

**CV - Συντελεστής μεταβολής**

1. Η μέση ελάχιστη θερμοκρασία σε μια πόλη τον Ιανουάριο ήταν  $-4^{\circ}\text{C}$  και η διασπορά 4. Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής.

2. Οι παρατηρήσεις ενός δείγματος μιας μεταβλητής  $X$  είναι:

17, 19, 20, 21, 23

- Να βρείτε τη μέση τιμή.
- Να βρείτε την τυπική απόκλιση.
- Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής  $CV$  του δείγματος.
- Να εξετάσετε, αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

3. Οι παρατηρήσεις ενός δείγματος μιας μεταβλητής  $X$  είναι:

6, 10, 12, 14, 18

- Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής του δείγματος.
- Να εξετάσετε, αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

4. Δίνεται ο διπλανός πίνακας μιας κατανομής. Να βρείτε:

- τη μέση τιμή,
- την τυπική απόκλιση,
- το συντελεστή μεταβολής.

$x_i$	$v_i$
0	2
1	3
2	8
3	7

(Δίνεται  $\sqrt{0,9} = 0,95$ ).

5. Δίνεται ο διπλανός πίνακας μιας κατανομής. Να βρείτε:

- τη μέση τιμή,
- την τυπική απόκλιση,
- το συντελεστή μεταβολής και να εξετάσετε, αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Κλάσεις	$v_i$
$[-2, 2)$	8
$[2, 6)$	3
$[6, 10)$	5
$[10, 14)$	4

(Δίνεται  $\sqrt{22,2} = 4,7$ ).

6. Δίνεται ο διπλανός πίνακας μιας κατανομής. Να βρείτε:

$x_i$	$v_i$
5	4
6	5
7	10
8	1

α. τη μέση τιμή,

β. την τυπική απόκλιση,

γ. το συντελεστή μεταβολής.

$$\text{Δίνεται ότι } s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right\} \text{ και } \sqrt{0,74} \approx 0,86 .$$

7. Ο συντελεστής μεταβολής CV ενός δείγματος με μεταβλητή X είναι  $CV = 15\%$  και η μέση τιμή  $\bar{x} = -4$ . Να βρείτε την τυπική απόκλιση.

8. Αν ένα δείγμα έχει διασπορά 4 και συντελεστή μεταβλητότητας 20%, να βρείτε τη μέση τιμή του δείγματος.

9. Η μέση ελάχιστη θερμοκρασία σε μια πόλη A τον Ιανουάριο ήταν  $8^\circ\text{C}$  και η τυπική απόκλιση 1, ενώ σε μία πόλη B η μέση ελάχιστη θερμοκρασία ήταν  $-4^\circ\text{C}$  και η διασπορά 4.

Να βρείτε, ποιο από τα δύο δείγματα έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια.

10. Έστω δύο δείγματα τιμών A και B μιας μεταβλητής X. Το A έχει μέση τιμή 30 και διασπορά 8. Το B έχει μέση τιμή -5 και διασπορά 2.

Να βρείτε ποιο από τα δύο δείγματα έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια.

11. Οι παρατηρήσεις ενός δείγματος μιας μεταβλητής X, έχουν μέση τιμή  $\bar{x} = 5$  και τυπική απόκλιση s, για την οποία ισχύει η σχέση

$$2s^2 - 3s + 1 = 0$$

Να βρείτε την τιμή του s, για την οποία το δείγμα είναι ομοιογενές.

12. Έστω ότι ένα σύνολο παρατηρήσεων  $x_i$  έχει μέση τιμή  $\bar{x} = 3$  και τυπική απόκλιση  $s_x = 2$ . Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

	$y_i = x_i + 1$	$y_i = -2x_i$	$y_i = -2x_i + 1$
$\bar{y}$			
$s_y$			
$CV_y$			

13. Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  οι παρατηρήσεις ενός δείγματος που έχουν μέση τιμή 15 και διασπορά 1. Να βρείτε το συντελεστή μεταβλητότητας των παρατηρήσεων  $y_1, y_2, \dots, y_{10}$  που προκύπτουν από τις  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ , αφού:

- προσθέσουμε σε καθεμιά το 1
- πολλαπλασιάσουμε καθεμιά με το  $-2$ .

