

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.
- Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{f'(x)}$.

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 4x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f .
- Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .
- Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x , όταν $x = 1$.

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f .
- Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .
- Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(-1, f(-1))$.

Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

- Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .
- Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - x}$.

Θέμα 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τις θέσεις των ακροτάτων της συνάρτησης f .
- Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x , όταν $x = -3$.

Θέμα 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 5$.

- Να βρείτε τις παραγώγους $f'(x)$ και $f''(x)$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.
- Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(-1, f(-1))$.

Θέμα 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + 1$.

- Να βρείτε τις παραγώγους $f'(x)$ και $f''(x)$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.
- Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f''(x)}{x^2 + 2x}$.

Θέμα 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f .
- Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f , όταν $x = 2$.
- Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1}$.

Θέμα 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f .
- Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f'(x)}{x-4}$.

Θέμα 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.
- Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f , όταν $x = -2$.
- Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = -1$.
- Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x) - 6}{\sqrt{x} - 1}$.

Θέμα 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ax - 1$.

- Αν $f(-2) = -1$, να βρείτε το a .
Αν $a = 2$, τότε:
 - Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.
 - Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης ε στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(1, f(1))$.
 - Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε του προηγούμενου ερωτήματος.

Θέμα 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + 19$.

α. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(-2, -1)$, να βρείτε το a .

Αν $a = -3$, τότε:

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(-1, f(-1))$.

δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^2 + 5x}$.

Θέμα 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + a(x-1)$.

α. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 0$, να βρείτε το a .

Αν $a = -1$, τότε:

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.

γ. Να γράψετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς:

$$f(4), f(3), f(\pi)$$

δ. Να βρείτε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(2, f(2))$.

Θέμα 14

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + ax + 1$.

α. Αν το σημείο $A(-1, -2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να βρείτε την τιμή του a .

Αν $a = 1$, τότε:

β. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f' ως προς τη μονοτονία της.

δ. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης f' ως προς x .

Θέμα 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .
- Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(2, f(2))$.
- Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ο ρυθμός μεταβολής της f , ως προς x είναι θετικός.
- Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{\sqrt{x+2}-2}$.

Θέμα 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - ax + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε το a , αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.
Αν $a = 2$, τότε:
 - Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .
 - Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στην γραφική παράσταση της f στο σημείο της $B(-2, f(-2))$.
 - Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - x}$.

Θέμα 17

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = x^2 - 4x + 4$ και $g(x) = x - 2$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $h(x) = f(x) + g(x)$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ και να απλοποιήσετε τον τύπο της.
- Να υπολογίσετε τα όρια:
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{h(x)}$
 - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)}{\varphi(x)}$

Θέμα 18

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με: $f(x) = x^2 - 3x + 2$ και $g(x) = x^2 - 4$.

- Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της g .
- Να βρείτε την συνάρτηση h με $h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$.
- Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.

Θέμα 19

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 1$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1.

- Να αποδείξετε ότι $a = 3$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.
- Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της f .
- Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 2x + 1}$.

Θέμα 20

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.
- Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της f , ως προς x , όταν $x = 2$.
- Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.
- Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - 1}{x - 2}$.

Θέμα 21

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f , ως προς x , όταν $x = 2$.
- Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = -1$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(-1, f(-1))$.
- Να βρείτε τα σημεία τομής της εφαπτομένης του προηγούμενου ερωτήματος με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

Θέμα 22

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 3x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f .
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2023)$ και $f(2024)$.
- Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 23

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των ακρότατων.
- Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 24

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \kappa x^3 - 2$.

- Αν ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(1, f(1))$ είναι -2 , να βρείτε το κ .

Αν $\kappa = 1$, τότε:

- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο παραπάνω σημείο M .
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των ακρότατων της f .

Θέμα 25

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 - x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .
- Να βρείτε τις τιμές των a , β για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$ και η εφαπτομένη στη γραφική της παράσταση στο σημείο A είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Αν $\alpha = -1$ και $\beta = 1$, τότε:

γ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1}$.

δ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Θέμα 26

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta - 1$.

α. Αν η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(-2, -3)$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να βρείτε τις τιμές των α , β .

Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -2$, τότε:

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ. Να βρείτε το είδος του ακρότατου και την τιμή του.

