Διδάσκοντας τα κλάσματα με αναπαραστατικά μοντέλα. Η περίπτωση των ράβδων κλασμάτων (fraction tiles).

Teaching fractions with representational models. The case of fraction tiles.

Γεώργιος Αγγελόπουλος, *Εκπαιδευτικός Π.Ε., Μ.Δ.Ε. «Επιστήμες της Αγωγής» ΕΑΠ, angeological@gmail.com*

Νικόλαος Αγγελόπουλος, *Εκπαιδευτικός Π.Ε., Μ.Δ.Ε. «Επιστήμη και Τεχνολογία Υπολογιστών» Πανεπιστήμιο Πατρών-Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, aggelonik@gmail.com*

Ιωάννα Μπακοπούλου, *Εκπαιδευτικός Π.Ε., Μ.Δ.Ε. «Δημιουργική Γραφή» ΕΑΠ, iobakopoulou@gmail.com*

Georgios Angelopoulos, *Primary Education teacher, M.Sc. "Education Sciences" Hellenic Open University, angeological@gmail.com*

Nikolaos Angelopoulos, *Primary Education teacher, M.Sc. "Computer Science and Technology" University of Patras-Computer Engineering and Informatics Department, aggelonik@gmail.com*

Ioanna Bakopoulou, *Primary Education teacher, M.Sc. "Creative Writing" Hellenic Open University, iobakopoulou@gmail.com*

Abstract: The aim of this article is to define the concept of the model for the subject of Mathematics and its importance in the teaching and learning process. First of all, reference is made to the mathematical representational models used to teach fractions (area models, set models, length or number line models). Then, special reference is made to the representational model of fraction tiles, also called fraction strips, through specific teaching examples. The examples are given highlight the added value of fraction tiles to the understanding of basic and complex mathematical concepts for fractions.

Keywords: mathematical models, area models, set models, length or number line models, fraction strips or fraction tiles

Περίληψη: Σκοπός του παρόντος άρθρου είναι να οριοθετήσει την έννοια του μοντέλου για το γνωστικό αντικείμενο των Μαθηματικών, καθώς και να αναδείξει τη σημασία του στη διδακτική και μαθησιακή διαδικασία. Αρχικά, παρουσιάζονται τα μαθηματικά μοντέλα αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται για τη διδασκαλία των κλασματικών αριθμών (μοντέλα εμβαδού ή περιοχής, μοντέλα συνόλων, μοντέλα μήκους ή μέτρησης). Στη συνέχεια γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στο αναπαραστατικό μοντέλο των λωρίδων/ράβδων κλασμάτων (fraction strips or fraction tiles) και παρατίθενται συγκεκριμένα διδακτικά παραδείγματα για την αξιοποίησή του. Μέσω αυτών των παραδειγμάτων τονίζεται η προστιθέμενη αξία που προσφέρει η εφαρμογή του μοντέλου των ράβδων κλασμάτων στην κατανόηση βασικών και σύνθετων μαθηματικών εννοιών στο πλαίσιο της διδασκαλίας των κλασμάτων.

Λέξεις κλειδιά: μαθηματικά μοντέλα, μοντέλα εμβαδού ή περιοχής, μοντέλα συνόλων, μοντέλα μήκους ή μέτρησης, λωρίδες/ράβδοι κλασμάτων

1. Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια έχει ευρέως αναγνωριστεί από τις σύγχρονες θεωρήσεις στο πεδίο της διδακτικής των Μαθηματικών ότι ένα σύγχρονο Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά οφείλει να μη λειτουργεί περιοριστικά, δίνοντας έμφαση μόνο στην απλή γνώση και την εφαρμογή εννοιών και διαδικασιών. Αντίθετα, κεντρική θέση στη διάρθρωσή του θα πρέπει να κατέχει η προσφορά ευκαιριών στους/στις μαθητές/τριες, ώστε να επιλύουν με αποτελεσματικότητα προβλήματα μέσα στα Μαθηματικά και μέσω των Μαθηματικών (Τζεκάκη, 2010).

