

Θέμα 67

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$.

α. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{2(x^3 - 8)}{x^2}$.

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.

γ. Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων.

δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f'(x)}{\sqrt{5x-1}-3}$.

Θέμα 68

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - 2$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

β. Να δείξετε ότι $f(a) < f(a+1)$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

γ. Να βρείτε το σημείο M της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

δ. Να βρείτε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f' που διέρχεται από το σημείο $A(0, -3)$.

Θέμα 69

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης f .

β. Να αποδείξετε ότι $x^4 - 4x \geq -3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$.

Θέμα 70

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + \eta\mu\theta$, $\theta \in (0, 2\pi)$.

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία της.
- Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των ακροτάτων.
- Αν το τοπικό ελάχιστο είναι διπλάσιο από το τοπικό μέγιστο, να βρείτε την τιμή του θ .
- Αν $\theta = 3\frac{\pi}{2}$, τότε να βρείτε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y = 6x - 5$ και διέρχεται από το σημείο $\Lambda(1, f(1))$.

Θέμα 71

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων O .
- Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.
- Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

Θέμα 72

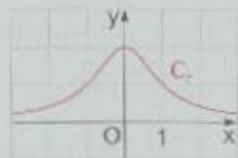
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.
- Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f , ως προς x , όταν $x = 2$.
- Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = -2$.
- Να βρείτε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$.

Θέμα 73

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της

$$\text{συνάρτησης } f(x) = \frac{2}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f :

α. Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f και να τη μελετήσετε ως προς τα ακρότατα.

β. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(2024) + f(2025) > 2f(2026)$

ii. $f(\alpha) + f(\beta) \leq 4$

γ. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f^2(x) = \frac{f(x)}{2}$.

Θέμα 74

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

α. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f που είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y = x - 5$.

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη (ϵ) του προηγούμενου ερωτήματος με τους άξονες.

δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x^3 + x}$.

Θέμα 75

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax + b$ της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο A με τετμημένη 1 .

α. Να αποδείξετε ότι $a = -4$ και $b = 3$.

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.

γ. Να αποδείξετε ότι $\frac{x^4 + 3}{4} \geq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^3 - 1}$.

Θέμα 76

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax + 6$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Αν $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 8$, να βρείτε το a .

Αν $a = 5$, τότε:

β. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

γ. Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1}$.

Θέμα 77

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 2a-1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$.

α. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$.

β. Να βρείτε την τιμή του a , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

γ. Αν $a = \frac{3}{4}$, τότε να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε $3 + f(-1) + 2\lambda f(1) > 0$.

Θέμα 78

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax+1}{x-1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και την $f'(x)$.

β. Αν η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(2, f(2))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$, να βρείτε την τιμή του a .

Αν $a = -2$, τότε:

γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

δ. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(156)$ και $f(157)$.

Θέμα 79

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

β. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

γ. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2023)$ και $f(2024)$.

δ. Να δείξετε ότι $f(2025) \leq \frac{3}{2}$.

Θέμα 80

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}, \text{ για } x \neq 0$$

β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = -1$.

γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

δ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f'(x)}{x^3 + x - 2}$.

Θέμα 81

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x^2 + a}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

α. Αν $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1}{2}$, να βρείτε το a .

Αν $a = 3$, τότε:

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(4)$ και $f(\pi)$.

δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1}$.

Θέμα 82

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x-1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να αποδείξετε ότι η $f'(x) = -\frac{\alpha + \beta}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$.

γ. Αν η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(2, -1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y = 2x + 1$, να βρείτε τα α και β .

δ. Αν $\alpha = 1$ και $\beta = -3$, τότε να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Θέμα 83

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.

γ. Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .

δ. Να αποδείξετε ότι $f(\alpha) + f(\beta) \leq 1$, για κάθε $\alpha, \beta \geq -1$.

Θέμα 84

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\alpha x + 2$, $\alpha > 0$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Αν η ελάχιστη τιμή της f είναι 1, να βρείτε την τιμή του α .

Αν $\alpha = 1$, τότε:

γ. Να βρείτε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{3\pi}{4}$.

δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1 - \sqrt{f(x)}}{f'(x)}$.

Θέμα 85

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ. Να βρείτε τις θέσεις ακρότατων και να υπολογίσετε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(-1, f(-1))$.

Θέμα 86

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + \beta x^2 - 4$, $x \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη στη γραφική της παράσταση στο $x_0 = -2$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-2, 0)$.

α. Να αποδείξετε ότι $a=1$ και $\beta=3$.

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

δ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{5}}$.

Θέμα 87

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$ και ισχύει

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0, \text{ να βρείτε τις τιμές των } a \text{ και } \beta.$$

Αν $a = -2$ και $\beta = 1$, τότε:

β. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της f , ως προς x .

γ. Αν η συνάρτηση θέσης ενός σώματος που κινείται ευθύγραμμα (πάνω στον άξονα $x'x$) είναι $x(t) = f(t)$, να βρείτε:

i. την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 2$ s

ii. πότε το κινητό είναι ακίνητο.

Θέμα 88

Η περίμετρος ενός οικοπέδου, σχήματος ορθογωνίου, είναι 400 μέτρα. Αν το μήκος του είναι x μέτρα με $0 < x < 200$.