δ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)}{x+3}$.

Θέμα 27

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

γ. Να βρείτε τη γωνία $\omega \in (0, \pi)$, ώστε $\epsilon\phi\omega = f(0)$.

δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Θέμα 28

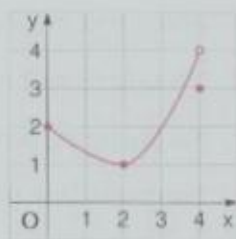
Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$. Με τη βοήθεια της C_1 :

α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

β. Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των ακροτάτων της f .

γ. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $2f^2(x) = 3f(x)$.

δ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ και να εξετάσετε, αν η f είναι συνεχής στο 4.



Θέμα 29

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, & \text{αν } x \neq 2 \\ -1 & \text{αν } x = 2 \end{cases}$.

α. Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$.

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$.

γ. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

Θέμα 30

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

γ. Να βρείτε το α , ώστε η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \neq 2 \\ \alpha - 1, & \text{αν } x = 2 \end{cases}$, να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Θέμα 31

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}$.

α. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$ και στη συνέχεια τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.

γ. Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των ακρότατων της συνάρτησης f .

δ. Να αποδείξετε ότι $f(a^2) \geq 1$, για κάθε $a \neq 0$.

Θέμα 32

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f , όταν $x=3$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4)f(x)$.

Θέμα 33

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

- Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2}$.
- Να βρείτε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.
- Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων.
- Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\sqrt{3x^2 + 1} - 2}$.

Θέμα 34

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \kappa x^4 + 1$.

- Αν η εφαπτομένη ε στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y = 4x - 3$, να βρείτε το κ .

Αν $\kappa = 1$ τότε:

- Να βρείτε την εξίσωση της παραπάνω ευθείας ε .
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x^2 - x}$.

Θέμα 35

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 - x + \beta$, της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο A με τετμημένη 1 .

- Να βρείτε τις τιμές των a και β .
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.
- Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων.
- Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)(\sqrt{x}-1)}$.

Θέμα 36

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) \cdot f(x)]$.
- Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$ με τον άξονα $x'x$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Θέμα 37

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$.
- Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.
- Να εξετάσετε τη συνάρτηση $f(x)$ ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των ακροτάτων της f .
- Να δείξετε ότι $-\frac{1}{3} \leq f(\eta\mu\theta) \leq 1$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.

Θέμα 38

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x-1}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- Να βρείτε το λ , ώστε $\lambda f(5) - f(2) = 3$.

γ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-1}{x-2}$.

δ. Να βρείτε τη παράγωγο της συνάρτησης f .

Θέμα 39

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x , όταν $x = 5$.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $M(5, f(5))$.

δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h)-4}{h^2-h}$.

Θέμα 40

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 3x + 3}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονotonία.

γ. Να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζει η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(1, f(1))$.

δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x^3-8}$.

Θέμα 41

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin x - ax$.

α. Αν ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x είναι -1 , όταν $x = 0$, να βρείτε το a .

Αν $a = 1$, τότε:

β. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης ε στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(\pi, f(\pi))$.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της παραπάνω ευθείας ε .

δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1+x}{\eta\mu^2 x}$.

Θέμα 42

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 + \eta\mu x}$, $x \in [0, \pi]$.

- Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f , όταν $x = \frac{\pi}{2}$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο $A(0, f(0))$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2)$ και $f(3)$.

Θέμα 43

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x \eta\mu x + a \sigma\upsilon\nu x$.

- Αν η γραφική συνάρτηση της f διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$, να βρείτε την τιμή του a .

Αν $a = 1$, τότε:

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.
- Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των ακροτάτων της f .
- Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 44

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 4)$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $f'(x)$ της συνάρτησης $f(x)$.
- Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο $f''(x)$ της συνάρτησης $f(x)$.
- Να βρείτε τις τιμές του a , για τις οποίες ισχύει $f'(1) + af''(-1) = 2$.
- Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}$.

Θέμα 45

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} + \kappa$.

- Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$, να βρείτε το κ .

Αν $\kappa = -\frac{1}{2}$, τότε:

β. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, 2)$.

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - 2}{h^2 - 2h}$.

