

Μονοτονία και ακρότατα συνάρτησης

1. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x^2 - 6x + 1$

β. $f(x) = \frac{3x^2}{2} - 5x + 1$

γ. $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

δ. $f(x) = -3x^2 + 12x$

2. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 2$

β. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

γ. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - \sqrt{2}$

δ. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 5$

ε. $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + 1$

στ. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x - 2$

3. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = -x^3 + x^2 + x + 3$

β. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 1$

γ. $f(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 5$

δ. $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5x - 11$

ε. $f(x) = -3x^3 + 3x^2 - x + 2$

στ. $f(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - x - 4$

4. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

β. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3$

γ. $f(x) = -x^3 + 12x - 5$

δ. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$

ε. $f(x) = 2x^3 + x - 1$

στ. $f(x) = -x^3 - x + 4$

ζ. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 7$

η. $f(x) = -\frac{7}{3}x^3 + 10$

5. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x^3 + x + 1$

β. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

γ. $f(x) = x^3 + 5$

δ. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1$

6. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x^4 - 32x + 1$

β. $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 27x - 2$

γ. $f(x) = x^4 - 18x^2 + 5$

δ. $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 3$

7. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

β. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

γ. $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$

δ. $f(x) = 1 - x^2 - \frac{2}{x}$

ε. $f(x) = \frac{1}{x^2+1} - 2023$

8. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

β. $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$

γ. $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$

9. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = x + \sqrt{x-2}$

β. $f(x) = x^2 - 4x$, $x \in [0, 5]$

10. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x) = (x-1)^3(x-3)^3$

β. $f(x) = (x+1)^5(x-2)^4$

11. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \sqrt{x^2+4}$

β. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

γ. $f(x) = \sqrt{x^2-9}$

δ. $f(x) = x - 4\sqrt{x}$

12. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

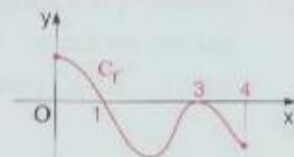
α. $f(x) = x^2 - x \sin x + \eta \mu x$

β. $f(x) = \sin^2 x + 4 \eta \mu x$, $x \in [0, \pi]$

Β' ΟΜΑΔΑ

13. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνεχούς συνάρτησης $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$.

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .



14. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

β. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

15. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4}$

β. $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$

Εύρεση παραμέτρων

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ax + 5$. Να βρείτε τις τιμές του a , ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$. Ποιο είναι το είδος του ακρότατου;

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 - 6x + \beta$.

Να βρείτε τις τιμές των a, β , για τις οποίες η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$ το 3.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ax + \beta - 1$.

α. Να βρείτε τις τιμές των a, β για τις οποίες η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ τοπικό ακρότατο και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(-2, -3)$.

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ. Να βρείτε ποιο είναι το είδος του ακρότατου και ποια η τιμή του.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+1)^2(x+a)$.

α. Να δείξετε ότι $f'(x) = (x+1)(3x+2a+1)$.

β. Να βρείτε την τιμή του a για την οποία η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 5$.

γ. Για $a = -8$, να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - ax^2 + \beta x - 1$. Να βρείτε τις τιμές των a, β για τις οποίες η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$. Ποιο είναι το είδος των ακροτάτων;

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- β. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2023)$ και $f(2024)$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 5$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ είναι αδύνατη.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 8x + 1$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -11$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + 12 = 0$ είναι αδύνατη.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β. Αν $\kappa, \lambda \in (0, 2]$ και $\kappa < \lambda$, να δείξετε ότι $\frac{\kappa^2+4}{\lambda^2+4} > \frac{\kappa}{\lambda}$.
- γ. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 4$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
- δ. Να αποδείξετε ότι $\frac{3f(\alpha) + 4f(\beta)}{7} \geq 4$, για κάθε $\alpha, \beta > 0$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β. Να αποδείξετε ότι αν $x \in [3, 5]$, τότε $\frac{5}{29} \leq f(x) \leq \frac{3}{13}$.
- γ. Να αποδείξετε ότι $\frac{f(37) + f(38)}{2} < f(36)$.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$.
- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - β. Να γράψετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $f(100)$, $f(99)$, $f(101)$.
 - γ. Για κάθε $x \in (-\infty, 1)$, να αποδείξετε ότι $4f(x) + 1 \geq 0$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + \alpha$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.
- β. Αν το τοπικό μέγιστο της συνάρτησης f είναι διπλάσιο από το τοπικό ελάχιστο, να βρείτε την τιμή του α .

Αν $\alpha = 6$, τότε:

- γ. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 4$, για κάθε $x \geq -1$.
- δ. Αν $\alpha, \beta \in [-1, +\infty)$, να αποδείξετε ότι $\frac{3f(\alpha) + 2f(\beta)}{5} \geq 4$.
- ε. Να αποδείξετε ότι $4 \leq f(\eta\mu x) \leq 8$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συναρτήσεις με παράμετρο

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία για τις διάφορες τιμές του λ .

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \lambda x - 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα για τις διάφορες τιμές του λ .

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + \lambda x - 1$.

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3\lambda x - 1$.

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η συνάρτηση f έχει ακρότατα.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \lambda x - 2$.

Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή του λ για την οποία η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.

- α. Να βρείτε τα διαστήματα που η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα που είναι γνησίως φθίνουσα.
- β. Να βρείτε τις θέσεις των τοπικών ακρότατων της συνάρτησης f , το είδος των ακρότατων και την τιμή τους.
- γ. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(3)$ και $f(\pi)$.
- δ. Για κάθε $x \geq 1$, να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 1$.

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-3)(x^2+3)$.

- α. Να δείξετε ότι $f'(x) = 3(x-1)^2$.
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f(\sqrt{3})$.
- δ. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$.
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha^2}{\beta^2} < \frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}$.
- δ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στην ευθεία ζ με εξίσωση $y = \frac{1}{2}x + 5$.
- ε. Να βρείτε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$.

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\pi)$ και $f(3)$.
- γ. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \leq 3$.
- δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 4$ είναι αδύνατη στο $[1, +\infty)$.

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-2}$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και το ρυθμό μεταβολής της ως προς x , όταν $x = 3$.
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.
- γ. Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακρότατων της συνάρτησης f .
- δ. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\pi)$ και $f(4)$.
- ε. Να αποδείξετε ότι $f(x) - 1 \leq 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 2)$.

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και το ρυθμό μεταβολής της ως προς x , όταν $x = 3$.
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.
- γ. Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακρότατων.
- δ. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων στη γραφική παράσταση της f που είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.
- β. Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακρότατων της συνάρτησης f .
- γ. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- δ. Να λύσετε την εξίσωση $f^2(x) = -2025 f(x)$.

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 3$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.
- β. Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των ακρότατων της συνάρτησης f .
- γ. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- δ. Να λύσετε την εξίσωση $f^2(x) = 3f(x)$.

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = -\frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- β. Να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζει η εφαπτομένη ε στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(0, f(0))$ με τον άξονα $x'x$ και την εξίσωσή της.
- γ. i. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.
ii. Ποιο είναι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες;
- δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 1}{h}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

42. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

- α. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .
- β. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο (a, β) .
- γ. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in (a, \beta)$ και $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε η f παρουσιάζει στο x_0 μέγιστο.
- δ. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0) = 0$ και εκατέρωθεν του x_0 η f' αλλάζει πρόσημο, τότε η f παρουσιάζει για $x = x_0$ ακρότατο.
- ε. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β) .

α.	β.	γ.	δ.	ε.