ οι προβολές του στους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα.
 - i.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $ΜΚΟΛ$, ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = -x^2 + 5x$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

- ii. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(x)$ ως προς x , όταν $x = 2$.
- iii. Να βρείτε το σημείο M για το οποίο ο ρυθμός μεταβολής του $E(x)$ ως προς x είναι 3.

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 9$, ένα σημείο της $M(x, y)$ με $x \in (0, 3)$ και K, Λ οι προβολές του σημείου M στους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα.
- α. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f και το ορθογώνιο $MKOL$.
- β. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x την περίμετρο Π και το εμβαδόν E του ορθογωνίου $MKOL$.
- γ. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής ως προς x του εμβαδού του ορθογωνίου, όταν ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου είναι -6 .

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

36. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).
- α. Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x , όταν $x = x_0$.
- β. Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$, τη χρονική στιγμή t_0 είναι $v(t_0) = f''(t_0)$.
- γ. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$, ως προς x , όταν $x = x_0$.

α.	β.	γ.
----	----	----

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι $F'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- A2.** Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο x_0 του πεδίου ορισμού της και τι ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 ;
- A3.** Να συμπληρώσετε τα δεύτερα μέλη των ισοτήτων, ώστε αυτές να εκφράζουν τους κανόνες παραγωγισής.

α. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dots\dots\dots$

β. $(cf(x))' = \dots\dots\dots$

γ. $(f(g(x)))' = \dots\dots\dots$

δ. $(f(x) \cdot g(x))' = \dots\dots\dots$

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι ο αριθμός $f'(x_0)$.

β. Ισχύει $(\sin x)' = \eta\mu x$.

γ. Ισχύει $(x)' = x$.

δ. Για κάθε $x > 0$ ισχύει $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

ε. Αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα είναι $x(t)$ τη χρονική στιγμή t , τότε η ταχύτητά του είναι $v(t) = x'(t)$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x^2 - 1$.

- Β1. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$ της συνάρτησης f .
- Β2. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f ως προς x , όταν $x = 1$.
- Β3. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 2$.
- Β4. Να βρείτε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Γ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$.
- Γ2. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.
- Γ3. Να βρείτε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta x$.

- Δ1. Αν η εφαπτομένη ε στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 0$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 9x + 1$ και ο ρυθμός μεταβολής της f μηδενίζεται στο 1, να βρείτε τα α και β .

Αν $\alpha = -6$ και $\beta = 9$, τότε:

- Δ2. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , στα οποία οι εφαπτομένες σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 0^\circ$.
- Δ3. Αν η συνάρτηση θέσης ενός σώματος που κινείται ευθύγραμμα (πάνω στον άξονα $x'x$) είναι $x(t) = f(t)$, να βρείτε:
 - i. πότε το σώμα είναι ακίνητο
 - ii. την επιτάχυνσή του μετά από 3 sec.