

## Ιστόγραμμα - Πολύγωνο συχνοτήτων

1. Τα βάρη (σε κιλά) 40 μαθητών της Γ' Λυκείου φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Κλάσεις	$x_i$	$v_i$	$f_i$	$F_i$
[50, 56)		4		
[56, 62)		6		
[62, 68)		12		
[68, 74)		10		
[74, 80)		6		
[80, 86)		2		
<b>Σύνολο</b>				

- Να συμπληρώσετε τον πίνακα.
- Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο:
  - σχετικών συχνοτήτων
  - αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

2. Οι μέγιστες θερμοκρασίες (σε βαθμούς Κελσίου) σε μία πόλη, για 20 συνεχόμενες ημέρες, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

5	8	11	9	12	13	11	13	13	15	14	16	19	18	16	18	21	24	18	19
---	---	----	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- Να ομαδοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους και να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής  $v_i$ ,  $f_i$ ,  $N_i$  και  $F_i$ .
- Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο
  - συχνοτήτων
  - αθροιστικών συχνοτήτων.

3. Τα βάρη (σε κιλά) 40 μαθητών της Γ' Λυκείου φαίνονται στο παρακάτω πίνακα.

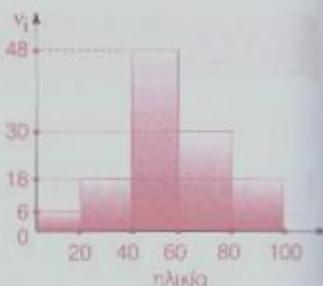
56	64	50	68	63	73	65	75	52	68	79	58	63	69	65	60	70	67	74	59
67	74	72	57	63	51	78	64	83	69	64	69	[85]	61	76	71	55	71	62	63

- Να ομαδοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα σε 6 κλάσεις ίσου πλάτους και να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής  $v_i$ ,  $f_i$  και  $F_i$ .
- Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο
  - σχετικών συχνοτήτων
  - αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

4. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων στο οποίο φαίνονται οι ηλικίες των ατόμων σε ένα χωριό.

α. Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων και να βρείτε πόσοι είναι οι κάτοικοι στο χωριό.

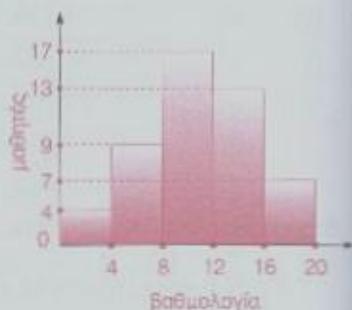
β. Να κατασκευάσετε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.



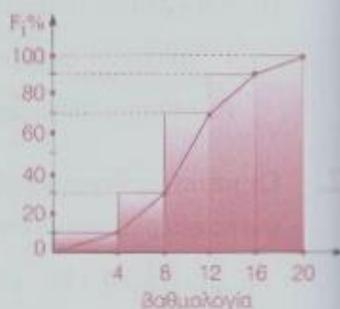
5. Στο διπλανό σχήμα είναι το ιστόγραμμα συχνοτήτων της βαθμολογίας των μαθητών της Α' Λυκείου σε ένα διαγώνισμα.

α. Πόσοι είναι οι μαθητές;

β. Να κάνετε το πολύγωνο συχνοτήτων.



6. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων της βαθμολογίας των ογδόντα μαθητών της Α' Λυκείου σε ένα διαγώνισμα Ιστορίας. Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων  $\nu_i$ ,  $f_i$ , και στη συνέχεια το πολύγωνο συχνοτήτων.



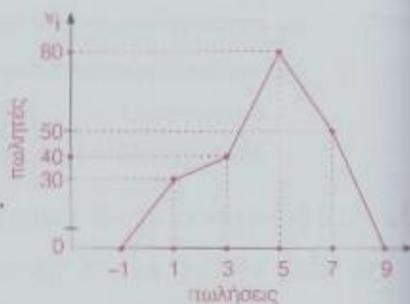
7. Στο διπλανό σχήμα είναι το πολύγωνο συχνοτήτων των ομαδοποιημένων πωλήσεων σε δεκάδες χιλιάδες ευρώ, που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά την διάρκεια ενός έτους.