Αν τα παραπάνω μεταφραστούν με όρους καθημερινής διδακτικής πρακτικής, η διδασκαλία των Μαθηματικών δεν είναι απλώς ένα ζήτημα μεταφοράς πληροφοριών ούτε συνιστά παθητική απορρόφηση πληροφοριών από την/τον εκπαιδευτικό ή το σχολικό εγχειρίδιο. Ο/Η μαθητής/τρια είναι ο/η πρωταγωνιστής/στρια της μαθησιακής διαδικασίας και είναι αυτός/ή που «παράγει» και δεν «καταναλώνει» γνώση.

Παράλληλα, η οργάνωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι ωφέλιμο να εμπλουτίζεται με στοχευμένες δραστηριότητες, καθώς και προβληματικές καταστάσεις που θα λειτουργούν ως μέσο για την ανακάλυψη και οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης από τον/τη μαθητή/τρια (Κλιάπης & Κασσώτη, 2005).

2. Αναπαραστατικά μοντέλα στη διδασκαλία των κλασμάτων

Το κλάσμα είναι μια από τις θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες που περιλαμβάνουν τα σύγχρονα Προγράμματα Σπουδών. Έρευνες έχουν αναδείξει το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί παρότι διαθέτουν επαρκή διδακτικό χρόνο για τη διδασκαλία της συγκεκριμένης έννοιας, οι μαθητές/τριες δυσκολεύονται να την κατανοήσουν (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2005· Doğan & Işık -Tertemiz, 2019· Doğan & Işık -Tertemiz, 2018).

Ένας σημαντικός παράγοντας που διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών και συμβάλλει στην επίτευξη των διδακτικών στόχων των νέων Προγραμμάτων Σπουδών είναι, μεταξύ άλλων, η αξιοποίηση των αναπαραστατικών μοντέλων. Σύμφωνα με την υπάρχουσα βιβλιογραφία, τα αναπαραστατικά μοντέλα βοηθούν τους/τις μαθητές/τριες να οικοδομήσουν και να κατανοήσουν ευκολότερα σύνθετες μαθηματικές έννοιες (Cramer, Post & Del Mas, 2002· Lemonidis & Iliadou, 2016· Nishida, 2008).

Ειδικότερα, η κατανόηση των κλασματικών αριθμών από τους/τις μαθητές/τριες είναι εφικτό να επιτευχθεί μέσω της μάθησης με συνεχείς και διακριτές αναπαραστάσεις για τη μοντελοποίηση κλασμάτων (Behr, Wachsmuth, & Post, 1988· Martin, Svihla, & Smith, 2012· Soni & Okamoto, 2020). Μάλιστα, οι μαθητές/τριες είναι καλό να εκτίθενται σε πολλαπλά μοντέλα και να αναπτύσσουν αντιλήψεις που τους/τις επιτρέπουν να μεταβαίνουν μεταξύ διαφορετικών μορφών αναπαραστάσεων που αφορούν κλάσματα (Behr, et al., 1988· Lesh, Post, & Behr, 1987· Tsai & Li, 2017· Zhang, Clements, & Ellerton, 2015). Προς επίρρωση των ανωτέρω, η Lamon (2001) σημειώνει ότι η αδυναμία μοντελοποίησης ή αναπαράστασης των κλασμάτων μπορεί να αποτελεί ένδειξη έλλειψης εννοιολογικής κατανόησης.

Η περιδιάβαση στη σύγχρονη βιβλιογραφία αναδεικνύει τρεις κατηγορίες αναπαραστατικών μοντέλων (Εικόνα 1) για τη διδασκαλία των κλασμάτων: μοντέλα εμβαδού ή περιοχής, μοντέλα συνόλων και μοντέλα μήκους ή μέτρησης (Petit, Laird, & Marsden, 2010· Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2013).

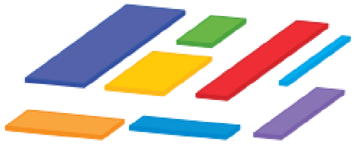
Εικόνα 1. Τρία διαφορετικά αναπαραστατικά μοντέλα για το κλάσμα ½

Δυστυχώς, τα σχολικά εγχειρίδια τείνουν να χρησιμοποιούν μόνο μοντέλα εμβαδού ή περιοχής (Hodges, Cady, & Collins, 2008). Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές συχνά δεν έχουν τη δυνατότητα να διερευνήσουν τα κλάσματα με τη χρήση διαφορετικών αναπαραστατικών μοντέλων (Clarke, Clarke, & Roche, 2011).