- α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου, ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = -x^2 + 200x, \quad 0 < x < 200$$

- β. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο;
γ. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου.

Θέμα 89

Ένας κήπος, σχήματος ορθογωνίου, με διαστάσεις x και y έχει εμβαδόν 100 m^2 , με $0 < x < 100$.

- α. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του κήπου δίνεται από τη συνάρτηση

$$\Pi(x) = 2x + \frac{200}{x}, \quad 0 < x < 100$$

- β. Να βρείτε την τιμή του x , ώστε ο κήπος να έχει ελάχιστη περίμετρο, την οποία και να υπολογίσετε.
γ. Για την τιμή του x , που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να υπολογίσετε το κόστος της περιφράξης του κήπου, αν η περιφράξη στοιχίζει 10 € ανά μέτρο.

Θέμα 90

Έχουμε περιφράξει με συρματοπλέγμα μήκους 100m μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές.

Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x , με $0 < x < 100$.



- α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = 50x - \frac{x^2}{2}, \quad 0 < x < 100$$

- β. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματοπλέγμα των 100 m.

Θέμα 91

Το κόστος σε ευρώ ενός βιομηχανικού προϊόντος σε σχέση με το χρόνο t σε ώρες που χρειάζεται για την παραγωγή του δίνεται από τον τύπο:

$$C(t) = 10t^2$$

ενώ η τιμή πώλησης του σε ευρώ είναι

$$R(t) = 10\left(80 - \frac{16}{t}\right), \quad \frac{1}{5} < t \leq \frac{5}{2}$$

- α. Να βρείτε το κέρδος P από την πώληση ενός προϊόντος ως συνάρτηση του χρόνου που χρειάζεται για την παραγωγή του.
- β. Πότε το κέρδος είχε μείωση;
- γ. Να βρείτε το μέγιστο δυνατό κέρδος.

Θέμα 92

Μια βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης $\Pi(x)$ σε ευρώ, ανά μονάδα προϊόντος, συναρτήσει του πλήθους x των μονάδων παραγωγής σύμφωνα με τον τύπο

$$\Pi(x) = 3300 - 3x, \quad 0 \leq x \leq 1000$$

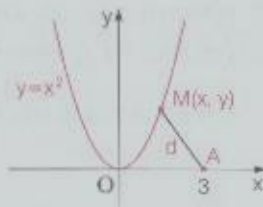
Το κόστος παραγωγής ανά μονάδα είναι 250 ευρώ και η βιομηχανία πληρώνει φόρο 50 ευρώ, για κάθε μονάδα προϊόντος.

- α. Να αποδείξετε ότι το κέρδος της βιομηχανίας είναι
$$P(x) = -3x^2 + 3000x, \quad 0 \leq x \leq 1000$$
- β. Να βρείτε πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παράγει η βιομηχανία, ώστε να έχει το μέγιστο κέρδος.

Θέμα 93

Δίνεται η συνάρτηση $y = x^2$ και το σημείο $A(3, 0)$.

- α. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου A από ένα σημείο M της παραβολής $y = x^2$, ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $d(x) = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$, $x \in \mathbb{R}$.



- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $d(x)$ ως προς τη μονοτονία.
- γ. Ποιο σημείο της καμπύλης είναι το πλησιέστερο στο A και πόσο απέχει από αυτό;
- δ. Αν τα σημεία K , L ανήκουν στη καμπύλη και $x_K = 2023$, $x_L = 2024$, να συγκρίνεται τις αποστάσεις των K , L από το A .

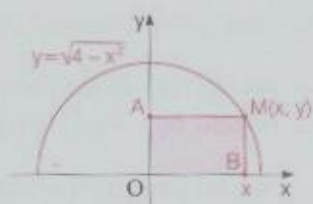
Θέμα 94

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο οι κάθετες πλευρές έχουν μήκος x , y και η υποτείνουσα 2.

- α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $E(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.
- β. Να αποδείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(x+h) - E(x)}{h} = \frac{2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}$.
- γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(x)$ ως προς τη μονοτονία της.
- δ. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου γίνεται μέγιστο και ποια είναι η μέγιστη τιμή του;

Θέμα 95

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ και το ορθογώνιο AMBO.



- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες.
- β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου AMBO ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $E(x) = x\sqrt{4-x^2}$.
- γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(x)$ ως προς τη μονοτονία της.
- δ. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο και ποια είναι η μέγιστη τιμή του;

Θέμα 96

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax + \beta}{x - 1}$.

- α. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο 2 και η εφαπτομένη στο σημείο αυτό σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$, να βρείτε τις τιμές των α και β .

Αν $\alpha = 1$ και $\beta = -2$ τότε:

- β. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$.
- γ. Αν $\kappa, \lambda \in (1, +\infty)$ και είναι $\kappa < \lambda$, να αποδείξετε ότι $\frac{\kappa - 2}{\kappa - 1} < \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1}$.
- δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{f'(x)(\sqrt{x} - 1)}$.

Θέμα 97

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + κx + 3$.