14. Οι παρατηρήσεις ενός δείγματος μιας μεταβλητής  $X$  είναι:

$$3, 5, 6, 7, 9$$

- Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος.
- Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση, αν καθεμιά από τις παρατηρήσεις του δείγματος:
  - αυξηθεί κατά 4 μονάδες
  - πολλαπλασιαστεί με το 5.

15. Οι παρατηρήσεις ενός δείγματος μιας μεταβλητής  $X$  είναι:

$$9, 13, 15, 17, 21$$

- Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος.
- Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση, αν καθεμιά από τις παρατηρήσεις του δείγματος:
  - ελαττωθεί κατά 3 μονάδες
  - πολλαπλασιαστεί με το  $-2$ .

16. Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_n$  οι παρατηρήσεις ενός δείγματος που έχουν μέση τιμή 3 και διασπορά 4. Να βρείτε τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβλητότητας των παρατηρήσεων  $y_1, y_2, \dots, y_n$  που προκύπτουν από τις  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , αφού:
- αυξήσουμε καθεμιά κατά 10%
  - ελαττώσουμε καθεμιά κατά 20% και μετά προσθέσουμε σε καθεμιά το 1,6.
17. Έστω η ευθεία  $\varepsilon: y = -3x + 2$  και τα σημεία της  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_9$  με τετμημένες  $x_1, x_2, \dots, x_9$  που έχουν μέση τιμή  $-8$  και τυπική απόκλιση 2. Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής των τεταγμένων των σημείων:  $A_1, A_2, \dots, A_9$ .
18. Μια τάξη έχει μέση τιμή ηλικίας των μαθητών 14 χρόνια και τυπική απόκλιση 3 μήνες. Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της ηλικίας των μαθητών, ύστερα από 3 χρόνια.
19. Μια τάξη σήμερα έχει μέση τιμή ηλικίας των μαθητών 14 χρόνια και τυπική απόκλιση 3 μήνες. Να εξετάσετε, αν πριν από 4 χρόνια το δείγμα των ηλικιών ήταν ομοιογενές.
20. Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_n$  οι παρατηρήσεις ενός δείγματος που έχουν μέση τιμή και διακύμανση 4. Να βρείτε πόσο πρέπει να αυξήσουμε καθεμιά από τις παρατηρήσεις τουλάχιστον, ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.

## B' ΟΜΑΔΑ

21. Ένα σύρμα μήκους  $l = 40$  cm κόβεται σε δέκα κομμάτια με μήκη  $l_1, l_2, \dots, l_{10}$ . Αν  $\sum_{i=1}^{10} (l_i - 4)^2 = 90$ , να βρείτε το συντελεστή μεταβολής των  $l_1, l_2, \dots, l_{10}$ .
22. Οι παρατηρήσεις  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ενός δείγματος μεγέθους  $n$ , έχουν μέση τιμή  $\bar{x} = -8$  και συντελεστή μεταβλητότητας  $CV = 25\%$ . Αν  $\sum_{i=1}^n (x_i + 8)^2 = 40$ , να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