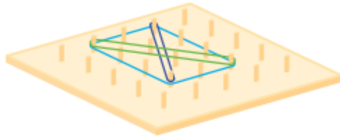
2.1. Μοντέλα εμβαδού ή περιοχής

Αναφορικά με τα μοντέλα εμβαδού ή αλλιώς περιοχής χρησιμοποιούνται κατά βάση για τη μέτρηση και σύγκριση εμβαδών (Σταματόπουλος, 2011). Πρόκειται για μια επιφάνεια ή περιοχή που υποδιαιρείται σε μικρότερα μέρη και κάθε μέρος μπορεί να συγκριθεί με το όλο (Van de Walle, 2005). Το κλάσμα δείχνει την επιφάνεια που καλύπτουν τα μέρη σε σχέση με το όλο της επιφάνειας. Η Εικόνα 2 παρουσιάζει μια ποικιλία μοντέλων αυτής της κατηγορίας.

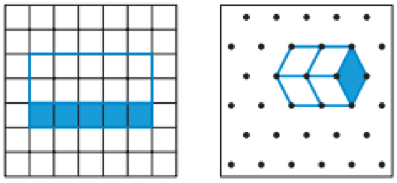
Κυκλικοί δίσκοι ή κυκλικοί τομείς (κομμάτια κυκλικής «πίτας»)



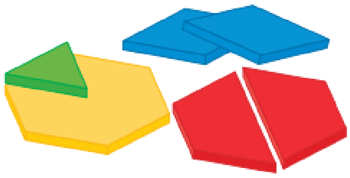
Ορθογώνιες περιοχές



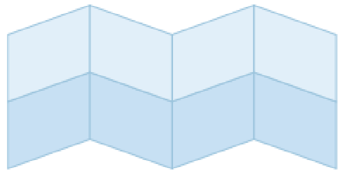
Τετράδες σε έναν γεωμετρικό πίνακα



Σχέδια σε χαρτί με τετραγωνάκια ή χαρτί με κουκκίδες



Σχήματα διαφορετικού μεγέθους (pattern blocks)



Διπλωμένο χαρτί

Εικόνα 2. Μοντέλα Εμβαδού (Van de Walle, 2007)

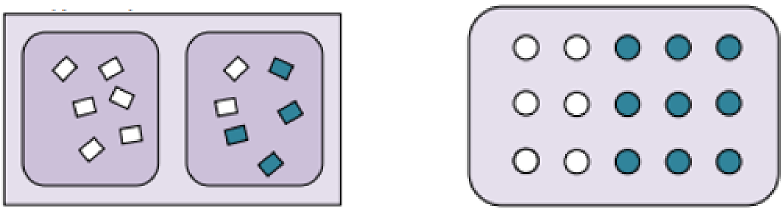
Από τα παραπάνω μοντέλα εμβαδού αυτό που χρησιμοποιείται περισσότερο στα σχολικά εγχειρίδια είναι οι κυκλικοί δίσκοι-τομείς και οι ορθογώνιες περιοχές, καθώς εστιάζουν στην έννοια του κλάσματος ως μέρος-όλο (Cramer, Wyberg, & Leavitt, 2008).

2.2. Μοντέλα συνόλων

Σύμφωνα με τον Van de Walle (2005), το όλο στα μοντέλα συνόλων νοείται ως σύνολο αντικειμένων, ενώ τα υποσύνολά του συνιστούν τα κλασματικά μέρη (π.χ. τα δύο χελιδόνια είναι τα 2/3 ενός συνόλου τριών χελιδονιών). Το σύνολο τρία στο συγκεκριμένο παράδειγμα αντιπροσωπεύει το όλο ή την ακέραιη μονάδα (Εικόνα 3).

Εικόνα 3. Μοντέλο συνόλου

Επομένως, σε αυτήν την κατηγορία, όπως βλέπουμε στην Εικόνα 4, μπορούν να περιλαμβάνονται σύνολα διαφόρων υλικών ή εικονικών αναπαραστάσεων (π.χ. σύνολα από μολύβια, από βιβλία, από τετράγωνα χαρτιά, από δίχρωμα πούλια κ.ά.)

