

Όριο συνάρτησης

1. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -1$$

να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$ β. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$ γ. $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x) + g^2(x))$

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x^2 - 2x + 1)$ β. $\lim_{x \rightarrow 0} [(x^4 + 1)(x^3 - 2)^2]$

γ. $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + \sqrt{x^2 - 1})$ δ. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(x + 2 + \frac{3x - 2}{x^2 + 1} \right)$

3. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + a}{x + 1} = 3$, να βρείτε τιμή του a .

4. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 0} (2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x)$ β. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (2\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x - \epsilon\phi x)$

γ. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(1 + \sigma\upsilon\nu x - \frac{x}{\eta\mu x} \right)$ δ. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (2\sigma\upsilon\nu x - \epsilon\phi x)$

Απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0} \right)$

Όριο ρητών συναρτήσεων

5. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$ β. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{x - 5}$ γ. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - 4x}$

δ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - x}$ ε. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{3x + 3}$ στ. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 10}{x^2 - 5x}$

ζ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6}$ η. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{2x - 2}$ θ. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 6x^2}{4x - 12}$

6. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{2 - x}$

β. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5 - x}{x^2 - 5x}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 8x}{12 - 3x}$

7. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

β. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$

γ. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

δ. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{25 - x^2}{5 - x}$

ε. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{2x - 14}$

στ. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x + 1}$

ζ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{2x - 2}$

η. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 - 8x}{3x + 6}$

θ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 12x}{4x - 2x^2}$

8. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

β. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + 3}{x^2 - x - 2}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{4x - 12}$

δ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$

ε. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{3x^2 - 5x - 2}$

στ. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2 + 3x - 18}{x^3 - 9x}$

9. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$

β. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$

10. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^3 + x - 2}$

β. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 2x}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 - x - 1}{3x^2 - 3}$

11. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

β. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{2x - 6}$

12. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

β. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$

δ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-\sqrt{3x+1}}$

ε. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{5-x}$

στ. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$

13. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-4x}{\sqrt{x}-2}$

β. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$

δ. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

ε. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}-1}$

στ. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+4x+4}{\sqrt{x+3}-1}$

14. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$

β. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}$

δ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^2-2x+1}-1}{x-1}$

15. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-x}$

β. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{\sqrt{x^2+5}-3}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x^2-5x+4}$

δ. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{4x^2+3}-2}{2x^2+x-1}$

16. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^3+3}-2x}{3-3x}$

β. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\sqrt{x^3-7}-x}{4-x^2}$

17. Να βρείτε τις τιμές του a , για τις οποίες ισχύει:

α. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax^2 - 9a}{x^2 - 3x} = 4$

β. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x} - a}{x - 1} = 6$

Συνέχεια συνάρτησης

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{αν } x \neq 3 \\ 6, & \text{αν } x = 3 \end{cases}$.

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}, & \text{αν } x > 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$.

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}, & \text{αν } x \neq 4 \\ 3a - 1, & \text{αν } x = 4 \end{cases}$.

Να βρείτε την τιμή του a , για την οποία η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 4$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ a^2 + 1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές του a , για τις οποίες η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

22. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{(x^2 - 1)(\sqrt{x} - 1)}$

β. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(\sqrt{3x - 2} - 2)}{(x^2 - 2x)^2}$

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \frac{8}{x}$. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{\sqrt{x^3 + 1} - 3}$.

25. Αν $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x^2 - 1)(\sqrt{2x - 1} - 1)}$.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x + 1}$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{x^2 - x}$

β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - 1}{x^2 + x}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot \sqrt{x + 1} - 1}{x}$

27. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2|x|}{|x|}$

β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2 - |x|}$

28. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

β. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x\sqrt{x + 1} - 6}{x^3 - 27}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{x^3 - 1}$

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 9)f(x) - 3x}{x^2}$

β. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5f(x) - 4}{x^2 - 4x}$

30. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + 2 - x}{x - 4}$

β. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} + x - 3}{x - 1}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - x - 1}{x}$

31. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$

β. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x\eta\mu x - x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\varphi x}{\eta\mu x}$

δ. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$

ε. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{1 + \eta\mu x} - 1}$

32. Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες ισχύει:

α. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + \alpha x - \alpha}{x - 1} = 5$

β. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4 + \alpha x - 2\alpha}{x - 2} = 3$

33. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 3$ και ισχύει

$$xf(x) = 3f(x) + x^2 - 9, \text{ για κάθε } x \neq 3$$

α. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

β. Να βρείτε την τιμή του α , για την οποία ισχύει $f(3) = \alpha^3 + 7$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2\alpha}{x^2 - 2x}$ με $\alpha = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3}{2x - 1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να δείξετε ότι $\alpha = -2$.

