

Συντελεστής διεύθυνσης - Γωνία

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 2$. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 0$.
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x - 2$.
 - α. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης ε στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, f(1))$.
 - β. Να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{10}(2x - 1)^5$.
 - α. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης ε στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$.
 - β. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 1$. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο:
 - α. $x_0 = 1$
 - β. $x_0 = \frac{1}{2}$
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4\sqrt{x^2 - x + 4}$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$ με τον άξονα $x'x$.

Εξίσωση εφαπτομένης στο $A(x_0, f(x_0))$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 2$.
 - α. Να βρείτε την f' .
 - β. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.
 - γ. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης λ της εφαπτομένης ε στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, f(1))$.
 - δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε .

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 5$.
- Na βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f'(2)$.
 - Na βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης ϵ στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(2, f(2))$.
 - Na βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(2, f(2))$.
8. Na βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:
- $f(x) = x^3 + 2x - 3$ στο σημείο $A(2, f(2))$
 - $f(x) = \eta\mu x$ στο σημείο $A(0, f(0))$.
9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 9}$. Na βρείτε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $M(0, f(0))$.
10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x-1}$. Na βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(2, f(2))$.

Σημείο επαφής

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - x + 2$.
- Na βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης 5.
 - Na βρείτε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο παραπάνω σημείο.
12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$.
- Na βρείτε τις τετμημένες των σημείων της καμπύλης της συνάρτησης f , στα οποία οι εφαπτομένες σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 135^\circ$.
 - Na βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2, f(2))$.
13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \sqrt{3}x - 1$.
- Na βρείτε τις τετμημένες των σημείων της καμπύλης της συνάρτησης f που οι εφαπτομένες σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία 60° .
 - Na βρείτε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 0$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x+1}$, $x \neq -1$.

- α. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της καμπύλης της συνάρτησης f , στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στην ευθεία $y = 2x + 5$.
- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x = -2$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x - 1$.

- α. Να βρείτε τα σημεία στα οποία οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλες στη διχοτόμο της γωνίας $x'Oy$.
- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $A(2, f(2))$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$, $x \neq 0$.

- α. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης f , στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.
- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$.

- α. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $y = 2$.
- β. Να βρείτε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f' στο $x_0 = 1$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 5$. Να βρείτε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f που έχει συντελεστή διεύθυνσης -2 .

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x - 1$. Να βρείτε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 135^\circ$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x - 2$. Να βρείτε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y = x + 3$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 - x + 1$. Να βρείτε τις τιμές του a , για τις οποίες η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 8.
23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ax - 1$. Να βρείτε τις τιμές του a , για τις οποίες η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο $x_0 = -1$:
- α. σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 150^\circ$
 - β. είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ) με εξίσωση $y = -x + 2$
 - γ. είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$
24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - ax^2 + 3x - 1$. Να βρείτε τις τιμές του a , για τις οποίες η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

B' ΟΜΑΔΑ

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στη γραφική παράσταση της f που διέρχονται από το σημείο $A(0, 1)$.
26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε στη γραφική παράσταση της f που διέρχεται από το σημείο $A(2, 0)$.
27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$.
- α. Να βρείτε την εφαπτομένη ε στη γραφική παράσταση της f που διέρχεται από το σημείο $A(0, -2)$.
 - β. Να εξετάσετε αν η παραπάνω εφαπτομένη ε έχει και άλλα κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f .
28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x}$. Να βρείτε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f που διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$.
29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax + \beta - 1$. Να βρείτε τις τιμές των a, β για τις οποίες η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(0, 3)$ έχει κλίση 5.
30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + \kappa$, $\kappa \neq 1$.
- α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $M(1, f(1))$.
 - β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την εφαπτομένη ε και τους άξονες δίνεται από τον τύπο $E(\kappa) = \frac{1}{2}(\kappa - 1)^2$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{1-x}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- Να βρείτε τα σημεία τομής B , Γ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα.
- Να βρείτε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στα σημεία B και Γ .

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

- Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$ της συνάρτησης f .
- Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 2$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του προηγούμενου ερωτήματος.
- Να βρείτε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + kx + 2$.

- Αν ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$ είναι 5, να βρείτε το k .

Αν $k = 2$, τότε:

- Να βρείτε την εφαπτομένη ε στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(2, f(2))$.
- Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες της εφαπτομένης ε του προηγούμενου ερωτήματος.
- Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x^2 - 1}$.

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+3)(x-2)^2$.

- Να αποδείξετε ότι $f'(x) = (x-2)(3x+4)$.
- Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f , στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, f(1))$.
- Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$.

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 - 8$, όπου a ένας πραγματικός αριθμός.

α. Αν $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 3$, να βρείτε την τιμή του a .

β. Αν $a = 1$, τότε:

i. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$.

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

γ. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f .

δ. Να βρεθούν οι εφαπτομένες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = 2x + 5$. Θ.Ε.

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin x + \eta \mu x$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f''(x) = 0$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, 1)$.

γ. Να βρείτε την τιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\lambda f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$
Θ.Ε.

38. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = x^2 + x - 1$$

α. Να βρείτε την $f'(x)$.

β. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, f(1))$ με τον άξονα $x'x$.

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\lambda x + 6\lambda - 7$.

- α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(1, f(1))$.
- β. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η ευθεία ε τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy .

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$.
- β. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.
- γ. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$. Θ.Ε.

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax - 7$, όπου a πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει $2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να δείξετε ότι $a = 9$.
- β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$.
- γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x$. Θ.Ε.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

42. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- α. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι ο αριθμός $f'(x_0)$.
- β. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε τα σημεία της καμπύλης της f που δέχονται εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$, έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$.

α.	β.
☐	☐