

## Κανονική Κατανομή

1. Οι βαθμοί που έγραψαν οι μαθητές μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα είναι πάνω από 4, έχουν μέσο όρο 12 και τυπική απόκλιση 2. Υποθέτοντας ότι έχουμε περίπου κανονική κατανομή, να βρείτε κατά προσέγγιση, το ποσοστό των μαθητών που έχει βαθμό:
 

α. κάτω από 10	β. πάνω από 16
γ. από 8 έως 14	δ. το πολύ 8
ε. τουλάχιστον 10.	
  
2. Η μέση τιμή μιας κανονικής κατανομής είναι 20 και η τυπική απόκλιση 4. Ποιο ποσοστό των παρατηρήσεων είναι:
 

α. πάνω από 28	β. κάτω από 16
γ. μεταξύ 16 και 28	δ. τουλάχιστον 12
ε. το πολύ 12 ή τουλάχιστον 24.	
  
3. Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $X$  ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή. Αν το 16% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες ή ίσες του 10 και το 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες του 12, τότε:
  - α. Να βρείτε τη μέση και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.
  - β. Να βρείτε το εύρος και τη διάμεσο των παρατηρήσεων.
  - γ. Να εξετάσετε, αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
  
4. Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $X$  ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή. Αν το 2,5% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες του 30 και η διάμεσος είναι 20, να βρείτε:
  - α. τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων
  - β. το ποσοστό των παρατηρήσεων από 5 έως 25.

5. Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $X$  ενός δείγματος μεγέθους 800 ακολουθούν την κανονική κατανομή. Το εύρος των παρατηρήσεων είναι 36 και το 16% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες του 36 .
- Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος.
  - Να εξετάσετε, αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.
  - Να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι τουλάχιστον 36 .
6. Η βαθμολογία 200 μαθητών σε ένα διαγώνισμα είναι περίπου κανονική. Εκατό μαθητές έχουν βαθμό, το πολύ, 12 και το 16% των μαθητών τουλάχιστον, 14.
- Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.
  - Να βρείτε πόσοι μαθητές έχουν βαθμό από 8 έως 16 .
  - Να εξετάσετε, αν το δείγμα των βαθμών είναι ομοιογενές.

### B' ΟΜΑΔΑ

7. Οι ηλικίες των εργαζομένων σε μία βιοτεχνία ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή. Το 50% των εργαζομένων είναι το πολύ 35 ετών και το 16% έχουν ηλικία μικρότερη των 30 ετών.
- Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των ηλικιών είναι  $\bar{x} = 35$  και η τυπική απόκλιση  $s = 5$  .
- Εάν οι εργαζόμενοι είναι 200 , να βρείτε:
- Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 40 ετών.
  - Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 25 ετών και μικρότερη των 40 ετών.
8. Η κατανομή συχνοτήτων των σωλήνων που παράγει μια μηχανή ως προς το μήκος τους είναι περίπου κανονική. Έστω ότι η διάμεσος των μηκών των σωλήνων είναι 3 m και ο συντελεστής μεταβολής είναι  $CV = \frac{2}{300}$  .
- Να βρείτε:
    - τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και το εύρος
    - το ποσοστό των σωλήνων που έχουν μήκος από 2,96 m έως 3,02 m .
  - Μια σωλήνα θεωρείται ελαττωματική, όταν έχει μήκος μεγαλύτερο από 3,06 m ή μικρότερο από 2,94 m . Αν η μηχανή παράγει 4.000 σωλήνες και οι 18 είναι ελαττωματικές, να εξετάσετε αν η λειτουργία της μηχανής έχει βλάβη.

