Εφαρμογές Εμπέδωσης & Εμβάθυνσης

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΟΡΙΟ

3.18 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\frac{x^6-x^3}{x^3-1}$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

3.19 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

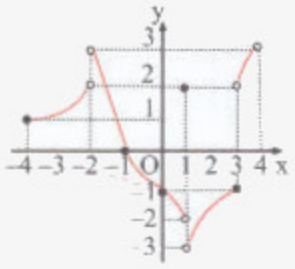
$$f(x)=\begin{cases} x^3, & -1\le x<1 \\ 3x-2, & 1\le x<2 \end{cases}$$

i. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

ii. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

α. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ β. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ γ. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

3.20 Δίνεται συνάρτηση f, η οποία έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια και τιμές ορίζονται:

i. $f(-4)$, $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$

ii. $f(-2)$

iii. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

iv. $f(3)$

v. $f(4)$, $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

3.21 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα:

i. $\lim\limits_{x\to 2}[(x-1)^{2017}(x^2+x-1)]$

ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+x^2+x+1}{x^2+1}$

iii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+x+3}+x}{x^2+x-1}$

iv. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2000}-3(x-1)^{2017}-1}{2\sqrt{x-1}-3}$

3.22 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα:

i. $\lim\limits_{x\to -1}[(3x^6-4x^2+2)^{2016}(2-x)]$

ii. $\lim\limits_{x\to 5}(-2x^2+7x-\sqrt[3]{x^2+2})$

iii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x^2+2x-7}+2x}{\sqrt{2x}-3x+1}$

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\eta\mu x-3\sigma\upsilon\nu x}{\varepsilon\varphi x-1}$

3.23 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, για τις οποίες ισχύει:

$$\lim_{x\to -2} f(x)=-3 \text{ και } \lim_{x\to -2} g(x)=1$$

Να βρείτε τα:

i. $\lim\limits_{x\to -2}[2f(x)-3g(x)]$

ii. $\lim\limits_{x\to -2}[3g^2(x)\cdot\sqrt{|f(x)|+1}]$

iii. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2f^2(x)+7}-3g(x)}{g(x)-2}$

iv. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{g^3(x)+|f(x)|}+f^2(x)}{|f(x)-3|+g(x)-1}$

ΜΟΡΦΗ $\frac{0}{0}$ ΣΕ ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

3.24 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{4-x}$

ii. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{x^2+2x}$

iii. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}$

iv. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(2x-3)^2-9}{4-(x-1)^2}$

3.25 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+4x+3}{-x^2-2x+3}$

ii. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{2x^2-7x+3}$

iii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^4-16}$

3.26 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^3-1}$

ii. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3-7x+6}{x^4-81}$

3.27 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-2x+1}$

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+7x-2}{2x^2-5x+2}$

3.28 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-3x+2}\right)$

ii. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{6}{1-x^3}\right)$

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2+x+1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$

3.29 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\frac{1}{x}-x}{2x+1-\frac{1}{x}}$

ii. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}$

ΜΟΡΦΗ $\frac{0}{0}$ ΣΕ ΑΡΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

3.30 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{8}}{x-8}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{2x}$

iii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$

3.31 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

ii. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$

3.32 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{3x^2+4}+2x}$

ii. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3\sqrt{x^2+7}+4x}{x+3}$

3.33 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+2}+x-3}{x-\sqrt{x}}$

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-4x+3}$

3.34 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-1}}$

ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{2x^2+x-3}$

3.35 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$

3.36 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-x}}$

ii. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}-x+3}{\sqrt{x-3}}$

3.37 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

ΜΟΡΦΗ $\frac{0}{0}$ ΣΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

3.38 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x+\varepsilon\varphi x}{\eta\mu x}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2x-1}{\eta\mu 2x}$

iii. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+3\eta\mu x-x\eta\mu x-3}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

3.39 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\eta\mu^4 x-\sigma\upsilon\nu^4 x}{\varepsilon\varphi x-1}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}}{\eta\mu^2 x}$

iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x-x-\eta\mu x}{\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu x+1}$

ΟΡΙΑ & ΑΠΟΛΥΤΑ

Περίπτωση 1η

3.40 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 1}|3x-7|$

ii. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|3x-5|-|2x-10|}{x^3-|1-x|}$

3.41 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5-|x-1|-3|x-3|}{|2-x|-3}$

ii. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{|x^2-9|-2|x^3-1|+3}{|x-1|+2}$

Περίπτωση 2η

3.42 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2|x|-|x-1|-3|x-3|}{|2x-1|-3}$

ii. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x^2-16|-2|x^2-4|+3}{|x-1|-2}$

3.43 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x^2-2x|-3}{x^2-4x+3}$

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2|x+1|+5|x-3|-3}{x^2+2|x-3|-3|x|}$

ΟΡΙΑ & ΚΛΑΔΩΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

3.44 Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}, & x\neq 1\\ 7, & x=1\end{cases}$$

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

3.45 Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+4}-1}, & x\neq -3\\ 6, & x=-3\end{cases}$$

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$.

ΘΕΜΑΤΑ ΜΕ ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ

3.46 Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+x-2}{\sqrt{x^2+3x}-2}=4$$

Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x\to 1} f(x)$

ii. $\lim_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)+f(x)-2}{\sqrt{4f(x)}-2}$

iii. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2f(x)+1-f(x)-x^2}{xf(x)+1-f(x)-x}$

3.47 Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-x+6}{x+2}=7$$

Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x\to -2} f(x)$

ii. $\lim_{x\to -2}\dfrac{f(x)+8}{x^2+2x}$

iii. $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3f(x)+8f(x)}{3x^2+7x+2}$

3.48 Δίνονται οι συναρτήσεις:
f, g: $(4, 5)\cup(5, 6)\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει ότι:

$\lim_{x\to 5}[(x-5)g(x)]=2$ και $\lim_{x\to 5}\dfrac{f(x)}{x^2-4x-5}=7$

Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to 5}[f(x)\cdot g(x)]$$

3.49 Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\frac{3x^2-\alpha x+2\beta}{x^2-3x+2},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\lim_{x\to 1} f(x)=7$ να βρείτε τα α, β∈ℝ.

iii. Για α = 13 και β = 5, να βρείτε τα όρια:

α. $\lim_{x\to\frac{10}{3}}\dfrac{f(x)}{9x^2-100}$

β. $\lim_{x\to 2}[(\sqrt{x+2}-2)f(x)]$

iv. Για α = 13 και β = 5, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα x΄x.

3.50 Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\frac{2\gamma x^2+3\beta(x+1)+\alpha}{2x^3-3x^2+x},\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Αν επιπλέον ισχύει ότι α + 6β + 2γ = 0 να βρείτε το $\lim_{x\to 1} f(x)$.

3.51 Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}}{x^2-1}$

ii. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^2}+\sqrt{x+8}-5}{x^3-1}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ

3.52 Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.

i. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$, τότε το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii. Αν $\lim_{x\to 0} f(x)=\ell$ και $\lim_{x\to 0} g(x)=m$, τότε $\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\ell+m$.

iii. Ισχύει πάντα ότι:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)$$

iv. $\lim_{x\to 2} 3=3$

v. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$, τότε $\lim_{x\to x_0}(f(x)+x)=\ell$.