α. Πόσοι είναι οι πωλητές;

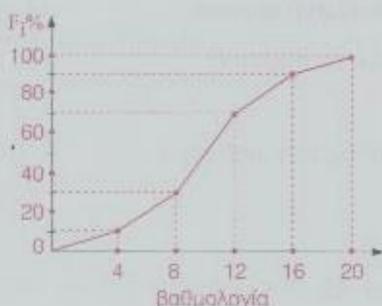
β. Να κατασκευάσετε:

i. τον πίνακα συχνοτήτων

ii. το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων  $F_i\%$ .

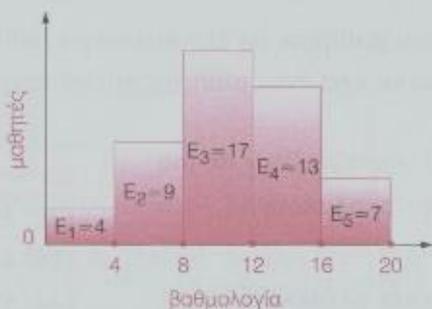


8. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων της βαθμολογίας των ογδόντα μαθητών της Α' Λυκείου σε ένα διαγώνισμα Ιστορίας. Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων  $n_i$ ,  $f_i$ , και στη συνέχεια το πολύγωνο συχνοτήτων.



9. Στο παρακάτω σχήμα είναι το ιστόγραμμα συχνοτήτων της βαθμολογίας των μαθητών της Α' Λυκείου σε ένα διαγώνισμα. Μέσα σε κάθε ορθογώνιο που έχει βάση ίση με τη μονάδα, φαίνεται το εμβαδόν του.

- α. Πόσοι είναι οι μαθητές;  
β. Να κάνετε το πολύγωνο συχνοτήτων.



### Εύρεση πλάτους κλάσεων

10. Να βρείτε το κοινό πλάτος  $c$  των κλάσεων σε καθέναν από τους παρακάτω πίνακες:

α.

Κλάσεις	$x_i$
$[0, )$	
$[ , )$	
$[ , )$	
$[ , )$	14
$[ , )$	

β.

Κλάσεις	$x_i$
$[4, )$	
$[ , )$	13
$[ , )$	
$[ , )$	
$[ , )$	

γ.

Κλάσεις	$x_i$
5 - ...	
... - ...	
... - 23	
... - ...	

11. Η βαθμολογία 80 μαθητών της Γ' Λυκείου σε ένα διαγωνισμό μαθηματικών φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

Κλάσεις	$n_i$	$f_i$	$f_i\%$
[0, 4)	8		
[4, 8)	16		
[8, 12)	32		
[12, 16)	20		
[16, 20)	4		
<b>Σύνολο</b>			

- α. Να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα.
- β. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών που πήρε βαθμό:
- τουλάχιστον 8
  - μικρότερο από 12
  - τουλάχιστον 14
  - τουλάχιστον 12 και λιγότερο από 18.
- γ. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που πήρε βαθμό:
- τουλάχιστον 12
  - μικρότερο από 10
  - τουλάχιστον 14.
- δ. Αν στο 5% των μαθητών με την καλύτερη βαθμολογία δοθεί έπαινος, τότε τι βαθμό πρέπει να έχει ένας μαθητής για να πάρει έπαινο;

12. Οι ηλικίες των 80 εργαζομένων σε μια επιχείρηση έχουν ομαδοποιηθεί στο διπλανό πίνακα.

