

Μονοτονία και ακρότατα της f'

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 12x + 15$. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία η f έχει το μέγιστο ρυθμό μεταβολής ως προς x .
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 - 13x + 2$.
Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η f έχει τον ελάχιστο ρυθμό μεταβολής.
3. Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης
$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$$
η εφαπτομένη έχει το μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης;
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3}{5}x^5 - x^4 + 3$. Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

Προβλήματα

5. Η αξία ενός αυτοκινήτου (σε χιλιάδες ευρώ) t χρόνια μετά την αγορά του δίνεται από τη συνάρτηση
$$f(t) = 30 - t^2, \quad 0 \leq t \leq 5$$
 - α. Ποια είναι η αρχική αξία του αυτοκινήτου και ποια θα είναι η αξία του μετά από 3 χρόνια;
 - β. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της αξίας του αυτοκινήτου οποιαδήποτε χρονική στιγμή και ποιος ο ρυθμός μεταβολής της αξίας του μετά από 4 χρόνια;
 - γ. Να αποδείξετε ότι η αξία του αυτοκινήτου συνεχώς μειώνεται με την πάροδο του χρόνου.
6. Η τιμή K (σε ευρώ) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την παραγωγή του, δίνεται από τον τύπο
$$K(t) = 500 - \frac{25t^2}{(t+2)^2}$$
 - α. Ποια είναι η αρχική αξία του προϊόντος;
 - β. Να αποδείξετε ότι το προϊόν συνεχώς υποτιμάται.
 - γ. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της τιμής τους μετά από 8 μήνες;

7. Το ύψος (σε m) που βρίσκεται ένα τηλεκατευθυνόμενο μοντέλο αεροπλάνου, μετά από χρόνο πτήσης t (sec) δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -3t^2 + 30t, \quad \text{όπου } 0 \leq t \leq 10$$

- α. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του ύψους του αεροπλάνου τη χρονική στιγμή $t=2$.
- β. Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το αεροπλάνο ανεβαίνει, καθώς και το χρονικό διάστημα κατά το οποίο κατεβαίνει.
- γ. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το αεροπλάνο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος, καθώς και το ύψος αυτό.

8. Μία ώρα μετά τη λήψη x mg ενός αντιπυρετικού, η μείωση της θερμοκρασίας ενός ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση

$$T(x) = 3x^2 - \frac{x^3}{4}, \quad 0 < x < 5$$

Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η δόση του αντιπυρετικού, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας ως προς x , να γίνει μέγιστος.

9. Η θετική αντίδραση ενός οργανισμού σ' ένα φάρμακο δίνεται από τον τύπο της συνάρτησης:

$$f(x) = x^2(a - x),$$

όπου $a > 0$ σταθερά και x η ημερήσια δόση του φαρμάκου (σε mg).

- α. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θετικής αντίδρασης του οργανισμού στο φάρμακο.
- β. Ποια είναι η ενδεδειγμένη ποσότητα δόσης του φαρμάκου, ώστε να έχουμε τη μεγαλύτερη θετική αντίδραση του οργανισμού;

10. Το κόστος $K(x)$ σε ευρώ/km σωλήνα που τροφοδοτεί με νερό ένα απομακρυσμένο χωριό δίνεται από τη συνάρτηση K με

$$K(x) = \frac{5000}{x} + 50x,$$

όπου x η διατομή του σωλήνα σε cm^2 .

Να βρείτε τη διατομή του σωλήνα για την οποία:

- α. Το κόστος είναι ελάχιστο.
- β. Την ελάχιστη τιμή κόστους ανά km.

11. Η ενέργεια που καταναλώνει ένας μικροοργανισμός που κινείται μέσα στο αίμα ενός ασθενούς με ταχύτητα v , προσεγγίζεται από τον τύπο της συνάρτησης:

$$E(v) = (v - 35)^2 + 375$$

- α. Με ποια ταχύτητα πρέπει να κινηθεί, για να καταναλώσει την ελάχιστη ενέργεια;
- β. Πόση είναι η ελάχιστη ενέργεια;

12. Έστω x, y δύο αριθμοί με σταθερό άθροισμα 10.

- α. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο τους Γ , ως συνάρτηση του x , είναι

$$\Gamma(x) = 10x - x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

- β. Να βρείτε τους αριθμούς x και y , ώστε να έχουν το μεγαλύτερο γινόμενο.