γ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

δ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\sqrt{f(x)} + \frac{1}{f(x)} \right)$.

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x + \alpha}{\sqrt{x+1} - 1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να βρείτε την τιμή του α , για την οποία η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(3, 6)$.

Αν $\alpha = 0$, τότε:

γ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

δ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$ και διέρχεται από το σημείο $M(-1, f(-1))$.

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ \alpha - 3, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να δείξετε ότι $f(2) + f(1) = \alpha - 4$.

γ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$.

δ. Να βρείτε την τιμή του α , για την οποία η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

ε. Για $\alpha = 1$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε , που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $M(1, f(1))$.

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \alpha x + \beta$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, -1)$ και $B(-2, 8)$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 0$.

β. Να βρείτε τα διαστήματα του x για τα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x+1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{\sqrt{x+3}-2}$

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1} + \alpha$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(1, 0)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

γ. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-4}{f(x)-1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{f(x)}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-1}{x^2-4}$

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 3$.

α. Να βρείτε τα σημεία τομής B , Γ της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα.

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία B και Γ του προηγούμενου ερωτήματος.

γ. Να βρείτε τα διαστήματα του x για τα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^3-1}$.

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - kx + 2$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$.

α. Να αποδείξετε ότι $k = 3$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $B(0, f(0))$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$ και το εμβαδόν του τριγώνου OAB .

γ. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\sqrt{x}-1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+5}-3}$

41. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και η καμπύλη της διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$, να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) \cdot (x^2 + x)}{2 - \sqrt{x+5}}$$

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$.

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1 και τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3.

α. Να δείξετε ότι $\alpha = -4$ και $\beta = 3$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $K(3, f(3))$ και έχει κλίση 2.

γ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 - 9}$.

δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$.

43. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Θ.Ε.

44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - kx^2 + 2$.

α. Να βρείτε την τιμή του k , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη -1 .

β. Για $k=1$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $B(-1, f(-1))$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y = -2x + 1$.

γ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x) - 2}{\sqrt{2x^2 + 1} - 1}$.

δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

45. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\sqrt{x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $\varepsilon: y = 1$.

γ. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{f(x)}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 8}{x^2 - 3x - 4}$

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{a}{x^2}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο 1.

α. Να βρείτε την τιμή του a .

β. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x)}{\sqrt{2x-1}-x}$.

γ. Να βρείτε τα διαστήματα του x που η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x + a$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.

α. Να βρείτε την τιμή του a .

β. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu^2 x}$.

γ. Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε $f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$.

48. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$x \cdot f(x) - 2 \cdot f(x) = x^2 - 4, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, για $x \neq 2$.

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

γ. Να βρείτε το $f(2)$.

Θ.Ε.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

49. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$, να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα ίσα τους στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
A. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$	1. $\kappa \ell_1$
B. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v$	2. $\frac{\ell_1}{\ell_2}$
Γ. $\lim_{x \rightarrow x_0} (\kappa f(x))$	3. $\ell_1 \cdot \ell_2$
Δ. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}, \ell_2 \neq 0$	4. ℓ_1^v

A.	
B.	
Γ.	
Δ.	

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
- A2.** Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_1 \in A$ τοπικό μέγιστο;
- A3.** Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται συνεχής;
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).
- α.** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$, όπου $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, τότε
- $$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2$$
- β.** Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
- γ.** Αν υπάρχει $x_0 \in A$ με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο x_0 .
- δ.** Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και $x_2 \in A$. Αν $f(x) \geq f(x_2)$, για κάθε x σε μια περιοχή του x_2 , τότε το $f(x_2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
- ε.** Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A , τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πάντα πεδίο ορισμού το A .

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x}{x^2 - 4}$.

- B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- B2.** Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(1, \frac{1}{3})$, να βρείτε το α .
- B3.** Αν $\alpha = -2$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 + a}{x\sqrt{x} - 1}$ και $g(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x\sqrt{x} - 1}$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Γ2. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο 1 , να βρείτε την τιμή του a .

Γ3. Αν $a = -1$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Γ4. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ a - 1, & \text{αν } x = 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = x^3 + x + a - 2$$

Δ1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

Δ2. Να βρείτε το a , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Δ3. Αν $a = 0$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{1 - x}$.