ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ & ΕΜΒΑΘΥΝΣΗΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ

2.20 Αν $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$, να βρείτε:

i. τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2^3)$,

ii. τις τιμές του x για τις οποίες είναι $f(x) = -3$.

2.21 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 3x - 1$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(1)$, $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

2.22 Αν $f(x) = \eta\mu^2 x - 1$, να υπολογίσετε τις τιμές:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right),\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right),\ f(0),\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

2.23 Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} + 4, & -1 < x < 1 \\ \dfrac{x-2}{x+1}, & 1 \le x < 4 \end{cases}$$

Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις τιμές:

$f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ και $f(4)$

2.24 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} + 7, & -1 \le x < 1 \\ 4x - 2, & 1 \le x < 6 \end{cases} \text{ και}$$

$$g(x) = \begin{cases} \eta\mu^2 x - 3, & \frac{\pi}{2} \le x < \pi \\ 3\varepsilon\varphi x - 2, & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 3f(0) - 7\left(f(1) + g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + \frac{3g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2}$$

2.25 Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - \lambda x - 12}{x^2 + 2x - 3},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει $f(4) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

i. Να βρείτε:

α. το πεδίο ορισμού της f,

β. τον πραγματικό αριθμό λ.

ii. Για $\lambda = 25$:

α. να απλοποιήσετε τον τύπο της f,

β. να λύσετε την ανίσωση $f(x) \le 0$.

2.26 Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της:

$$g(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{f(x)}$$

ii. Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\Pi = f(1) - g^2(4)$$

iii. Να λύσετε:

α. την ανίσωση $f(x) > 0$,

β. τις εξισώσεις $f(x) = 2$ και $g(x) = 0$.

2.27 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + 3\beta x - 2, & 0 \le x < 3 \\ \alpha x - 2\beta, & 3 \le x < 7 \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Αν γνωρίζετε ότι $f(1) = 2$ και $f(2) = f(3)$, να προσδιορίσετε τα α, β.

ΧΑΡΑΞΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

2.28 Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων.

i. $f(x) = 2x$

ii. $f(x) = 6 - 3x$

iii. $f(x) = 2x + 4$

2.29 Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων.

i. $f(x) = x^2 + 1$

ii. $f(x) = (x + 1)^2$

iii. $f(x) = (x - 1)^2 + 2$

ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ C_f ΜΕ ΑΞΟΝΕΣ

2.30 Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες x΄x και y΄y για τις παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = x^2 + x - 6$

ii. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

iii. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x}$

iv. $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x + 6}{x^2 - 4}$

2.31 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες x΄x και y΄y για τις παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = |x| - 4$

ii. $f(x) = \sqrt{x^4 - 13x^2 + 36}$

iii. $f(x) = \sqrt{x} - x + 2$

2.32 Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της παρακάτω συνάρτησης με τους άξονες x΄x και y΄y.

$$f(x) = \begin{cases} x - 4, & x \le 2 \\ x^2 - 3x, & x > 2 \end{cases}$$

2.33 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x - 1}{x}\sqrt{x}$$

Να βρείτε:

i. το πεδίο ορισμού Α της f,

ii. τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

2.34 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^2 + \kappa x}{x - 2},\ \kappa \in \mathbb{R}$$

διέρχεται από το σημείο Α(3, 6).

i. Να βρείτε:

α. το πεδίο ορισμού της f,

β. το κ.

ii. Για $\kappa = -1$, να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = x + 2$$

2.35 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$f(x) = x^3 - \alpha x^2 - \beta x - 2,\ x \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

τέμνει τον άξονα x΄x σε σημεία με τετμημένες 1 και −1.

i. Να βρείτε τα α, β.

ii. Για $\alpha = -2$ και $\beta = 1$:

α. να παραγοντοποιήσετε τον τύπο της f,

β. αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(\lambda - 2, 0)$, να υπολογίσετε το λ,

γ. να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες,

δ. να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

2.36 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^2 + \alpha|x| + \beta}{|x| - 2},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

διέρχεται από τα σημεία Α(1, −2) και Β(0, −3).

i. Να βρείτε:

α. το πεδίο ορισμού της f,

β. τα α, β.

ii. Για $\alpha = -5$ και $\beta = 6$

α. να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες,

β. να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$.

ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ C_f, C_g

2.37 Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f, C_g για τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων:

i. $f(x) = 3x - x^2$, $g(x) = 3x^2 - x^3$

ii. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$, $g(x) = \dfrac{3}{2}x - 1$

iii. $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x}$

iv. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$

2.38 Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f, C_g για τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων:

i. $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$, $g(x) = -\frac{11}{x}$

ii. $f(x) = x^2 - 3|x| + 1$, $g(x) = 2|x| - 5$

2.39 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = |x^3| - 5x|x|$$

i. Να βρείτε:

α. το πεδίο ορισμού της f,

β. τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x΄x.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.

iii. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -6|x|$.