13. Έστω x, y δύο αριθμοί με σταθερό άθροισμα 2.

- α. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα S των κύβων τους, ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$S(x) = 6x^2 - 12x + 8$$

- β. Να βρείτε τους αριθμούς x, y , ώστε το άθροισμα των κύβων να είναι ελάχιστο.

14. Έστω x, y δύο θετικοί αριθμοί με σταθερό γινόμενο 100.

- α. Να αποδείξετε ότι το άθροισμά τους S , ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$S(x) = x + \frac{100}{x}$$

και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $S(x)$.

- β. Να βρείτε τους αριθμούς x και y , ώστε να έχουν το μικρότερο άθροισμα.

15. Ένα ορθογώνιο με διαστάσεις x και y έχει εμβαδόν 400 m^2 .
- Να αποδείξετε ότι η περίμετρος Π του ορθογωνίου, ως συνάρτηση του x είναι $\Pi(x) = 2\left(x + \frac{400}{x}\right)$, $x > 0$.
 - Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου, που έχει την μικρότερη περίμετρο.
16. Η περίμετρος ενός οικοπέδου, σχήματος ορθογωνίου, είναι 400 μέτρα και το μήκος του είναι x μέτρα:
- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου, ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = -x^2 + 200x$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.
 - Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο;
 - Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου.
17. Έστω ένα ορθογώνιο με περίμετρο 10cm και μήκος x cm.
- Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το εμβαδόν E του ορθογωνίου και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.
 - Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής ως προς x του εμβαδού του ορθογωνίου, όταν $x = 3 \text{ cm}$.
 - Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου.
18. Έστω ένα ορθογώνιο με περίμετρο 14 cm και μήκος x cm.
- Να αποδείξετε ότι το μήκος των διαγωνίων του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο

$$d(x) = \sqrt{2x^2 - 14x + 49}$$
 και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $d(x)$.
 - Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής ως προς x του μήκους των διαγώνων, όταν $x = 3 \text{ cm}$.
 - Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μήκους της διαγωνίου.

19. Η τιμή εισιτηρίου των αστικών λεωφορείων σε μια πόλη είναι σταθερή τα τελευταία 5 χρόνια στα 50 λεπτά. Το κόστος μεταφοράς σε λεπτά ανά επιβάτη στη διάρκεια των 5 χρόνων προσεγγίζεται από τον τύπο της συνάρτησης $f(t) = t^2 + \frac{16}{t}$ λεπτά, όπου $t \in (0, 5]$ ο χρόνος.

- Πότε το κέρδος είχε αύξηση και πότε μείωση;
- Να βρείτε τη χρονική στιγμή, κατά την οποία πραγματοποιήθηκε το μέγιστο κέρδος.
- Πόσο είναι αυτό το κέρδος;

20. Η τιμή πώλησης μιας ηλεκτρικής συσκευής είναι 500 €. Το κόστος της συναρτήσεως του χρόνου κατασκευής t (σε ώρες), προσεγγίζεται από τον τύπο της συνάρτησης:

$$K(t) = t^2 + \frac{54}{t}$$

Να βρείτε το μέγιστο δυνατό κέρδος και το χρόνο που χρειάζεται για την κατασκευή.

21. Μία βιοτεχνία έχει τη δυνατότητα να κατασκευάζει ανά έτος μέχρι και 20 μονάδες προϊόντος. Το κόστος κατασκευής (σε χιλιάδες €) x μονάδων εκφράζεται με τη συνάρτηση $K(x) = 4x^2 + 30$ και τα έσοδα από τις πωλήσεις τους (σε χιλιάδες €) με τη συνάρτηση

$$E(x) = 3x^2 + 20x$$

- Να βρείτε το κόστος κατασκευής 5 μονάδων προϊόντος.
- Να βρείτε τον τύπο $P(x)$ της συνάρτησης του κέρδους της βιοτεχνίας.
- Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του κέρδους.
- Πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να κατασκευάζει η βιοτεχνία ανά έτος, για να έχει το μέγιστο κέρδος;

B' ΟΜΑΔΑ

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\lambda x + 4\lambda$.

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το ελάχιστο της συνάρτησης f παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + \lambda^2 - 4\lambda$.