9. Η κατανομή συχνοτήτων των δίσκων που παράγει μια μηχανή ως προς τη διάμετρό τους είναι περίπου κανονική. Έστω ότι η τυπική απόκλιση των δίσκων είναι 2 cm και ότι το 50% των δίσκων έχουν διάμετρο, το πολύ, 22 cm .
- Αν αγοράσουμε ένα τέτοιο δίσκο, σε ποιο διάστημα είναι σχεδόν βέβαιο ότι θα βρίσκεται η διάμετρός του;
  - Αν διαλέξουμε ένα τέτοιο δίσκο στην τύχη, ποια πρέπει να είναι η διάμετρός του, ώστε να ελέγξουμε τη λειτουργία της μηχανής για πιθανή βλάβη;
10. Το 15,85% των παρατηρήσεων μιας κανονικής κατανομής βρίσκεται στο διάστημα (4, 8) με άκρα του διαστήματος χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής ( $\bar{x} \pm 3s$ ,  $\bar{x} \pm 2s$ ,  $\bar{x} \pm s$ ,  $\bar{x}$ ). Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής του δείγματος των παρατηρήσεων.
11. Το 83,85% των παρατηρήσεων μιας κανονικής κατανομής βρίσκεται στο διάστημα (21, 33) με άκρα του διαστήματος χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής ( $\bar{x} \pm 3s$ ,  $\bar{x} \pm 2s$ ,  $\bar{x} \pm s$ ,  $\bar{x}$ ). Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής του δείγματος των παρατηρήσεων.

## ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

12. Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης, για το χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο, διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά. Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.
- Να βρείτε το μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους.
  - Να εξετάσετε, αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
  - Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4.000, πόσοι μαθητές θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά;
  - Μια μέρα, λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης, κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά. Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής (CV).

13. α. Να αντιστοιχίσετε κάθε διάστημα μιας κανονικής κατανομής με το ποσοστό παρατηρήσεων που βρίσκονται σ' αυτό.

Διάστημα	Ποσοστό
A. $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$	1. 99,7
B. $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$	2. 95
Γ. $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$	3. 34
	4. 68

A.	
B.	
Γ.	

- β. Να αντιστοιχίσετε κάθε ποσοστό της 1<sup>ης</sup> στήλης στα αντίστοιχα διαστήματα της 2<sup>ης</sup> στήλης με άκρα των διαστημάτων χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής.

Ποσοστό	Διάστημα
A. 13,5	1. $(\bar{x} - 3s, \bar{x} - 2s)$
B. 2,35	2. $(\bar{x} - s, \bar{x})$
Γ. 34	3. $(\bar{x} - 2s, \bar{x} - s)$

A.	
B.	
Γ.	

14. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

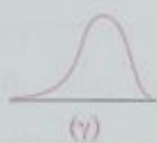
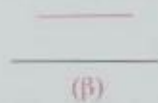
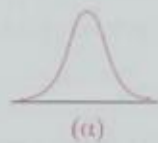
- α. Όταν η κατανομή είναι συμμετρική, τότε  $\bar{x} = \delta$  .  
 β. Σε μια κανονική κατανομή είναι  $R \approx 6s$  .  
 γ. Όταν η κατανομή έχει θετική ασυμμετρία, τότε  $\bar{x} > \delta$  .

α.	
β.	
γ.	

15. Να αντιστοιχίσετε τις κατανομές:

- A. Κανονική κατανομή  
 Β. Ομοιόμορφη κατανομή  
 Γ. Ασύμμετρη με θετική ασυμμετρία  
 Δ. Ασύμμετρη με αρνητική ασυμμετρία.

με καμπύλες συχνότητας στα παρακάτω σχήματα.



A.	
B.	
Γ.	
Δ.	

## ΘΕΜΑ Α

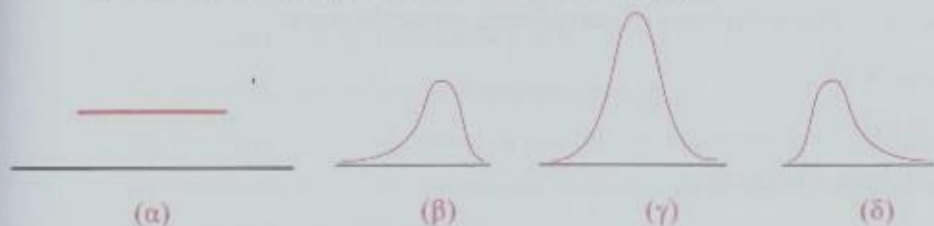
- A1. α.** Να ορίσετε τη μέση τιμή ενός συνόλου  $n$  παρατηρήσεων.
- β.** Τι καλείται διακύμανση ή διασπορά των παρατηρήσεων  $t_1, t_2, \dots, t_n$  μιας μεταβλητής  $X$  και από ποια σχέση ορίζεται;
- γ.** Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας;
- A2. α.** Να αντιστοιχίσετε τα Α, Β, Γ, Δ, Ε με τα 1, 2.
- Α. Διάμεσος
- Β. Εύρος
- Γ. Διακύμανση
- Δ. Μέση τιμή
- Ε. Τυπική απόκλιση
1. Μέτρο θέσης
2. Μέτρο διασποράς
- β.** Να αντιστοιχίσετε κάθε διάστημα μιας κανονικής κατανομής με το ποσοστό παρατηρήσεων που βρίσκονται σ' αυτό.

