Εφαρμογές Εμπέδωσης & Εμβάθυνσης

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ

1.14 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

i. $f(x)=\dfrac{x+4}{1-x}$

ii. $f(x)=\dfrac{\sqrt{5}+4x}{3x^2-12x}$

iii. $f(x)=\dfrac{2-x}{x^2-2x+1}$

iv. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x+2}$

v. $f(x)=\dfrac{7x+1}{x^2-5x+6}$

vi. $f(x)=\dfrac{7x+1}{x^3-8}$

1.15 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

i. $f(x)=\dfrac{x-2}{x^4+5x^2+4}$

ii. $f(x)=\dfrac{3x^2+2x}{x^3+7x-8}$

iii. $f(x)=\dfrac{2x-5}{|x-2|-|1-x|}$

iv. $f(x)=\dfrac{2x-5}{|x-2|+|4-x^2|}$

1.16 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

i. $f(x)=(x+1)^{-1}$

ii. $f(x)=(x+1)x^{-1}$

1.17 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

i. $f(x)=\sqrt{3-12x}$

ii. $f(x)=\sqrt[3]{16-x^2}$

iii. $f(x)=\sqrt{6x-3x^2}$

iv. $f(x)=\sqrt[5]{9x^2+6x+1}+\sqrt{3}$

v. $f(x)=\sqrt{7x^2-x+1}$

vi. $f(x)=\sqrt{2x^2+5x+2}$

1.18 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

i. $f(x)=\sqrt{4-||x-1|-2|}$

ii. $f(x)=\sqrt{x^3-6x^2+11x-6}$

iii. $f(x)=\sqrt[3]{1-\sqrt{x-2}}$

iv. $f(x)=\sqrt{x^2-9x}+\sqrt[3]{x+2}$

1.19 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

i. $f(x)=\varepsilon\varphi\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

ii. $f(x)=\sigma\varphi\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

iii. $f(x)=\dfrac{\varepsilon\varphi x}{\eta\mu x-1}$

iv. $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2x\sigma\upsilon\nu x-x}$

1.20 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

i. $f(x)=\dfrac{2\eta\mu x}{\varepsilon\varphi^2 x-3}$

ii. $f(x)=\dfrac{\varepsilon\varphi x-3}{2\sigma\upsilon\nu^2 x-5\sigma\upsilon\nu x+2}$

1.21 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

i. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}+\dfrac{1}{|x|-2}$

ii. $f(x)=\sqrt{x^2-7|x|+12}$

iii. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-7x+12}}$

iv. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2-4|x|+3}$

1.22 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

i. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-4}}{x^2-16}$ ii. $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x}}$

iii. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{3+\sqrt{9-x^2}}$ iv. $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{10-x}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}$

1.23 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

i. $f(x)=\dfrac{1}{2-\sqrt{x^2-1}}$

ii. $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{2x-4}{(x+3)(x^2+7)}}$

iii. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}+2017}{x-10}$

iv. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}}{9-x^2}+\sqrt{x-1}$

1.24 Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

i. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-|x|}{|x|-3}}$

ii. $f(x)=\sqrt[3]{x^4-2x^2+1}+\sqrt[4]{10-x}$

iii. $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{(x-1)\sqrt{x+1}}$

iv. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x}+1}+\dfrac{x+3}{3-x}$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1.25 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=3x+4$ και $g(x)=x^2-6x+8$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

i. $f+g$ ii. $f-g$

iii. $f\cdot g$ iv. $\dfrac{f}{g}$

1.26 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3-8$ και $g(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x+2}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

i. $f\cdot g$ ii. $\dfrac{f}{g}$ iii. $\dfrac{g}{f}$

1.27 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{4}{x-2}$ και $g(x)=\dfrac{x+1}{4-x^2}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

i. $f+g$ ii. $f-g$

iii. $f\cdot g$ iv. $\dfrac{f}{g}$

1.28 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ και $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

i. $4f+7g$ ii. $f\cdot g$

iii. $f^2\cdot g$ iv. $\dfrac{f}{g}$

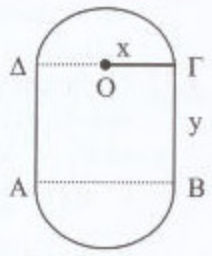
1.29 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{4x}{9-x^2}$ και $g(x)=\dfrac{4+x}{3-|x|}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

i. $3f+2g$ ii. $\dfrac{1}{f}$ iii. $\dfrac{f}{g}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1.30 Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με μήκος υποτείνουσας 6 cm έχει μια κάθετη πλευρά με μήκος x cm και την άλλη κάθετη με μήκος y cm. Να εκφράσετε το εμβαδόν και την περίμετρο τριγώνου συναρτήσει του x.

1.31 Ένα στάδιο έχει το διπλανό σχήμα. Αν η περίμετρος του σταδίου είναι 600 m και η ακτίνα του ημικυκλίου είναι x m, να βρείτε το εμβαδόν του σταδίου ως συνάρτηση του x.