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τοπικό μέγιστο της f παίρνει την ελάχιστη τιμή του.

24. Μια βιομηχανία παράγει x μονάδες ενός προϊόντος ημερησίως και ο ρυθμός μεταβολής του κόστους παραγωγής των x μονάδων είναι

$$C'(x) = 2x^2 - 105x + 120$$

Έστω ότι το ημερήσιο κέρδος από την πώληση των x μονάδων δίνεται από τον τύπο

$$P(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 50x^2 - 1000, \text{ ευρώ με } 0 \leq x \leq 70$$

- α. Να βρείτε το ημερήσιο κόστος της βιομηχανίας χωρίς να παράγει προϊόντα.
β. Να βρείτε πόσα προϊόντα πρέπει να παράγει ημερησίως, ώστε να έχει:
i. το μέγιστο κέρδος ii. τη μέγιστη είσπραξη από την πώλησή τους.

25. Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι $K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000$ σε ευρώ, με $6 \leq x \leq 50$.

Η είσπραξη από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος είναι $420 - 2x$ σε ευρώ.

- α. Να αποδείξετε ότι το κέρδος P , από την πώληση x μονάδων προϊόντος, είναι

$$P(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 18x^2 - 180x - 1000, \quad 6 \leq x \leq 50$$

- β. Να βρείτε την ημερήσια παραγωγή x του εργοστασίου για την οποία το κέρδος είναι μέγιστο και πόσο είναι αυτό.

26. Μια βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης $\Pi(x)$ σε ευρώ κάθε μονάδας ενός προϊόντος, συναρτήσει του πλήθους x μονάδων παραγωγής, σύμφωνα με τον τύπο $\Pi(x) = 4000 - 6x$, $0 \leq x \leq 500$. Το κόστος παραγωγής μιας μονάδας είναι 400 ευρώ. Αν η βιομηχανία πληρώνει φόρο 120 ευρώ για κάθε μονάδα προϊόντος, να βρείτε πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παράγει η βιομηχανία, ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.

27. Το κόστος C της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος από μια βιομηχανία που απασχολεί v εργάτες δίνεται από τον τύπο

$$C(x) = x^3 - 9vx^2 + 5v^3 \text{ σε δεκάδες ευρώ}$$

Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι $10 - v$ δεκάδες ευρώ. Να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να παράγονται ημερησίως και από πόσους εργάτες, ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος και μέγιστο κέρδος.

28. Η θερμοκρασία (σε $^{\circ}\text{C}$) σε μία περιοχή προσεγγίζεται από τις τιμές της συνάρτησης $\theta(t) = t - 2\sqrt{7}t + 5$, όπου $t \in [0, 15]$ ο χρόνος σε ώρες.

- α. Να βρείτε τη θερμοκρασία στη περιοχή τα μεσάνυχτα.
- β. Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα που η θερμοκρασία ανεβαίνει ή κατεβαίνει.
- γ. Ποια χρονική στιγμή η περιοχή έχει την ελάχιστη θερμοκρασία και ποια είναι αυτή;

29. Έστω x, y δύο θετικοί αριθμοί με σταθερό γινόμενο 4.

- α. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων του S , δίνεται από τον τύπο

$$S(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}, \quad x > 0$$

- β. Να βρείτε τους αριθμούς x και y , ώστε να έχουν το μικρότερο άθροισμα τετραγώνων.

30. Από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 14, να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

31. Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν 400 m^2 , να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου, που έχει την μικρότερη περίμετρο.

32. Μία βιομηχανία θέλει να κατασκευάσει ένα διαφημιστικό ημερολόγιο σε ένα φύλλο χαρτιού με εμβαδόν 800 cm^2 . Τα περιθώρια αριστερά και δεξιά είναι 4 cm , ενώ πάνω και κάτω 2 cm . Να βρείτε τις διαστάσεις του φύλλου, ώστε η ωφέλιμη επιφάνεια να είναι μέγιστη.

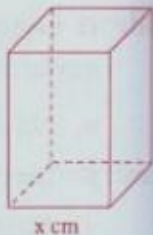
33. Ένα σύρμα μήκους 1 m κόβεται σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους $x \text{ m}$, κατασκευάζουμε κύκλο και με το άλλο τετράγωνο.