Διάστημα	Ποσοστό
Α. $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$	1. 68
Β. $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$	2. 34
Γ. $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$	3. 99,7
	4. 95

- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).
- α.** Όταν έχουμε ακραίες παρατηρήσεις σε ένα δείγμα, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε τη μέση τιμή αντί της διαμέσου.
- β.** Η διακύμανση εκφράζεται με την ίδια μονάδα μέτρησης με το χαρακτηριστικό.
- γ.** Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός, τότε το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες της διαμέσου, είναι μικρότερο του 50%.
- δ.** Σε μια κανονική κατανομή είναι  $R = 6s$ .
- ε.** Ο συντελεστής μεταβολής παριστάνει ένα μέτρο της απόλυτης διασποράς.

**A4.** Να αντιστοιχίσετε τις κατανομές στα παρακάτω σχήματα

- A. κανονική
  - B. ομοιόμορφη
  - Γ. ασύμμετρη με θετική ασυμμετρία
  - Δ. ασύμμετρη με αρνητική ασυμμετρία
- με τις καμπύλες συχνοτήτων στα παρακάτω σχήματα.



## ΘΕΜΑ Β

Οι βαθμοί των φοιτητών σε μια εξέταση στο μάθημα της Στατιστικής φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

5	3	6	5	7	3	6	5	6	3
6	7	6	3	5	6	3	6	3	6

Να βρείτε:

- B1.** Το εύρος και τη διάμεσο.
- B2.** Τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση.
- B3.** Το συντελεστή μεταβολής και στη συνέχεια να εξετάσετε, αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

$$(\sqrt{2} \approx 1,41)$$

## ΘΕΜΑ Γ

Οι βαθμοί ενός μαθητή σε οκτώ μαθήματα είναι οι εξής:

$$15, 9 + \alpha, 14, 19, 8\alpha + 1, 18, 10, 16$$

**Γ1.** Αν η μέση τιμή των βαθμών είναι 15, να υπολογίσετε την τιμή του  $\alpha$ .

**Γ2.** Για  $\alpha = 2$ , στις παραπάνω παρατηρήσεις, να υπολογίσετε:

**α.** το εύρος  $R$

**β.** τη διάμεσο  $\delta$

**γ.** την τυπική απόκλιση  $s$ .

**Γ3.** Για  $\alpha = 2$ , αν αυξήσουμε καθέναν από τους βαθμούς κατά 1, να εξετάσετε αν το δείγμα που θα προκύψει είναι ομοιογενές.

## ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε ένα δείγμα παρατηρήσεων με μια συνεχή ποσοτική μεταβλητή  $X$  με θετικές τιμές που ακολουθεί περίπου κανονική κατανομή. Έστω ότι ο συντελεστής μεταβολής CV είναι 20% και η διάμεσος  $\delta$  είναι 10.

**Δ1.** Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  και την τυπική απόκλιση  $s$  των παρατηρήσεων του δείγματος.

**Δ2.** Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες από 8.

**Δ3.** Αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 800, να βρείτε πόσες τουλάχιστον είναι μεγαλύτερες από 14.

