Εφαρμογές Επιπεδώσης & Εμβαθύνσης

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΑΠΟ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

4.7 Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.

4.8 Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ \dfrac{2}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια στα σημεία $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ και $x_3 = 1$.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΛΑΔΩΤΗΣ

4.9 Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 + 5x - 2}{x + 2}, & x \neq -2 \\ -7, & x = -2 \end{cases}$$

i. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$.

ii. Να μελετήσετε τη συνέχεια της f στο $x_0 = -2$.

4.10 Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x + 4} - 1}, & -4 < x \neq -3 \\ 6, & x = -3 \end{cases}$$

Να μελετήσετε τη συνέχεια της f στο $x_0 = -3$.

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΑΠΟ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

4.11 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2\alpha x + x - \alpha^2, & x \neq 1 \\ \alpha - 1, & x = 1 \end{cases}$$

Να βρείτε την τιμή $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

4.12 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ \alpha - 2, & x = 1 \end{cases}$$

i. Να υπολογίσετε:

α. τις τιμές $f(-2)$ και $f(0)$,

β. το $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$,

γ. την τιμή $\alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

ii. Είναι η f συνεχής στο $x_1 = 2$;

4.13 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3\lambda x + 2\lambda^2}{x + \lambda}, & x \neq -\lambda \\ \lambda^2, & x = -\lambda \end{cases}$$

Να βρείτε την τιμή $\lambda \in \mathbb{R}$, για την οποία η f είναι συνεχής στο $x_0 = -\lambda$.

4.14 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{x^2 - 4}, & 0 < x \neq 2 \\ \alpha^2, & x = 2 \end{cases}$$

Να βρείτε την τιμή $\alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

4.15 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - \alpha x + \beta}{x - 3}, & x \neq 3 \\ \beta - 3\alpha + 6, & x = 3 \end{cases}$$

Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(3, −3) και είναι συνεχής στο $x_0 = 3$, να βρείτε τα α, β.

4.16 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x - 3\beta}{\sqrt{x^2+8}-3}, & x \neq 1 \\ 9, & x = 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τα α, β∈ℝ, για τα οποία η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΟΥ & ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ

4.17 Δίνεται συνεχής συνάρτηση f: ℝ→ℝ, για την οποία ισχύει ότι:

$$xf(x) = 2f(x) + 2x^2 - 3x - 2$$

για κάθε x∈ℝ

i. Να δείξετε ότι $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-2}{x-2}$, για κάθε $x \neq 2$.

ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

iii. Να βρείτε τον τύπο της f.

4.18 Δίνεται συνεχής συνάρτηση f: ℝ→ℝ, για την οποία ισχύει ότι:

$xf(x) + 2 = \sqrt{x^2+3} + f(x)$, για κάθε x∈ℝ

Να βρείτε τον τύπο της f.

4.19 Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = 2$ ώστε:

$$f(x)(x-2) = 5x^2 + 3x - 26$$

για κάθε x∈ℝ − {2}

Να βρείτε το f(2).

4.20 Δίνεται συνεχής συνάρτηση:

f: [−4, +∞)→ℝ

ώστε:

$f(x)(x^2-4x) = (x^2-3x-4)(\sqrt{x+4}-2)$, για κάθε x∈[−4, +∞)

Να βρείτε το f(0) και το f(4).

ΘΕΜΑΤΑ ΜΕ ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ

4.21 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(2, 1). Να βρείτε τα:

i. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-2}{\sqrt{f^2(x)+3}}$

ii. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-1}{f^2(x)-3f(x)+2}$

iii. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{f(x)}-1}{f^2(x)-1}$

4.22 Δίνεται συνάρτηση f: ℝ→ℝ, για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-\sqrt{x^2+9}}{x-4} = 2017$$

i. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(4, 5), να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 4$.

ii. Να βρείτε το:

$$\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$

4.23 Αν οι συνάρτησεις f, g είναι συνεχείς στο $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ και ισχύει ότι:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)\sigma\upsilon\nu^2 x}{2-2\eta\mu x}, & x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

να δείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

Ερωτησεις Κατανοησης

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ

4.24 Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.

i. Αν η f ορίζεται στο x_0, τότε ισχύει πάντα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

ii. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε το x_0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

iii. Αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε και η $\frac{1}{f}$ είναι συνεχής στο x_0.

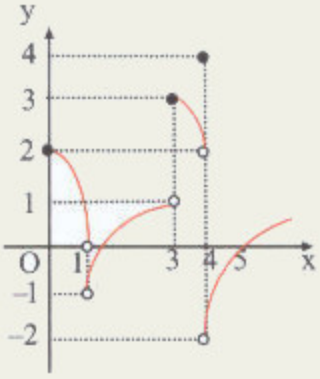
iv. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0$.

v. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) - g(x)] = 0$.

vi. Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$ έχει δύο σημεία ασυνέχειας στο $x_1 = -1$ και στο $x_2 = 1$.

vii. Αν η συνεχής συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα, τότε η γραφική της παράσταση είναι μη διακοπτόμενη γραμμή.

4.25 Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



i. Η f είναι ασυνεχής στο $x_1 = 1$.

ii. Η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 3$.

iii. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(4, +\infty)$.

iv. Η f είναι συνεχής στο $x_2 = 0$.

Φύλλο Αξιολόγησης

Συναρτήσεις – Γραφική Παράσταση – Μονοτονία – Ακρότατα – Όρια – Συνέχεια

Θέμα Α

Α1. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ;

Α2. Πότε μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, παρουσιάζει στο $x_1 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Α3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο πεδίο ορισμού της;

Α4. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.

i. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

ii. Η διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο ενός συνόλου Β είναι συνάρτηση.

iii. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

iv. Η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης αναφέρεται μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού της.

v. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_1 και μια συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_2, τότε η συνάρτηση f + g είναι συνεχής και στο x_1 και στο x_2.

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

Β1. Να βρείτε:

α. το πεδίο ορισμού της f,

β. αν υπάρχουν, τις τιμές f(1), f(–1) και f(–2),

γ. το $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$.

Β2. Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 2x.

Β3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

Θέμα Γ

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^2 + \alpha|x| + \beta}{|x| - 1},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

διέρχεται από το σημείο Α(2, –1) και τέμνει τον άξονα y΄y σε σημείο με τεταγμένη –3.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Γ2. Να βρείτε τα α, β.

Γ3. Για $\alpha = -4$ και $\beta = 3$ να βρείτε:

α. τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες,

β. τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$,

γ. τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = 3$.

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{x - 4}$$

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f.

Δ2. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ \sqrt{\alpha} - \alpha, & x = 4 \end{cases}, \alpha > 0$$

Να βρείτε το α, ώστε η g να είναι συνεχής στο $x_0 = 4$.

Δ4. Να βρείτε το:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 g(x) + 16 - 16g(x) - x^2}{\sqrt{x^2 + 9} - x - 1}$$