δ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ε. Να αποδείξετε ότι $\frac{f(2024) + f(2025)}{2} > f(2023)$.

Θέμα 46

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \kappa x^2 - 1$.

α. Αν η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(1, f(1))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 135^\circ$, να βρείτε το κ .

Αν $\kappa = 1$, τότε:

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο παραπάνω σημείο M .

γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

δ. Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των ακρότατων.

Θέμα 47

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \lambda x - 1$.

α. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ για την οποία όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f' δε βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Αν $\lambda = 1$, τότε:

β. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f' στο σημείο της $A(2, f'(2))$.

δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\sqrt{x^3 + 3} - 2}$.

Θέμα 48

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και την τιμή των ακρότατων.
- Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 49

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta\sqrt{x}$.

- Αν η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, -1)$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να βρείτε τις τιμές των α και β .
- Αν $\alpha = 1$ και $\beta = -2$, τότε:
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
 - Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και την τιμή των ακρότατων.
 - Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{2023}\right) < 0$.

Θέμα 50

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 9}}$.
- Να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζει η εφαπτομένη ε στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(0, f(0))$, με τον άξονα $x'x$.
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε του παραπάνω ερωτήματος.
- Να υπολογίσετε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - 9}{h^2 + h}$.

Θέμα 51

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 - 3x^4 - x - 1$.

- Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f .
- Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f , ως προς x , όταν $x = -1$.
- Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.
- Να υπολογίσετε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$.

Θέμα 52

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x-1}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.
- Να βρείτε την τιμή $f'(0)$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

Θέμα 53

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^4 + \beta x^3 - 15$.

- Αν η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(2, 1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y = 48x - 3$, να βρείτε τις τιμές των α, β .
Αν $\alpha = 3$ και $\beta = -4$ τότε:
 - Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.
 - Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των ακροτάτων της f .
 - Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \frac{f(x) + 15}{9x^2 - 16}$.

Θέμα 54

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x$.

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.
- Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$.
- Να βρείτε το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη ϵ είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y = 2x - 3$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ϵ του προηγούμενου ερωτήματος.

Θέμα 55

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$.

- Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f , όταν $x = \frac{\pi}{3}$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $M(\pi, f(\pi))$.
- Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f στο διάστημα $[0, \pi]$.
- Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu x}$.

Θέμα 56

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x - \eta\mu\theta + 14$, $\theta \in \mathbb{R}$.

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των ακρότατων της f .
- Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε το σημείο M της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη ε είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
 - Για ποια τιμή του $\theta \in [0, \pi]$ η ευθεία ε έχει εξίσωση $y=1$;

Θέμα 57

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 3} + x$.

- Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f .
- Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο που τέμνει τον άξονα $y'y$.
- Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x - 2}{x - 1}$.

Θέμα 58

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη της σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στην γραφική παράσταση της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.
- Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{x - 2}$.

Θέμα 59

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x\eta\mu\theta$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

- Να βρείτε τις τιμές του $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, ώστε η γραφική παράσταση της f να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο 1.

Αν $\theta = \frac{\pi}{6}$, τότε:

- β. Να βρείτε το σημείο M της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$.
- γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε στο παραπάνω σημείο M , να τη σχεδιάσετε και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από αυτή και τους άξονες.
- δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)+1}-1}{f'(x)-1}$.

Θέμα 60

Το ύψος (σε m) που βρίσκεται ένα χελιδόني ξεκινώντας από το έδαφος, μετά από χρόνο πτήσης t (sec) δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -3t^2 + 30t, \text{ όπου } 0 \leq t \leq 10$$

- α. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του ύψους του χελιδονιού τη χρονική στιγμή $t = 2$.
- β. Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το χελιδόني ανεβαίνει, καθώς και το χρονικό διάστημα κατά το οποίο κατεβαίνει.
- γ. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το χελιδόني βρίσκεται στο μέγιστο ύψος, καθώς και το ύψος αυτό.