**Δ4.** Αν όλες οι παρατηρήσεις του δείγματος διπλασιαστούν, τότε το δείγμα είναι ομοιογενές;

## ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2<sup>οο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Έστω οι αριθμοί:  $12, 9, 8, 3κ-2, 11$ .
- α. Αν οι αριθμοί έχουν διάμεσο  $10$ , να υπολογίσετε την τιμή του  $κ$ .
- Αν  $κ=4$ , τότε:
- β. Να υπολογίσετε τη διακύμανση  $s^2$ .
- γ. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
- δ. Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής των αριθμών που θα προκύψουν, αν ο καθένας από τους παραπάνω αριθμούς πολλαπλασιαστεί με το  $-2$  και στη συνέχεια αυξηθεί κατά  $5$ .
2. Οι τιμές  $10$  διαφορετικών προϊόντων ενός καταστήματος είναι οι εξής:
- $12, 9, 15, 7, 13, κ, 12, 17, 13, 14$
- Η μέση τιμή των παραπάνω τιμών είναι  $\bar{x}=12$ .
- α. Να βρείτε την τιμή του  $κ$ .
- β. Για  $κ=8$ , να δείξετε ότι η τυπική απόκλιση είναι  $s=3$ .
- γ. Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής του δείγματος.
- δ. Αν οι τιμές των προϊόντων μειωθούν κατά  $10\%$ , να εξετάσετε αν το δείγμα των νέων τιμών είναι ομοιογενές.
3. Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι θερμοκρασίες των  $20$  πρώτων ημερών του Μαΐου σε βαθμούς Κελσίου ( $^{\circ}\text{C}$ ).
- | $x_i$ | $v_i$ |
|-------|-------|
| 22    | 2     |
| 23    | 4     |
| 24    | $x$   |
| 25    | $y$   |
| 26    | 2     |
| 27    | 3     |
- α. Αν γνωρίζουμε ότι η μέση θερμοκρασία των παραπάνω ημερών είναι  $24,4^{\circ}\text{C}$ , τότε:
- i. Να βρείτε πόσες ημέρες είχαν θερμοκρασία  $24^{\circ}\text{C}$  και πόσες  $25^{\circ}\text{C}$ .
- ii. Να υπολογίσετε τη διάμεσο.
- β. Αν γνωρίζουμε ότι η διάμεσος είναι  $24,5^{\circ}\text{C}$ , να βρείτε πόσες ημέρες είχαν θερμοκρασία  $24^{\circ}\text{C}$  και πόσες  $25^{\circ}\text{C}$ .

4. Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές  $x_i$ ,  $i=1, 2, 3, 4$  μιας μεταβλητής  $X$  με αντίστοιχες συχνότητες  $v_i$ ,  $i=1, 2, 3, 4$ . Η συχνότητα  $v_2$  που αντιστοιχεί στην τιμή  $x_2=3$  είναι άγνωστη. Δίνεται ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι ίση με  $\bar{x}=4$ .

$x_i$	$v_i$
2	6
3	;
5	3
8	4

- α. Να αποδείξετε ότι  $v_2=7$ .
- β. Να αποδείξετε ότι η διακύμανση των παρατηρήσεων είναι ίση με 4,9.
- γ. Να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών της μεταβλητής  $X$  είναι ομοιογενές. Δίνεται ότι  $\sqrt{4,9}=2,2$ . Θ.Ε.

5. Έστω  $x_1, x_2, x_3, x_4$  οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  ενός δείγματος μεγέθους  $v=72$  με αντίστοιχες (απόλυτες) συχνότητες  $v_1, v_2, v_3, v_4$  όπου  $v_4=3v_3$ . Δίνεται επίσης ότι τα τόξα του κυκλικού διαγράμματος συχνοτήτων που αντιστοιχούν στις τιμές  $x_1$  και  $x_2$  είναι αντίστοιχα  $50^\circ$  και  $30^\circ$ .

- α. Να βρεθούν οι συχνότητες  $v_i$ ,  $i=1, 2, 3, 4$ .
- β. Να βρεθούν τα τόξα που αντιστοιχούν στις τιμές  $x_3$  και  $x_4$ .
- γ. Δίνεται ότι  $x_1 < -7$ ,  $x_2 = -7$ ,  $x_3 = 3$  και  $x_4 > 3$ . Να δειχθεί ότι  $10R + 72\bar{x} = 52\delta$ , όπου  $R$ ,  $\bar{x}$ ,  $\delta$  είναι αντίστοιχα το εύρος, η μέση τιμή και η διάμεσος των παρατηρήσεων. Θ.Ε.

6. α. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον πίνακα των τιμών της μεταβλητής  $X$  σωστά συμπληρωμένο.

$x_i$	$v_i$	$f_i$	$f_i\%$	$N_i$	$x_i v_i$	$x_i^2$	$x_i^2 v_i$
1	10				10	1	10
2				35		4	
3						9	
<b>Σύν.</b>	$v=50$	1	100				

- β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.
- γ. Να δείξετε ότι η διακύμανση είναι  $s^2 = 0,49$ .