- α. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων, συναρτήσει του x .
- β. Να βρείτε την πλευρά του τετραγώνου και τη διάμετρο του κύκλου, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να είναι ελάχιστο.

34. Με ένα σύρμα μήκους 4 m κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς $x \text{ m}$ και ένα τετράγωνο πλευράς $y \text{ m}$.

- α. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών $E(x)$ των δύο σχημάτων, συναρτήσει της πλευράς x του ισοπλεύρου τριγώνου.
- β. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο;

35. Θεωρούμε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ανοικτό από πάνω με βάση τετράγωνο πλευράς x cm και όγκο 32 cm^3 .



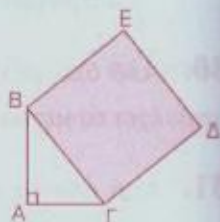
α. Να αποδείξετε ότι η συνολική επιφάνεια του κουτιού ως συνάρτηση του x είναι $f(x) = x^2 + \frac{128}{x}$, $x > 0$.

β. Να βρείτε, για ποια τιμή του x το κουτί έχει ελάχιστη επιφάνεια.

36. Μια δεξαμενή νερού έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με τις δύο έδρες του τετράγωνο πλευράς x . Το επάνω μέρος της δεξαμενής είναι ανοικτό και είναι κατασκευασμένη από λαμαρίνα εμβαδού 27 m^2 . Να βρείτε τις διαστάσεις της δεξαμενής, έτσι, ώστε αυτή να χωράει τη μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα νερού.

37. Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), $AB = x$ cm και εμβαδόν 2 cm^2 .

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του τετραγώνου $B\Gamma\Delta E$ δίνεται από τον τύπο $E(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}$.



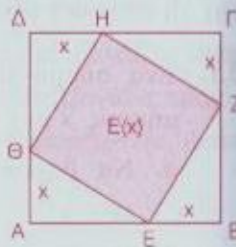
β. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τετραγώνου ως προς x , όταν $x = 2 \text{ cm}$.

γ. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του εμβαδού του τετραγώνου.

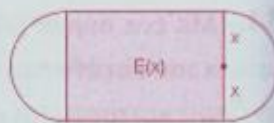
38. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2 cm . Αν το τετράγωνο $EZH\Theta$ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του $AB\Gamma\Delta$,

α. να εκφράσετε την πλευρά EZ συναρτήσει του x

β. να βρείτε το x έτσι, ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του $EZH\Theta$ να γίνει ελάχιστο.



39. Όπως γνωρίζουμε, ο στίβος του κλασικού αθλητισμού αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δύο ημικύκλια. Αν η περίμετρος του στίβου είναι 400 m , να βρείτε τις διαστάσεις του, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου μέρους να γίνει μέγιστο.



ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.
- α.** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι στο
- β.** Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (a, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (a, β) για $x = x_0$
- A2.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).
- Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Delta = (a, \beta)$.
- α.** Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .
- β.** Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f δεν έχει ακρότατα στο Δ .
- γ.** Αν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in \Delta$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β) και δεν παρουσιάζει ακρότατο στο διάστημα αυτό.
- δ.** Αν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in \Delta$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε η f έχει ακρότατα στο Δ .

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$.

- B1.** Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$ της συνάρτησης f .
- B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- B3.** Να βρείτε τις θέσεις ακροτάτων της f , το είδος τους και την τιμή τους.
- B4.** Να συγκρίνετε τις τιμές $f(123)$ και $f(124)$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ3. Να βρείτε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο $x_0 = 2$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2x^2}$, $x > 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος Π του ορθογωνίου ΜΚΟΛ ως συνάρτηση του x γράφεται

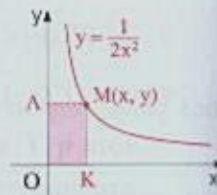
$$\Pi(x) = 2x + \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$$

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\Pi(x)$ ως προς τη μονοτονία της.

Δ3. Για ποια τιμή του x το ορθογώνιο ΜΚΟΛ έχει ελάχιστη περίμετρο;

Δ4. Έστω A , B δύο θέσεις του σημείου M με $x_A = 0,87$ και $x_B = 0,78$.