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ C_f ΚΑΙ C_g

2.40 Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η C_f είναι πάνω από τη C_g όταν:

i. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 3$,

$g(x) = x^2 - x - 3$

ii. $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

2.41 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους:

$$f(x) = x - 2 \text{ και } g(x) = \frac{x^3 - 3}{x^2 + 1}$$

Να προσδιορίσετε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων f και g.

2.42 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους:

$f(x) = x^3$ και $g(x) = 7x - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Το σημείο A(1, 1) είναι ένα σημείο τομής των C_f και C_g.

i. Να δείξετε ότι $\alpha = 6$.

ii. Για $\alpha = 6$, να βρείτε:

α. τα κοινά σημεία των C_f και C_g,

β. το διάστημα στο οποίο η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g.

2.43 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους:

$$f(x) = 3x^3 - \alpha x^2 + 2x + 2\alpha + \beta \text{ και}$$

$$g(x) = -x^3 + (\beta + 1)x^2 + x + 5,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

των οποίων οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στον άξονα y΄y και στην ευθεία $x = -\frac{1}{2}$.

i. Να βρείτε τα α, β.

ii. Για $\alpha = 2$ και $\beta = 1$, να βρείτε το διάστημα στο οποίο η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g.

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ C_f ΜΕ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ x΄x

2.44 Να βρείτε τις τιμές του x, ώστε η C_f να είναι πάνω από τον άξονα x΄x για τις παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = x^2 + 10x + 9$

ii. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

iii. $f(x) = 27 + \sqrt{x}$

2.45 Να βρείτε τις τιμές του x, ώστε η C_f να είναι κάτω από τον άξονα x΄x για τις παρακάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$

ii. $f(x) = x^2 - 16$

iii. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

iv. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

2.46 Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$f(x) = x - \alpha\sqrt{x} + \alpha - 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο A(9, 2).

i. Να βρείτε:

α. το πεδίο ορισμού της f,

β. την τιμή του πραγματικού αριθμού α.

ii. Για $\alpha = 3$, να βρείτε:

α. τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x΄x,

β. το διάστημα στο οποίο η C_f είναι πάνω από τον άξονα x΄x,

γ. τα σημεία της C_f με τεταγμένη 2.

2.47 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = x^3 + \alpha x + \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 12)$ και $B(3, 12)$.

i. Να βρείτε τα α, β.

ii. Για $\alpha = -7$ και $\beta = 6$, να βρείτε:

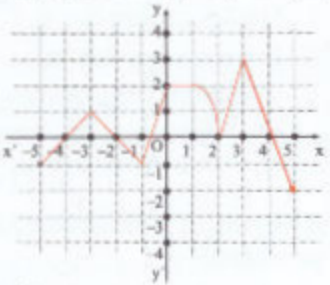
α. τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες,

β. το διάστημα στο οποίο η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$,

γ. την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο $M(\lambda + 1, -6\lambda)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟ ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

2.48 Στο παρακάτω διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f



Να βρείτε:

i. το πεδίο ορισμού της,

ii. το σύνολο τιμών της,

iii. τις τιμές της f στα σημεία:

$-4, 0, 1, 2$ και 5

iv. τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$,

v. τις λύσεις των εξισώσεων:

α. $f(x) = 0$ β. $f(x) = -1$

vi. τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται:

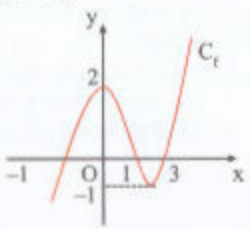
α. πάνω από τον άξονα $x'x$

β. κάτω από τον άξονα $x'x$

vii. τα διαστήματα στα οποία ισχύει:

α. $f(x) > 1$ β. $-1 < f(x) \leq 2$

2.49 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, η οποία ορίζεται στο $\mathbb{R}$.



Ο τύπος της είναι:

$$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ x \in \mathbb{R}$$

i. Να βρείτε τα α, β, γ.

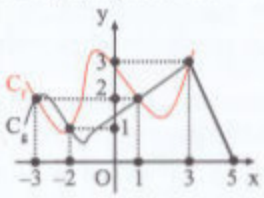
ii. Να λύσετε:

α. την εξίσωση $f(x) = 0$,

β. την εξίσωση $f(x) = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$,

γ. την ανίσωση $f(x) < 0$.