Κλάσεις	$n_i$	$f_i$	$f_i\%$
[28, 36)			10
[36, 44)			30
[44, 52)			40
[52, 60)			20
<b>Σύνολο</b>			

- α. Να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα.
- β. Να βρείτε το πλήθος των εργαζομένων που έχει ηλικία:
- μικρότερη από 46
  - τουλάχιστον 40
- γ. Να βρείτε το ποσοστό των εργαζομένων που έχει ηλικία μικρότερη από 54 και μεγαλύτερη ή ίση από 38.
- δ. Αν οι 20 εργαζόμενοι με την μικρότερη ηλικία συμμετέχουν σε ένα σεμινάριο, τι ηλικία πρέπει να έχουν;
- ε. Αν το 25% των εργαζομένων με τη μεγαλύτερη ηλικία διοργανώσουν μια εκδρομή, τι ηλικία πρέπει να έχουν;

13. Οι πωλήσεις σε χιλιάδες ευρώ από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους ομαδοποιήθηκαν σε 4 κλάσεις, όπως φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

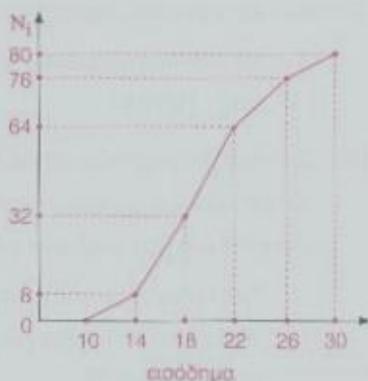
- Να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα.
- Να βρείτε το πλήθος των πωλητών που έκανε πωλήσεις:

Κλάσεις	$N_i$	$F_i\%$
[10, 13)	6	
[13, 16)	18	
[16, 19)	36	
[19, 22)	40	
<b>Σύνολο</b>		

- κάτω από 14.000 ευρώ
  - τουλάχιστον 17.000 ευρώ
- Να βρείτε το ποσοστό των πωλητών που έκανε πωλήσεις κάτω από 14.000 ευρώ.
  - Να βρείτε μέχρι πόσες πωλήσεις έκανε το 60% των πωλητών με τις λιγότερες πωλήσεις.

14. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων που παρουσιάζει το ετήσιο εισόδημα σε χιλιάδες ευρώ μιας ομάδας οικογενειών. Να βρείτε:

- πόσες οικογένειες έχουν εισόδημα
  - κάτω από 16.000 ευρώ
  - τουλάχιστον 19.000 ευρώ.
- το εισόδημα κάτω από το οποίο έχουν 40 οικογένειες.

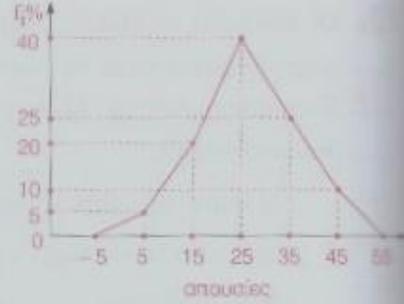


15. Οι χρόνοι (σε min) που έκαναν να λύσουν οι μαθητές μιας τάξης ένα πρόβλημα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στο διπλανό πίνακα.

- Να βρείτε τις σχετικές συχνότητες  $f_i\%$ ,  $i=1, 2, 3, 4$ .
- Αν το 60% των μαθητών έκαναν λιγότερο από 16 min, να λύσουν το πρόβλημα, να βρείτε το πλάτος των κλάσεων  $c$  και το μικρότερο χρόνο  $a$  που έκαναν να λύσουν το πρόβλημα.

Χρόνοι (min)	$f_i\%$
[ , )	$2x$
[ , 13)	$4x$
[ , )	$x^2 + 15$
[ , )	$6x$
<b>Σύνολο</b>	

16. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων που παρουσιάζει τις απουσίες (ομαδοποιημένες) των μαθητών της Γ' Λυκείου.



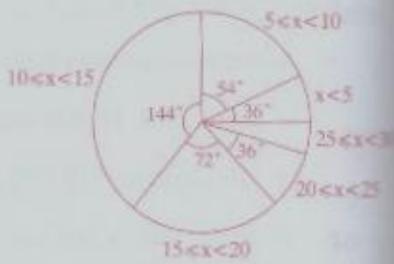
- α. Να κάνετε τον πίνακα σχετικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων %.
- β. Να βρείτε τις απουσίες κάτω από τις οποίες έκανε το 33% των μαθητών.
- γ. Το ποσοστό  $p$  των μαθητών που έκανε τουλάχιστον 38 απουσίες.

17. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι μισθοί 200 εργαζομένων σε μια βιομηχανία, αλλά σβήστηκε κατά λάθος το ορθογώνιο της κλάσης [8, 12]. Αν είναι γνωστό ότι δεν υπάρχει μισθός άνω των 2.000 €,



- α. να κατασκευάσετε το ορθογώνιο αυτό
- β. πόσοι εργαζόμενοι έχουν μισθό πάνω από 1000 €;

18. Σε μια βιομηχανία εργάζονται 300 άτομα. Ο συνολικός χρόνος εργασίας τους σε έτη δίνεται από το διπλανό κυκλικό διάγραμμα.



- α. Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων και το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων %.
- β. Πόσοι συνολικά υπάλληλοι αναμένονται να συνταξιοδοτηθούν (συμπληρώνοντας 30-ετία) μέσα στα επόμενα
  - i. 5 χρόνια
  - ii. 7 χρόνια
  - iii. 13 χρόνια

19. Ένα δείγμα παρατηρήσεων το έχουμε ομαδοποιήσει όπως φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

Κλάση
[4, 8)
[8, 12)
[12, 16)
[16, 20)

- Η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της δεύτερης κλάσης.
- Η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι τριπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης.
- Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 13 είναι 40.

Να βρείτε τις σχετικές συχνότητες  $f_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

20. Η βαθμολογία των μαθητών ενός τμήματος σε ένα διαγώνισμα φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

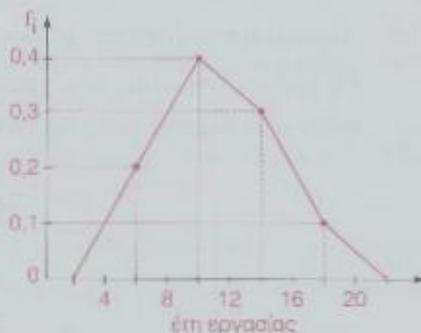
Κλάσεις	$x_i$	$v_i$	$N_i$	$f_i\%$	$F_i\%$
$[0, )$					10
$[ , )$			12		
$[ , )$	10			30	
$[ , )$					80
$[ , )$			40		
<b>Σύνολο</b>					

- Να αποδείξετε ότι το πλάτος των κλάσεων είναι 4.
- Να συμπληρώσετε τον πίνακα.
- Να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων που έχουν τιμές:
  - το πολύ 16
  - τουλάχιστον 12.
- Στο 10% των μαθητών με την καλύτερη βαθμολογία πρόκειται να δοθεί έπαινος. Από ποιο βαθμό και πάνω πρέπει να έχει γράψει κάποιος μαθητής για να πάρει έπαινο;

21. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων  $f_i$  που αφορούν τα έτη εργασίας 50 εκπαιδευτικών.

α. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Κλάσεις	$x_i$	$v_i$	$f_i$	$N_i$	$F_i$	$a_i$
$[ , )$						
$[ , )$						
$[ , )$						
$[ , )$						
<b>Σύνολο</b>						



- Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν συμπληρώσει:
  - τουλάχιστον 10 έτη εργασίας;
  - το πολύ 11 έτη εργασίας;
- Ποιο είναι το ποσοστό των εκπαιδευτικών που έχουν συμπληρώσει εργασία λιγότερη από 9 έτη εργασίας;
- Πόσο είναι το εμβαδόν το χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα;

22. Οι χρόνοι ομιλίας (σε min) στο τηλέφωνο κατά τη διάρκεια μιας ημέρας των μαθητών της Γ' τάξης φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Κλάσεις	$x_i$	$v_i$	$f_i\%$	$N_i$	$F_i\%$	$a_i$
[ , )		5				$36^\circ$
[ , )				15		
[ , )	10				70	
[12, )		10				
[ , )						
<b>Σύνολο</b>		50				

- Πόσοι μαθητές έχουν μιλήσει στο τηλέφωνο τουλάχιστον 8 min;
- Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχουν μιλήσει στο τηλέφωνο λιγότερο από 14 min.
- Πόσοι μαθητές έχουν μιλήσει στο τηλέφωνο τουλάχιστον 9 λεπτά;
- Πόσο είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα;

### ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

23. Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = x - 2\sqrt{x}$ .