Δίνεται ότι 
$$s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right\}.$$

7. Οι τιμές των παρατηρήσεων μιας μεταβλητής  $X$  είναι:

$$4, x, 2, 2, 3, 4, 3, 4, 3, 4$$

Αν  $x > 4$  και το εύρος των παρατηρήσεων είναι 4, τότε:

α. Να βρείτε την τιμή του  $x$

Για  $x = 6$ , να βρείτε:

β. Τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων.

γ. Την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

$$\text{Δίνεται ότι } s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right\} \text{ και } \sqrt{1,25} = 1,1.$$

8. Σε ένα δείγμα ανέργων για το χρόνο σε εβδομάδες που είναι άνεργοι προέκυψε το διπλανό πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

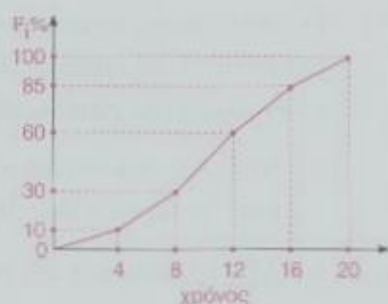
Στις παραπάνω παρατηρήσεις, να βρείτε:

α. τη διάμεσο,

β. τη μέση τιμή,

γ. την τυπική απόκλιση,

δ. το συντελεστή μεταβλητότητας.



9. Τα χρόνια εργασίας ενός δείγματος εργαζομένων σε ένα εργοστάσιο σχηματίζουν το διπλανό πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων. Να βρείτε:

α. τη διάμεσο,

β. τη μέση τιμή,

γ. την τυπική απόκλιση,

δ. το συντελεστή μεταβολής μετά από 5 χρόνια.



10. Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς, σε ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (ομάδα Α) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (ομάδα Β) ενός Γυμνασίου.

Ομάδα Α	Ομάδα Β
1	7
8	14
9	6
5	4
3	12
4	5

- Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε ομάδας.
- Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες.
- Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας Α γίνει αύξηση 20% και οι παρατηρήσεις της ομάδας Β αυξηθούν κατά 5 ευρώ η καθεμία, πώς διαμορφώνονται οι νέες μέσες τιμές των δύο ομάδων;
- Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες με τα νέα δεδομένα. Θ.Ε.

11. Για δύο τύπους μπαταριών Α και Β επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα (σε χιλιάδες ώρες) δίνονται στο διπλανό πίνακα:

A	B
20	26
26	32
24	19
22	20
18	23

- Να βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου Α και μιας μπαταρίας τύπου Β.
- Αν μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει 38 ευρώ και μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει 40 ευρώ, ποιον τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσετε; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).
- Να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις  $S_A$  και  $S_B$  της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών.
- Να βρείτε ποιος από τους δύο τύπους μπαταριών Α και Β παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του.  
Δίνεται ότι  $\sqrt{11} \approx 3,3$ . Θ.Ε.

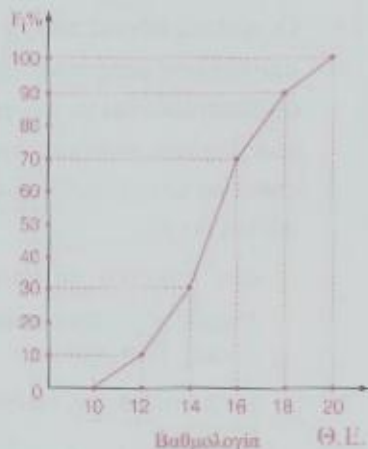
12. Είκοσι παρατηρήσεις τις έχουμε ομαδοποιήσει όπως φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

Αν  $\bar{x} = 3$ , τότε:

- να υπολογίσετε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$
- να βρείτε τη διακύμανση των παρατηρήσεων
- να εξετάσετε, αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Κλάσεις	$x_i$	$v_i$
$[-1, 1)$		$\alpha$
$[1, 3)$		4
$[3, 5)$		$\beta$
$[5, 7)$		4
<b>Σύνολο</b>		

13. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων που παρουσιάζει τη βαθμολογία μίας ομάδας μαθητών στο μάθημα της Ιστορίας. Η βαθμολογία κυμαίνεται από 10 μέχρι 20. Δίνεται ότι 10 μαθητές έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 και μικρότερο του 14.



- Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των μαθητών είναι 50.
- Να βρείτε τη διάμεσο.
- Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

14. Στο διπλανό πίνακα δίνεται η κατανομή της ηλικίας ενός δείγματος ατόμων μιας πόλης. Να βρείτε:

Ηλικία [ , )	Συχνότητα
0 - 20	18
20 - 40	24
40 - 60	30
60 - 80	36
80 - 100	12

- τη διάμεσο,
- το πλήθος των ατόμων που έχουν ηλικία κάτω από 35 έτη,
- τη μέση τιμή,
- την τυπική απόκλιση,
- το συντελεστή μεταβολής.

15. Η βαθμολογία εξήντα μαθητών ενός Λυκείου σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών βρίσκεται στο διάστημα  $[10, 20)$  και έχει ομαδοποιηθεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι έξι μαθητές έχουν πάρει βαθμό μικρότερο από 12, δεκαοκτώ μαθητές μικρότερο από 14, έξι μαθητές μεγαλύτερο ή ίσο του 18 και δεκαοκτώ μαθητές μεγαλύτερο ή ίσο του 16.

- Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το διπλανό πίνακα συχνοτήτων κατάλληλα συμπληρωμένο, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.
- Να βρείτε τη μέση βαθμολογία  $\bar{x}$  των μαθητών και τη διάμεσο  $\delta$  των βαθμολογιών τους.

Κλάσεις	$x_i$	$v_i$	$f_i\%$	$N_i\%$	$F_i\%$
$[10, )$					
$[ , )$					
$[ , )$					
$[ , )$					
$[ , 20)$					
<b>Σύνολο</b>					

- Στο 5% των μαθητών με την καλύτερη επίδοση πρόκειται να δοθεί έπαινος. Από ποιον βαθμό και πάνω πρέπει να έχει γράψει κάποιος μαθητής για να πάρει έπαινο; (Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες).

16. Οι ημέρες αδείας των υπαλλήλων μιας εταιρείας ομαδοποιούνται σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους, σύμφωνα με το διπλανό πίνακα: Αν ισχύει ότι:

Ημέρες	$x_i$	$v_i$	$f_i$	$N_i$	$F_i\%$
[ 6, )		16			
[ , )					
[ , )					
[ , )					
[ , 26)					
<b>Σύνολο</b>					

- στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων των ημερών αδείας το τόξο  $\alpha_1$  του κυκλικού τομέα, το οποίο αντιστοιχεί στην πρώτη κλάση, είναι  $72^\circ$ , και
- $3f_2 = 3f_3 = f_3 = f_4$ , τότε:
  - a. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε κατάλληλα.
  - β. Να σχεδιάσετε στο τετράδιό σας (όχι σε μιλιμετρέ) το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.
  - γ. Να βρείτε τον μέσο αριθμό ημερών αδείας και την τυπική απόκλιση του δείγματος. (Δίνεται  $\sqrt{25,6} = 5,06$ ).
  - δ. Να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων που πήραν άδεια από 12 μέχρι 25 ημέρες. Θ.Ε.

17. Οι βαθμοί 60 μαθητών σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών κυμαίνονται από 10 έως 20 και έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους. Αν:

- Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην κλάση [14, 16) του κυκλικού διαγράμματος είναι  $144^\circ$ .
- Οι σχετικές συχνότητες των δύο πρώτων κλάσεων είναι ίσες.
- 48 μαθητές πήραν βαθμό έως 16 και
- 6 μαθητές πήραν βαθμό τουλάχιστον 18, τότε:

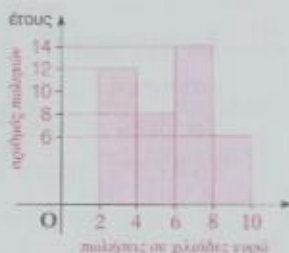
- a. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το διπλανό πίνακα σωστά συμπληρωμένο.

Κλάσεις	$x_i$	$v_i$	$f_i$	$f_i\%$
<b>Σύνολο</b>				

- β. Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  της βαθμολογίας των μαθητών.
- γ. Να βρείτε πόσοι μαθητές πήραν βαθμολογία από 10 έως 14.

- δ. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που πήραν βαθμολογία τουλάχιστον 17. Θ.Ε.

18. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων, το οποίο παριστάνει τις πωλήσεις σε χιλιάδες ευρώ που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.



α. Να βρείτε το πλήθος των πωλητών της εταιρείας.

β. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το διπλανό πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων κατάλληλα συμπληρωμένο, δικαιολογώντας τη στήλη με τις σχετικές συχνότητες  $f_i$ ,  $i=1, 2, 3, 4$ .

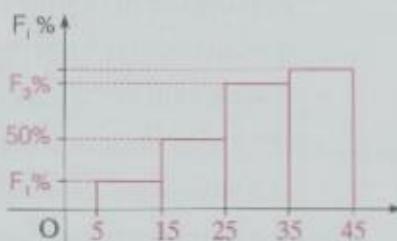
Κλάσεις	$x_i$	$v_i$	$f_i$
$[a, )$			
$[ , )$			
$[ , )$			
$[ , )$			
<b>Σύνολο</b>			

γ. i. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των πωλήσεων του έτους.

ii. Να βρείτε το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδων ευρώ (θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανομημένες). Θ.Ε.

19. Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα  $[5, 45)$  και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους.

Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο διπλανό ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.



α. Με βάση το διπλανό ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

β. Στο διπλανό πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι  $\alpha = 8$  και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας.

Χρόνοι	$x_i$	$v_i$	$f_i \%$	$N_i$	$F_i \%$
$[5, )$		$\alpha + 4$			
$[ , )$		$3\alpha - 6$			
$[ , )$		$2\alpha + 8$			
$[ , 45)$		$\alpha - 2$			
<b>Σύνολο</b>					

γ. Να βρεθεί η μέση τιμή  $\bar{x}$  και η τυπική απόκλιση  $s$  των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές. (Δίνεται ότι  $\sqrt{84} = 9,17$ ).

δ. Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα. Θ.Ε.

20. Το βάρος ενός δείγματος μαθητών Λυκείου ακολουθεί κανονική ή περίπου κανονική κατανομή.

Το 50% των μαθητών του δείγματος έχουν βάρος το πολύ 65 Kg, ενώ περίπου το 47,5% αυτών έχουν βάρος από 65 Kg έως 75 Kg.

- α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την τυπική απόκλιση του βάρους των μαθητών του δείγματος.
- β. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
- γ. Να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών του δείγματος, που έχουν βάρος από 55 Kg έως 70 Kg.
- δ. Ο αριθμός των μαθητών του δείγματος αυτού που έχουν βάρος από 55 Kg έως 60 Kg, είναι 27. Να υπολογίσετε το σύνολο των μαθητών του δείγματος. Θ.Ε.

21. Θεωρούμε ένα δείγμα  $n$  παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής  $X$ , τις οποίες ομαδοποιούμε σε 4 ισοπλάτεις κλάσεις. Δίνεται ότι:

- η μικρότερη παρατήρηση είναι 50
- η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι  $x_4 = 85$
- η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της τρίτης κλάσης
- η διάμεσος των παρατηρήσεων του δείγματος είναι  $\delta = 75$  και
- η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι  $\bar{x} = 74$

α. Να αποδείξετε ότι το πλάτος είναι  $c = 10$ .

β. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το διπλανό πίνακα συμπληρωμένο σωστά.

Κλάσεις	$x_i$	$f_i$
[ . )		
[ . )		
[ . )		
[ . )		
Σύνολο		

γ. Δίνεται ότι  $f_1 = 0,1$ ,  $f_2 = 0,3$ ,  $f_3 = 0,2$  και  $f_4 = 0,4$ . Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων, που είναι μικρότερες του 80, είναι  $\frac{200}{3}$ .

δ. Επιλέγουμε  $k$  παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος με  $k < n$ , οι οποίες ακολουθούν κανονική κατανομή με

- το 2,5% των παρατηρήσεων αυτών να είναι τουλάχιστον 74
- το 16% των παρατηρήσεων αυτών να είναι το πολύ 68

Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων αυτών καθώς και να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές. Θ.Ε.

22. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x + \frac{s^2}{x^2} + \bar{x} - 10$ , όπου  $\bar{x}$  και  $s$  είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων  $x_1, x_2, \dots, x_n$  μιας μεταβλητής  $X$  ενός δείγματος.

α. Αν η εφαπτομένη  $\varepsilon$  στη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο της  $M(2, 0)$  είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ , να βρείτε τις τιμές των  $\bar{x}$ ,  $s$ .

Αν  $\bar{x} = 10$  και  $s = 2$ , τότε:

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης  $\varepsilon$ .

γ. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 f'(x)}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$ .