Ποιο από τα δύο ορθογώνια που σχηματίζονται έχει τη μικρότερη περίμετρο;



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -x^2 + 6x + 8$.
- α. Να υπολογίσετε την $f'(x)$.
 - β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονotonία.
 - γ. Για ποια τιμή του x η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο; Να βρείτε το είδος του ακροτάτου. Θ.Ε.
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ με $x \in \mathbb{R}$.
- α. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονotonία στο πεδίο ορισμού της.
 - β. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f . Θ.Ε.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- α. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .
 - β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2, f(2))$.
 - γ. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία (ε) του ερωτήματος β. τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
 - δ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1}$. Θ.Ε.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 - 4$, $x \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-2, 0)$.
- α. Να αποδείξετε ότι $a = 1$ και $b = 3$.
 - β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονotonία και τα ακρότατα.
 - γ. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.
 - δ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{5}}$. Θ.Ε.

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε την $f'(x)$.

β. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης f στα οποία η παράγωγος είναι 0.

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Θ.Ε.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + ax + b$, με $a, b \in \mathbb{R}$.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$, τότε:

α. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών a και b .

β. Για $a = 6$ και $b = 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ. Για $a = 6$ και $b = 1$, να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .

Θ.Ε.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 2)^2(x + a)$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι

$$f'(x) = (x - 2)(3x + 2a - 2), \quad x \in \mathbb{R}$$

β. Να βρείτε τον αριθμό a , αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 4$.

γ. Για $a = -5$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και τις τιμές των ακροτάτων.

Θ.Ε.

8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(0, f(0))$.

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x) - 12}{x + 1}$.

Θ.Ε.

9. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$.
- α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$.
 - β. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.
 - γ. Να εξετασθεί η συνάρτηση $f(x)$ ως προς τη μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατά της. Θ.Ε.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{2}\sqrt{2 - \eta\mu x}$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β. Να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζει η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(0, f(0))$ με τον άξονα $x'x$.
- γ. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = [0, \frac{\pi}{2}]$.
- δ. Αν $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, να δείξετε ότι $2\sqrt{2} \leq f(x) \leq 4$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\eta\mu x - kx + \frac{\pi}{2}$.

- α. Αν η εφαπτομένη ε στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να βρείτε το k .

Αν $k=1$, τότε:

- β. Να δείξετε ότι η παραπάνω ευθεία ε έχει εξίσωση $y = \frac{\pi}{2}$.
- γ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f' ως προς το x , όταν $x = \pi$.

- δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - \frac{\pi}{2}}{\sin^2 x}$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + ax^2 + \beta$.

- α. Αν η εφαπτομένη ε στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(2, 5)$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να βρείτε τα a και β .

Αν $a=3$ και $\beta=1$, τότε:

- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- γ. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(123)$ και $f(124)$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(0, f(0))$.

γ. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ο ρυθμός μεταβολής της f , ως προς x , είναι θετικός.

δ. Να βρείτε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$.

14. Θέλουμε να περιφράξουμε μια περιοχή 5 στρεμμάτων σχήματος ορθογωνίου με μήκος x m και να τη χωρίσουμε στη μέση. Ο φράκτης για την περιφράξη κοστίζει 8 €/m και για το χώρισμα 16 €/m.



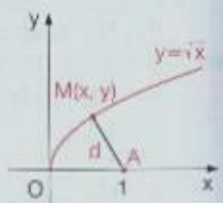
α. Να αποδείξετε ότι το κόστος σε ευρώ ως συνάρτηση του x είναι

$$f(x) = 16\left(x + \frac{10.000}{x}\right), \quad x > 0$$

β. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου, ώστε το κόστος να είναι ελάχιστο.

15. Δίνεται η καμπύλη $y = \sqrt{x}$ και το σημείο $A(1, 0)$.

α. Να αποδείξετε ότι η απόσταση d του σημείου A από ένα σημείο M της καμπύλης, ως συνάρτηση του x εκφράζεται από τον τύπο $d(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $d(x)$.

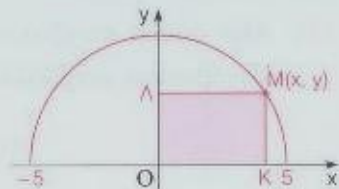


β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση d ως προς τη μονοτονία.