2.50 Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, οι οποίες ορίζονται στο $\mathbb{R}$.



Να λύσετε:

i. τις εξισώσεις:

α. $g(x) = 0$

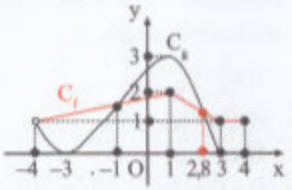
β. $f(x) = g(x)$

γ. $f(x)g(x) = 0$

ii. την ανίσωση:

$$f(x) > g(x)$$

2.51 Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, οι οποίες ορίζονται στο $\mathbb{R}$.



i. Να βρείτε:

α. το πεδίο ορισμού των f, g,

β. το σύνολο τιμών των f, g.

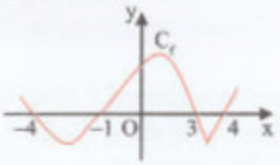
ii. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $g(x) = 0$ β. $f(x) = g(x)$, $x < 1$

iii. Να λύσετε την ανίσωση:

$f(x) < g(x)$

2.52 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, η οποία είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$.

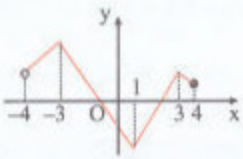


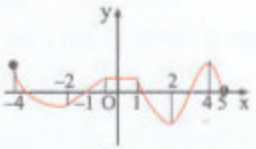
i. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$

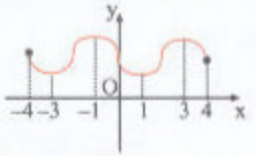
ii. Να κάνετε πίνακα προσήμου της f.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

2.53 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία κάθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα και σταθερή.

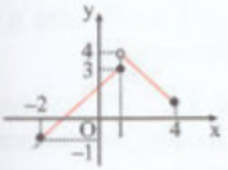


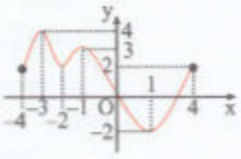


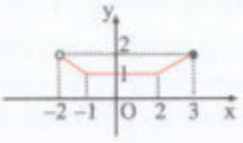


ΑΚΡΟΤΑΤΑ

2.54 Να προσδιορίσετε τα ολικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων, καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.







2.55 Δίνεται η συνάρτηση:

$f(x) = x^2 - 6x + 10$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να δείξετε ότι η f γράφεται και με τη μορφή $f(x) = (x - 3)^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

iii. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

iv. Να προσδιορίσετε τα ακρότατα της f, καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

ΘΕΜΑΤΑ ΜΕ ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ

2.56 Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 12)$, $B(1, 2)$ και τέμνει τον άξονα y΄y σε σημείο με τεταγμένη 14. Να δείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

2.57 Έστω οι συναρτήσεις f, g, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσες σε αυτό.

i. Να δείξετε ότι η $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να δείξετε ότι η f + g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii. Η f δεν μπορεί να είναι άρτια.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x} + x^3 < 2$.

2.58 Μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(0, 2) και Β(2, −3).

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(3x^2 + 2x - 1) > 2$$

2.59 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^3 - 9x}{|x| + 1}$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και της $\frac{1}{f}$.

ii. Να βρείτε το f(1) και να αποδείξετε ότι $5f(f(1)) + 7f(-1) = 0$

iii. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

iv. Να βρείτε το σημείο στο οποίο η συνάρτηση:

$$h(x) = 3f(x) - 4f(-x) + \eta\mu(3x) + 2$$

τέμνει τον άξονα y΄y.

2.60 Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) - f^2(x) + 3f(x) = -x^2 + 5x - 7$$

Να δείξετε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2.61 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$f(5 - x) + f(5 + x) = x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ

2.62 Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.

i. Όλες οι συναρτήσεις έχουν ακρότατα.

ii. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(3, +\infty)$, τότε θα είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

iii. Αν για μία γνησίως μονότονη συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, ισχύει f(2015) > f(2017), τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

iv. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα (α, β), τότε δεν παρουσιάζει ακρότατα στο (α, β).

v. Αν η C_f τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο σημεία, τότε η f δεν είναι σίγουρα γνησίως μονότονη.

vi. Αν ισχύει $f(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, τότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο $\mathbb{R}$.

vii. Αν η ανίσωση f(x) > 0 δεν έχει λύση, τότε η γραφική παράσταση της f τέμνει σε ένα τουλάχιστον σημείο τον άξονα x΄x.

viii. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και −f είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y΄y.

ix. Το σημείο Μ(α, β) ανήκει στη γραφική παράσταση της f, αν και μόνο αν f(β) = α.

x. Αν $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$, τότε f(0) = 0.