α. Αν η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $x_0 = 2$ είναι παράλληλη στην ευθεία $ζ: y = -9x + 7$, να βρείτε την τιμή του $κ$.

Αν $κ = 3$, τότε:

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ. Να αποδείξετε ότι $1 \leq f(\sin\theta) \leq 5$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.

δ. Να υπολογίσετε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - 5}{h^2 - h}$.

Θέμα 98

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda x + \lambda^2 - 3\lambda$, $0 < \lambda < 3$.

α. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0, f(0))$ είναι $y = \lambda x + \lambda^2 - 3\lambda$.

β. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0, f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ τρίγωνο εμβαδού $E(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda(\lambda - 3)^2$.

γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(\lambda)$ του προηγούμενου ερωτήματος ως προς τη μονοτονία της.

δ. Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν $E(\lambda)$ του ερωτήματος β. γίνεται μέγιστο και ποια είναι η μέγιστη τιμή του;

Θέμα 99

Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = (x-1)(5x+2), \text{ για κάθε } x \geq 0$$

α. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 5x^2 - 3x - 2$.

β. Ένα σώμα κινείται σε έναν άξονα και η θέση του x τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση $x(t) = f(t)$, όπου το x μετριέται σε μέτρα και το t σε δευτερόλεπτα. Να υπολογίσετε:

1. Την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 2$ δευτερόλεπτα.

2. Την χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα είναι ακίνητο.

3. Την επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 3$ δευτερόλεπτα.

Θέμα 100

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - a^2 - 4a$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.
- β. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f ως συνάρτηση του a .
- γ. Για ποια τιμή του a το τοπικό μέγιστο της f παίρνει τη μέγιστη τιμή του;
- δ. Για $a = -2$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + 3}{f'(x)}$.

Θέμα 101

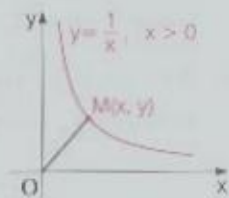
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x + a - 2\sqrt{a}$, $a > 0$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.
- β. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f ως συνάρτηση του a .
- γ. Για ποια τιμή του a το τοπικό ελάχιστο της f παίρνει την ελάχιστη τιμή του;
- δ. Για $a = 1$, να υπολογίσετε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - 25}{h^2 + h}$.

Θέμα 102

Δίνεται η καμπύλη $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

- α. Να αποδείξετε ότι η απόσταση της αρχής των αξόνων O από ένα σημείο της καμπύλης, ως συνάρτηση του x , εκφράζεται από τον τύπο $d(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$, $x > 0$.



- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $d(x)$ ως προς τη μονοτονία της.
- γ. Ποιο σημείο της καμπύλης είναι το πλησιέστερο στο σημείο O και πόσο απέχει από αυτό;
- δ. Αν τα σημεία K , Λ ανήκουν στη καμπύλη και $x_K = \frac{1}{2023}$, $x_\Lambda = \frac{1}{2024}$, να συγκρίνεται τις αποστάσεις των K , Λ από το O .

Θέμα 103

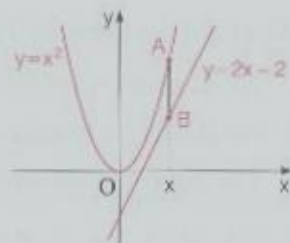
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.

- γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $M(2, f(2))$.
- δ. Έστω ότι η εφαπτομένη ε του προηγούμενου ερωτήματος τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα σημεία B , Γ αντίστοιχα και $\Delta(x, y)$ εσωτερικό του τμήματος $B\Gamma$. Αν K , Λ οι προβολές του σημείου Δ στους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα, να εκφράσετε το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου $\Delta K O \Lambda$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το ρυθμό μεταβολής ως προς x , όταν $x=2$.

Θέμα 104

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η παραβολή $y=x^2$ και η ευθεία $y=2x-2$.



- α. Να αποδείξετε ότι η απόσταση των σημείων A και B εκφράζεται από τη συνάρτηση

$$d(x) = x^2 - 2x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $d(x)$ ως προς τη μονοτονία της.

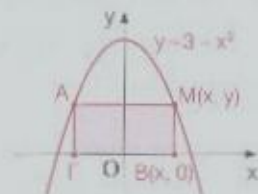
- γ. Για ποια τιμή του x η κατακόρυφη απόσταση της παραβολής $y=x^2$ και της ευθείας $y=2x-2$ γίνεται ελάχιστη και ποια είναι η ελάχιστη τιμή της;

- δ. Αν (A_1B_1) και (A_2B_2) οι κατακόρυφες αποστάσεις της παραβολής από την ευθεία για $x=x_1$ και $x=x_2$ να αποδείξετε ότι

$$(A_1B_1) + (A_2B_2) \geq 2$$

Θέμα 105

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η παραβολή $C: y=3-x^2$ και το ορθογώνιο $\Lambda MB\Gamma$.



- α. Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής C με τους άξονες.

- β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $\Lambda MB\Gamma$, ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = -2x^3 + 6x$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

- γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(x)$ ως προς τη μονοτονία της.

- δ. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο και ποια είναι η μέγιστη τιμή του;