γ. Ποιο σημείο της καμπύλης είναι το πλησιέστερο στο A και πόσο απέχει από αυτό;

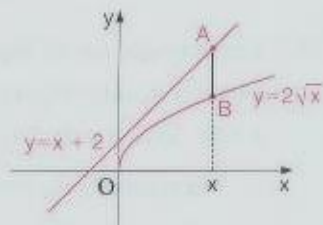
δ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(1+h) - d(1)}{h}$.

16. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, ένα σημείο της $M(x, y)$ με $x > 0$ και K, Λ οι προβολές του σημείου M στους άξονες $x'x, y'y$ αντίστοιχα.



- α. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x την περίμετρο Π και το εμβαδόν E του ορθογωνίου $MKOL$.
- β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής ως προς x της περιμέτρου Π και του εμβαδού E ως προς x , όταν $x = 3$.
- γ. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

17. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = x + 2$ και η καμπύλη C με εξίσωση $y = 2\sqrt{x}$.



- α. Να αποδείξετε ότι η κατακόρυφη απόσταση δύο σημείων της ευθείας ε και της καμπύλης C εκφράζεται από τη συνάρτηση

$$d(x) = x + 2 - 2\sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $d(x)$ ως προς τη μονοτονία της.
- γ. Για ποια τιμή του x η κατακόρυφη απόσταση δύο σημείων, της ευθείας ε και της καμπύλης C γίνεται ελάχιστη και ποια είναι η ελάχιστη τιμή της;
- δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(49+h) - 37}{h}$.

18. Το κόστος σε ευρώ ενός βιομηχανικού προϊόντος σε σχέση με το χρόνο t σε ώρες που χρειάζεται για την παραγωγή του δίνεται από τον τύπο:

$$C(t) = 10t^2$$

ενώ η τιμή πώλησης του σε ευρώ είναι

$$R(t) = 10 \left(80 - \frac{16}{t} \right), \quad \frac{1}{5} < t \leq \frac{5}{2}$$

- α. Να βρείτε το κέρδος P από την πώληση ενός προϊόντος ως συνάρτηση του χρόνου που χρειάζεται για την παραγωγή του.
- β. Πότε το κέρδος είχε μείωση;
- γ. Να βρείτε το μέγιστο δυνατό κέρδος.

19. Μία ομάδα περιβαλλοντολόγων εκτιμά ότι το βάρος B (B σε τόνους) ενός παγόβουνου μεταβάλλεται με τον χρόνο t (t σε έτη) σύμφωνα με τη συνάρτηση:

$$B(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 12t + 15, \quad 0 \leq t \leq 10$$

- α. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου.
 β. Ποια χρονική στιγμή το βάρος του παγόβουνου γίνεται μέγιστο;
 γ. Να αποδείξετε ότι, αν $t \in [6, 9]$, τότε ισχύει:

$$B(9) \leq B(t) \leq B(6)$$

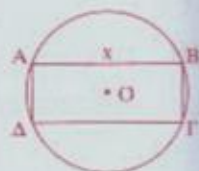
- δ. Ποια χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου γίνεται μέγιστος; Θ.Ε.

20. Υποθέτουμε ότι οι θερμοκρασίες (σε $^{\circ}\text{C}$) σε μια περιοχή κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου προσεγγίζονται από τις τιμές της συνάρτησης $\theta(t) = t - 4\sqrt{t} + a$, όπου $a \in \mathbb{R}$ και $t \in (0, 24]$ ο χρόνος σε ώρες.

- α. Να αποδείξετε, ότι για $t \in (0, 4]$ η θερμοκρασία μειώνεται και για $t \in (4, 24]$ η θερμοκρασία αυξάνεται.
 β. Να υπολογίσετε την τιμή του a , αν γνωρίζετε ότι η ελάχιστη θερμοκρασία της περιοχής εντός του 24ώρου είναι -1°C .
 γ. Για $a = 3$ να βρείτε τις ώρες που η θερμοκρασία της περιοχής είναι 0°C .

- δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{t \rightarrow 4} \frac{\theta'(t)}{t^2 - 16}$. Θ.Ε.

21. Δίνεται κύκλος (O, ρ) με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 5$ και ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτόν με πλευρά $AB = x$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



- α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}, \quad 0 < x < 10$$

- β. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ γίνεται μέγιστο. Για την τιμή αυτή του x , δείξτε ότι το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο.

- γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x}$. Θ.Ε.