1.32 Σε πείραμα σχετικό με εκπαίδευση ζώων, χρησιμοποιήθηκε ένας ποντικός, τον οποίο ανάγκασαν να διασχίσει πολλές φορές έναν λαβύρινθο σε ένα εργαστήριο. Ο χρόνος (σε λεπτά) που ο ποντικός χρειάζεται για να διασχίσει τον λαβύρινθο, δίνεται από τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 4 + \frac{14}{x}$, όπου x ο αριθμός των δοκιμών.

i. Πόσο χρόνο χρειάστηκε ο ποντικός κατά την 7η δοκιμή;

ii. Από ποια δοκιμή και μετά θα χρειαστεί 5 λεπτά ή και λιγότερο;

iii. Θα μπορέσει ποτέ να κάνει λιγότερο από 4 λεπτά;

1.33 Το τμήμα παραγωγής μιας αυτοκινητοβιομηχανίας λειτουργεί 10 ώρες ημερησίως και ο αριθμός των αυτοκινήτων που παράγει κάθε μέρα μετά από t ώρες λειτουργίας είναι:

$$N(t) = 100t - 5t^2,\ t \in [0, 10],\ t \in \mathbb{Z}$$

Το ημερήσιο κόστος K(x) σε χιλιάδες ευρώ για την παραγωγή x αυτοκινήτων είναι:

$$K(x) = 15 + 8x$$

i. Να βρείτε το ημερήσιο κόστος K, ως συνάρτηση του χρόνου λειτουργίας του τμήματος παραγωγής.

ii. Πόσες ώρες μπορεί να λειτουργεί το τμήμα παραγωγής, ώστε το ημερήσιο κόστος παραγωγής να μην υπερβαίνει τα 3.885 εκατομμύρια ευρώ;

1.34 Ένα παιδί αφήνει από το μπαλκόνι του σπιτιού του μια μπάλα να πέσει. Το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα μετά από χρόνο t περιγράφεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = 16 - t^2\ (t \to \text{sec},\ f \to \text{m})$$

Να βρείτε:

i. το ύψος που θα βρίσκεται η μπάλα μετά από 2 sec,

ii. το ύψος του μπαλκονιού,

iii. πότε θα φτάσει η μπάλα στο έδαφος.

1.35 Ένας άνθρωπος που έχει ύψος h βρίσκεται σε απόσταση 6 m από έναν φανοστάτη, ο οποίος έχει ύψος 5 m. Να εκφράσετε το μήκος της σκιάς του ανθρώπου ως συνάρτηση του ύψους του.

ΘΕΜΑΤΑ ΜΕ ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ

1.36 Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = \frac{2x + 3}{(\lambda - 1)x^2 + \lambda x + 1}$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.37 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι f που δίνονται να έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. $f(x) = \frac{x - 7}{4x^2 - 8\lambda x + 2\lambda^2 + \lambda + 3}$

ii. $f(x) = \sqrt{(\lambda - 1)x^2 + \lambda x + \lambda + 1}$

1.38 Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(f+g)(x)[(f+g)(x) - 2] + f(x)(f-g)(x) = g(x)(f-g)(x) + 2(f \cdot g)(x) - 2$$

να δείξετε ότι:

$$f(x) = 1,\ x \in \mathbb{R} \text{ και } g(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}$$

1.39 Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(2f + g)^2(x) + 2x(5x - 3g(x)) = 4f(x)(g(x) - x)$$

να δείξετε ότι:

$$f(x) = -\frac{x}{2},\ x \in \mathbb{R} \text{ και } g(x) = 3x,\ x \in \mathbb{R}$$

1.40 Να βρείτε δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$f^2(x) + g^2(x) + 5x^2 \leq 2x(f(x) - 2g(x)),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1.41 Να βρείτε τις συναρτήσεις $f + g$, $f \cdot g$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f(x) = 4x + 1$ και $g(x) = \begin{cases} 4 - x, x \geq 6 \\ -2, 2 < x < 6 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} -1, x \geq 0 \\ 2x - 3, x < 0 \end{cases}$ και

$g(x) = \begin{cases} 1 - 2x, x \geq 0 \\ x^2 - 2x, x < 0 \end{cases}$

iii. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, x \leq 2 \\ \sqrt{x}, x > 2 \end{cases}$ και

$g(x) = \begin{cases} |x - 1| + 1, 0 < x < 3 \\ -2x + 3, x \geq 3 \end{cases}$

1.42 Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = 3x^2 - 6x$$

i. Να δείξετε ότι:

$$f(x) - f(1 - x) = 3 - 6x, x \in \mathbb{R}$$

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{\sqrt{f(x) - f(1 - x)}}{3x^2 - 3}$

Ερωτησεις Κατανοησης

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ

1.43 Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.

i. Συνάρτηση είναι μια διαδικασία βάση της οποίας κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α απεικονίζεται σε ένα στοιχείο του συνόλου Β.

ii. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{3}$ είναι $A = [3, +\infty)$.

iii. Αν $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 3}}$, τότε το πεδίο ορισμού είναι $A = [3, +\infty)$.

iv. Το πεδίο ορισμού της $\dfrac{f}{g}$ εξαρτάται μόνο από την g.

v. Η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{x - 1}$$

έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \{1\}$.

vi. Η σχέση f, με τύπο $f(x) = \begin{cases} 0, x \text{ ρητός} \\ 1, x \text{ άρρητος} \end{cases}$ είναι συνάρτηση.

vii. Αν για μια συνάρτηση f, που έχει πεδίο ορισμού το $A \subseteq \mathbb{R}$, ισχύει $f(x) = f(y)$ για κάποια $x, y \in A$, τότε $x = y$.

viii. Αν οι συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο στο σύνολο Α, τότε και η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ ορίζεται πάντα στο ίδιο ακριβώς σύνολο.

ix. Αν οι συναρτήσεις f, g ορίζονται στο $\mathbb{R}$, τότε και η συνάρτηση $h(x) = \sqrt{f(x) - g(x)}$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

x. Αν $f(x) = x^2 - 1$ και $g(x) = \dfrac{1}{x + 1}$, τότε το πεδίο ορισμού της $(fg)(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = \dfrac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)} = x - 1$ είναι το $\mathbb{R}$.