δ. Έστω  $y_1, y_2, \dots, y_n$  οι τιμές που προκύπτουν από τις παρατηρήσεις  $x_1, x_2, \dots, x_n$  αντίστοιχα, όταν η κάθε μία από αυτές αυξηθεί κατά 10%. Να βρείτε το συντελεστή των τιμών  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

23. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της  $f$  στο σημείο  $\Lambda(1, 1)$ .

β. Από τυχαίο σημείο  $M(x, y)$  της γραφικής παράστασης της  $f$  φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ , οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες  $Ox$ ,  $Oy$  ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου  $M$ , ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη.

γ. Οι τετμημένες πέντε διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος α. έχουν μέση τιμή  $\bar{x} = 5$  και τυπική απόκλιση  $s_x = 2$ . Να βρεθεί η μέση τιμή  $\bar{y}$  και η τυπική απόκλιση  $s_y$  των τεταγμένων των σημείων αυτών. Θ.Ε.

24. Έστω  $t_1, t_2, \dots, t_n$  οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής  $X$  ενός δείγματος μεγέθους  $n$ , που έχουν μέση τιμή  $\bar{x}$  και τυπική απόκλιση  $s$ .

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση  $f(t) = \frac{1}{300s^2}(t - \bar{x})^3$ ,  $t \in \mathbb{R}$  και  $s \neq 0$ .

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης  $f$  γίνεται ελάχιστος για  $t = \bar{x}$  και να βρείτε την ελάχιστη τιμή του.

γ. Αν  $f'(0) = 1$ , να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής  $CV$  των παραπάνω παρατηρήσεων και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

δ. Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των αριθμών  $f'(t_1), f'(t_2), \dots, f'(t_n)$  είναι ίση με  $\frac{1}{100}$ . Θ.Ε.

25. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = -2x^2 + kx + 4\sqrt{x} + 10$ ,  $x \geq 0$ .

- α. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο  $A(1, f(1))$  είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ , να αποδείξετε ότι  $k = 2$  και να βρείτε την εξίσωσή της.
- β. Μια τυχαία μεταβλητή  $X$  ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\bar{x} = f(1)$  και τυπική απόκλιση  $s = -\frac{2f'(4)}{13}$ . Τρεις παρατηρήσεις, αντιπροσωπευτικού δείγματος μεγέθους  $n$ , είναι μικρότερες ή ίσες του 8.
- i. Να βρείτε τον αριθμό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα  $(10, 16)$ .
- ii. Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παρατηρήσεων που έχει ληφθεί, δεν είναι ομοιογενές. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παραμέτρου  $\alpha > 0$ , που πρέπει να προστεθεί σε κάθε μία από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα των νέων παρατηρήσεων να είναι ομοιογενές. Θ.Ε.

26. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 4x(3-x)^2$ . Έστω επιπλέον οι τιμές  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  με  $1 = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 = 2$  οι οποίες έχουν μέση τιμή  $\bar{y} = 12$ , τυπική απόκλιση  $s_y = 2$  και συντελεστή μεταβολής  $CV_y$ .

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία της.
- β. Να βρείτε το εύρος  $R$  των τιμών  $y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ .
- γ. Να βρείτε τον αριθμό  $a \in \mathbb{R}$  με  $a \in (-12, 0)$ , ο οποίος αν προστεθεί σε καθεμία από τις τιμές  $y_i$ , προκύπτει δείγμα με συντελεστή μεταβολής  $CV$ , τέτοιον, ώστε  $CV = 2CV_y + \frac{R}{12}$ .

27. Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 50% των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη του 20. Το 81,5% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα  $(16, 22)$  με άκρα του διαστήματος χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής  $\bar{x} \pm 3s$ ,  $\bar{x} \pm 2s$ ,  $\bar{x} \pm s$ ,  $\bar{x}$ .

- α. Να δείξετε ότι  $\bar{x} = 20$  και  $s = 2$ .
- β. Να βρείτε το  $\alpha \in \mathbb{N}^*$ , αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα  $(\bar{x} - \alpha \cdot s, \bar{x} + \alpha \cdot s)$  ανήκει το 95% περίπου των παρατηρήσεων.
- γ. Αν  $R$  είναι το εύρος της κατανομής, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f(x) = \frac{R}{2}x^2 - (\bar{x} + 4)x + 9s$ . Θ.Ε.