Οι χρόνοι (σε min) που χρειάστηκαν οι μαθητές της Γ' τάξης για να απαντήσουν στα θέματα ενός διαγωνίσματος φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Χρόνος	$x_i$	$v_i$	$f_i\%$	$N_i$	$F_i\%$	$a_i$
[ , )			$10a$			
[ , )	12			15		$72^\circ$
[ , )					80	
[ , )						
<b>Σύνολο</b>						

Δίνεται επιπλέον ότι:

- Το πλάτος των κλάσεων  $c$  είναι ίσο με το  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{16f(x)}{x-4}$ .

- Το  $a$  είναι ίσο με τη θέση του ελάχιστου της  $g$ .

- Να υπολογίσετε το  $c$  και το  $a$ .

Αν  $c=8$  και  $a=1$ , τότε:

- Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.
- Να βρείτε πόσοι μαθητές χρειάστηκαν το πολύ 12 min;
- Να βρείτε το μέτρο του τόξου του κυκλικού διαγράμματος που αντιστοιχεί στους μαθητές που έκαναν χρόνο τουλάχιστον 20 min.

24. Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 16}, \quad x > 0$$

και ο πίνακας συχνοτήτων που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

- Να βρείτε τις θέσεις ακρότατων της συνάρτησης  $g$ .
- Να βρείτε την τιμή του  $\kappa$  για την οποία η  $f_i$  γίνεται μέγιστη.
- Για  $\kappa = 4$ , να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Κλάσεις	$x_i$	$v_i$	$f_i\%$	$F_i$
[0, 2)		$\kappa$		
[2, 4)		$\kappa + 7$		
[4, 6)		$\kappa^2$		
[6, 8)		9		
Σύν.				

25. Στα σχολεία ενός Δήμου υπηρετούν συνολικά 100 εκπαιδευτικοί. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των εκπαιδευτικών δίνεται από το διπλανό πίνακα:

- Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν, τουλάχιστον, 15 χρόνια υπηρεσίας;
- Με την προϋπόθεση ότι κάθε εκπαιδευτικός θα συνταξιοδοτηθεί, όταν συμπληρώσει 35 χρόνια:
  - πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν μέσα στα επόμενα 12,5 χρόνια; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
  - πόσοι συνολικά εκπαιδευτικοί πρέπει να προσληφθούν μέσα στα επόμενα πέντε χρόνια, ώστε ο αριθμός των εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία του Δήμου να παραμείνει ο ίδιος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. Θ.Ε.

Χρόνια υπηρεσίας   - )	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
0 - 5	10
5 - 10	15
10 - 15	12
15 - 20	15
20 - 25	18
25 - 30	18
30 - 35	12

### ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

26. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

Αν έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα ενός δείγματος σε κλάσεις ίσου πλάτους  $c$  που το θεωρούμε ως μονάδα μέτρησης, τότε:

- το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος,
- το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με 1,
- το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων (%) και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με 1.

α.	
β.	
γ.	

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_k$  οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους  $n$ ,  $k \leq n$ .

- α.** Τι είναι η (απόλυτη) συχνότητα  $v_i$  και τι η σχετική συχνότητα  $f_i$  της τιμής  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .
- β.** Να αποδείξετε ότι:
  - i.**  $0 \leq f_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$
  - ii.**  $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$

**A2.** Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

- α.** Η ..... εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής  $x_i$ .
- β.** Το ..... χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής. Στην περίπτωση που έχουμε μια ποσοτική μεταβλητή, χρησιμοποιούμε το διάγραμμα .....
- γ.** Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το ..... του .....

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- α.** Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων των τιμών μιας μεταβλητής  $X$  είναι ίσον με 1.
- β.** Σε ένα κυκλικό διάγραμμα είναι  $\alpha_i = v_i \frac{360^\circ}{v}$ , για  $i = 1, 2, \dots, k$ .
- γ.** Αν έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα ενός δείγματος σε κλάσεις ίσου πλάτους  $c$  που το θεωρούμε ως μονάδα μέτρησης, τότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