Θέμα 61

Η ημερήσια είσπραξη (σε €) μίας βιομηχανίας από την πώληση x τόνων ενός προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση

$$E(x) = 250x, \text{ } 0 < x < 20,$$

ενώ το συνολικό κόστος παραγωγής αυτής της ποσότητας δίνεται από τη συνάρτηση

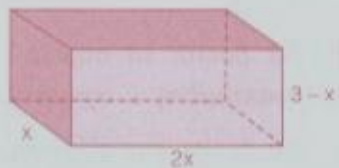
$$K(x) = 10x^2 - 50x + 500$$

- α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση του κέρδους είναι
- $$P(x) = -10x^2 + 300x - 500$$
- β. Να βρεθεί το κέρδος της βιομηχανίας από την πώληση 10 τόνων προϊόντος.
- γ. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης του κέρδους;
- δ. Πόση ποσότητα πρέπει να πουληθεί, ώστε το κέρδος της βιομηχανίας να γίνει μέγιστο και ποιο είναι το μέγιστο κέρδος της βιομηχανίας;

Θέμα 62

Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι

$$x, 2x, 3-x$$

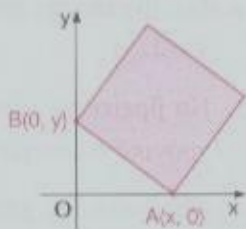


- α. Να αποδείξετε ότι ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $V(x) = -2x^3 + 6x^2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $V(x)$.
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $V(x)$ ως προς τη μονοτονία της.
- γ. Για ποια τιμή του x ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου γίνεται μέγιστος και ποια είναι η μέγιστη τιμή του;
- δ. Για ποια τιμή του x ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου γίνεται μέγιστος και ποια είναι η μέγιστη τιμή του;

Θέμα 63

Τα σημεία $A(x, 0)$ και $B(0, y)$ κινούνται στους θετικούς ημιάξονες Ox , Oy αντίστοιχα, ώστε το άθροισμα των αποστάσεών τους από την αρχή των αξόνων O να είναι 10.

- α. Να αποδείξετε ότι $0 < x < 10$, το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά την AB ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $E(x) = 2x^2 - 20x + 100$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.
- β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τετραγώνου, όταν $x = 3$.
- γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(x)$ ως προς τη μονοτονία.
- δ. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του τετραγώνου γίνεται ελάχιστο και ποια είναι η ελάχιστη τιμή του;
- ε. Έστω δύο τετράγωνα T , T' με $x_A = 3,47$ και $x'_A = 3,74$ αντίστοιχα. Ποιο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;



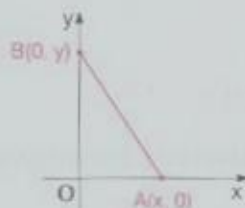
Θέμα 64

Το άθροισμα των μηκών x , y των κάθετων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 4.

- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά την υποτεινούσα του ορθογωνίου τριγώνου είναι $E(x) = 2x^2 - 8x + 16$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(x)$ ως προς τη μονοτονία της.
- Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά την υποτεινούσα του ορθογωνίου τριγώνου γίνεται ελάχιστο και ποια είναι η ελάχιστη τιμή του;

Θέμα 65

Τα σημεία $A(x, 0)$ και $B(0, y)$ κινούνται στους θετικούς ημιάξονες Ox , Oy αντίστοιχα, ώστε το άθροισμα των αποστάσεών τους από την αρχή O των αξόνων είναι 7.



- Να αποδείξετε ότι η απόσταση των σημείων A , B ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $d(x) = \sqrt{2x^2 - 14x + 49}$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $d(x)$.
- Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων A και B , όταν $x = 3$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση $d(x)$ ως προς τη μονοτονία της.
- Για ποια τιμή του x η απόσταση των σημείων A και B γίνεται ελάχιστη και ποια είναι η ελάχιστη τιμή της;

Θέμα 66

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax$, $a \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη στη γραφική της παράσταση στο σημείο της με τετμημένη 1 είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

- Να δείξετε ότι $a = 3$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης.
- Να αποδείξετε ότι η απόσταση ενός σημείου $M(x, y)$ της εφαπτομένης από την αρχή των αξόνων ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $d(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
- Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης $d(x)$ του προηγούμενου ερωτήματος ως προς x , όταν $x = 0$.
- Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1)d'(x) - x}{x^2}$.