23. Έστω ότι η μέση τιμή ενός δείγματος πέντε παρατηρήσεων  $x_1, x_2, \dots, x_5$  είναι  $-2$ ,  $\sum_{i=1}^4 (x_i + 2)^2 = 10$  και  $x_5 = 1$ . Να δείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.
24. Οι ηλικίες μιας ομάδας φοιτητών έχουν σήμερα συντελεστή μεταβολής  $\frac{1}{9}$ . Οι αντίστοιχες ηλικίες πριν από δύο χρόνια είχαν συντελεστή μεταβολής  $\frac{1}{8}$ .
- Να βρείτε τη μέση ηλικία  $\bar{y}$  και την τυπική απόκλιση  $s_y$  των σημερινών ηλικιών των φοιτητών.
  - Μετά από πόσα χρόνια τουλάχιστον, το δείγμα των ηλικιών θα είναι ομοιογενές;
25. Σε ένα εργοστάσιο σε ένα δείγμα εργαζομένων στο τμήμα Α έχουν μέσο (μηνιαίο) μισθό 950 € και τυπική απόκλιση 100 €, ενώ στο τμήμα Β έχουν μέσο (μηνιαίο) μισθό 1.080 € και τυπική απόκλιση 120 €. Έστω ότι οι εργαζόμενοι πάρουν αύξηση στο τμήμα Α, 50 € και στο τμήμα Β, 5% (μηνιαίως). Στους νέους μισθούς να εξετάσετε ποιο από τα δύο δείγματα μισθών:
- έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια,
  - είναι ομοιογενές.
26. Η μέση τιμή και ο συντελεστής μεταβολής των 10 τιμών ενός δείγματος είναι  $\bar{x} = 80$  και  $CV = 25\%$ , αντίστοιχα. Εάν, για τις εννέα τιμές ισχύει  $\sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 = 3975$ , να βρείτε:
- τη δέκατη τιμή
  - πόσες μονάδες τουλάχιστον, πρέπει να αυξηθούν οι τιμές του δείγματος, ώστε να γίνει ομοιογενές;
27. Αν  $\bar{x}$  και  $s$  είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των  $n$  παρατηρήσεων  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , να αποδείξετε ότι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων  $\frac{x_1 - \bar{x}}{s}, \frac{x_2 - \bar{x}}{s}, \dots, \frac{x_n - \bar{x}}{s}$  είναι 0 και 1, αντίστοιχα.

28. Έστω  $\bar{x} > 0$  και  $s > 0$  η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Αν  $y_i = \frac{3\bar{x} - 2x_i}{s}$  οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $Y$ , να αποδείξετε ότι:

i.  $\bar{y} = \frac{1}{CV_x}$

ii.  $CV_y = 2CV_x$

29. Έστω  $CV$  ο συντελεστής μεταβολής των αριθμών 2, 1, 4, 0, 3 και  $CV'$  ο συντελεστής μεταβολής που προκύπτει, όταν προσθέσουμε σε καθέναν από τους αριθμούς αυτούς το  $c$ , όπου  $c \neq -2$ . Να υπολογίσετε το  $c$ , έτσι ώστε  $CV' = 3CV$ .

## ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

30. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 2x - 1$$

α. Να βρείτε τις παραγώγους  $f'(x)$  και  $f''(x)$ .

β. Θεωρούμε τα σημεία  $A_1(x_1, y_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2)$ ,  $A_3(x_3, y_3)$ ,  $A_4(x_4, y_4)$  που ανήκουν στη γραφική παράσταση της  $y = f''(x)$ . Αν η μέση τιμή των τεταγμένων  $x_1, x_2, x_3, x_4$  των σημείων είναι  $\bar{x} = f''\left(\frac{1}{2}\right)$  και η τυπική απόκλιση  $s = f''(2)$ , να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των τεταγμένων  $y_1, y_2, y_3, y_4$  των σημείων αυτών.

31. Ένα προϊόν πωλείται σε 10 διαφορετικά καταστήματα στις παρακάτω τιμές, σε ευρώ:

$$6, 8, 11, 11, 13, 14, 16, 12, 12, 7$$

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

β. Να υπολογίσετε το εύρος, την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής.

γ. Αν οι τιμές του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα υποστούν έκπτωση 10%, να εξετάσετε αν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής.

32. Είκοσι παρατηρήσεις τις έχουμε ομαδοποιήσει όπως φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

Κλάσεις	$x_i$	$v_i$
$[-1, 1)$		$\alpha$
$[1, 3)$		4
$[3, 5)$		$\beta$
$[5, 7)$		4
<b>Σύνολο</b>		

Αν  $\bar{x} = 3$ , τότε:

- α. να υπολογίσετε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$
- β. να βρείτε τη διακύμανση των παρατηρήσεων
- γ. να εξετάσετε, αν το δείγμα είναι ομοιογενές.  
(Δίνεται  $\sqrt{4,6} = 2,1$ ).

33. Οι ελάχιστες θερμοκρασίες σε έξι πόλεις μια ημέρα είναι:

8, 10, 7, 11, 5, 7

- α. Να υπολογίσετε το εύρος  $R$ , τη διάμεσο  $\delta$ , τη μέση τιμή  $\bar{x}$  και τη διακύμανση  $s^2$ .
- β. Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παραπάνω παρατηρήσεων δεν είναι ομοιογενές.
- γ. Να βρείτε τον μικρότερο θετικό αριθμό τον οποίο πρέπει να προσθέσουμε σε κάθε μια από τις παραπάνω παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα που θα προκύψει να είναι ομοιογενές.

34. Οι τιμές ενός δείγματος είναι 10, 8,  $\kappa$ , 13, 10, 11, όπου  $\kappa > 0$ . Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι  $CV = 20\%$  και η διακύμανση του είναι  $s^2 = 4$ .

- α. Να υπολογίσετε την μέση τιμή  $\bar{x}$  του δείγματος.
- β. Αν  $\bar{x} = 10$ , να υπολογίσετε την τιμή του  $\kappa$ .
- γ. Αν  $\kappa = 8$ , να υπολογίσετε τη διάμεσο  $\delta$  και το εύρος  $R$  του δείγματος.
- δ. Αν από κάθε τιμή του δείγματος αφαιρεθεί ο αριθμός 2, να εξετάσετε αν το δείγμα των νέων τιμών είναι ομοιογενές.

35. Ένα προϊόν πωλείται σε 10 διαφορετικά καταστήματα στις παρακάτω τιμές, σε ευρώ:

8, 10, 13, 13, 15, 16, 18, 14, 14, 9

- α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.
- β. Να υπολογίσετε το εύρος, την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής.
- γ. Αν οι τιμές του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα υποστούν έκπτωση 10%, να εξετάσετε αν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής.

36. Να αντιστοιχίσετε κάθε μέτρο που βρίσκεται στη γραμμή Α, με την αντίστοιχη παράσταση της γραμμής Β.

Γραμμή Α	Α. Μέση τιμή	Β. Σταθμικός μέσος	Γ. Διακύμανση	Δ. Τυπική απόκλιση	Ε. Συντελεστής μεταβολής
Γραμμή Β	1. $\sqrt{s^2}$	2. $\frac{s}{ \bar{x} }$	3. $\frac{\sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})^2}{v}$	4. $\frac{\sum_{i=1}^v x_i w_i}{\sum_{i=1}^v w_i}$	5. $\frac{1}{v} \sum_{i=1}^v t_i$

Α.	Β.	Γ.	Δ.	Ε.

37. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- α. Ο συντελεστής μεταβολής είναι ένα μέτρο σχετικής διασποράς.
- β. Αν σε δύο δείγματα Α και Β έχουμε  $CV_A < CV_B$ , τότε το Α έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια από το Β.
- γ. Αν ένα δείγμα έχει  $CV > 10\%$ , τότε είναι ομοιογενές.
- δ. Αν  $y_i = a \cdot x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, v$ , τότε  $s_y = a \cdot s_x$ .
- ε. Ο συντελεστής μεταβολής δεν είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης.
- στ. Αν ένα δείγμα έχει  $CV = 0,1$ , τότε είναι ομοιογενές.

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.