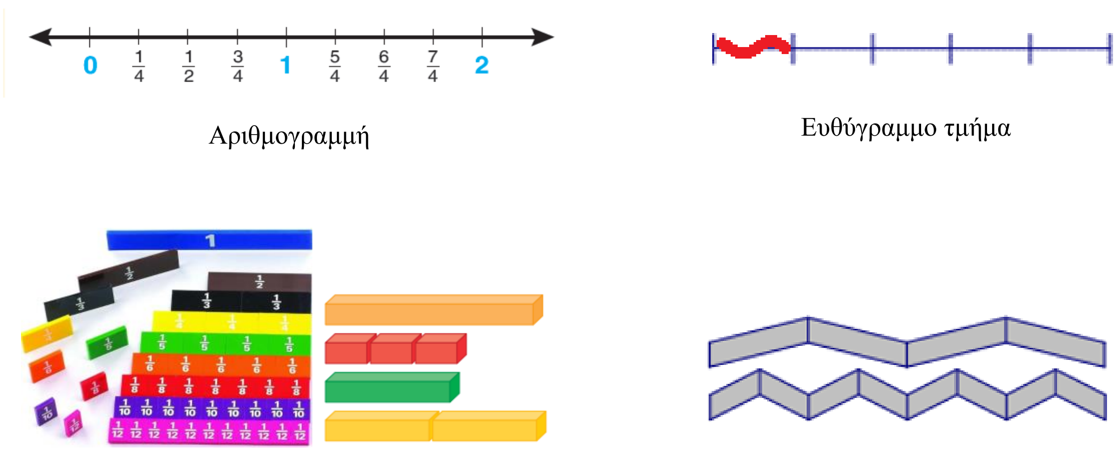


Εικόνα 4. Σύνολα από έγχρωμα τετράγωνα χαρτιά ή από δίχρωμα πούλια (Σταματόπουλος, 2011)

Επειδή η χρήση αυτών των μοντέλων περιλαμβάνει τη δυνατότητα να σκέφτεται κανείς πάνω σε ένα κλασματικό μέρος ενός συνόλου διαφόρων αντικειμένων, οι μαθητές/τριες, ειδικότερα των μικρότερων τάξεων, δυσκολεύονται στην κατανόησή τους (Petit et. al., 2010· Van de Walle, 2007). Παρ' όλα αυτά, τα μοντέλα συνόλων συμβάλλουν στη συγκρότηση σημαντικών συνδέσεων με πολλές καθημερινές εφαρμογές των κλασμάτων.

2.3. Μοντέλα μήκους ή μέτρησης

Τα μοντέλα μήκους ή μέτρησης μοιάζουν αρκετά με τα μοντέλα εμβαδού. Η διαφορά τους έγκειται στο γεγονός ότι συγκρίνονται μήκη αντί για εμβαδά (Σταματόπουλος, 2011· Van de Walle, 2005). Στα συγκεκριμένα μοντέλα συγκαταλέγονται τα ευθύγραμμα τμήματα, οι λωρίδες/ράβδοι κλασμάτων (fraction strips or fraction tiles), οι ράβδοι (rods) του Cuisenaire, η αριθμογραμμή και οι διπλωμένες λωρίδες χαρτιού (Εικόνα 5).



Εικόνα 5. Μοντέλα μήκους ή μέτρησης για κλάσματα (Σταματόπουλος, 2011· Van de Walle, 2007)

Παρατηρώντας την αριθμογραμμή στην Εικόνα 5 είναι εμφανές ότι το όλο είναι η μονάδα του μήκους, τα ίσα μέρη ορίζονται από ίσες αποστάσεις και το κλάσμα δείχνει τη θέση ενός σημείου. Σύμφωνα με την Κολέζα (2000), εναλλακτικός τρόπος αναπαράστασης της αριθμογραμμής είναι το κουτί των κλασμάτων (Εικόνα 6).

1											
½	½										
1/3	1/3	1/3									
¼	¼	¼	¼								
1/5	1/5	1/5	1/5	1/5							
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6						
1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7					
1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8				
1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9			
1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10		
1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	
1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12

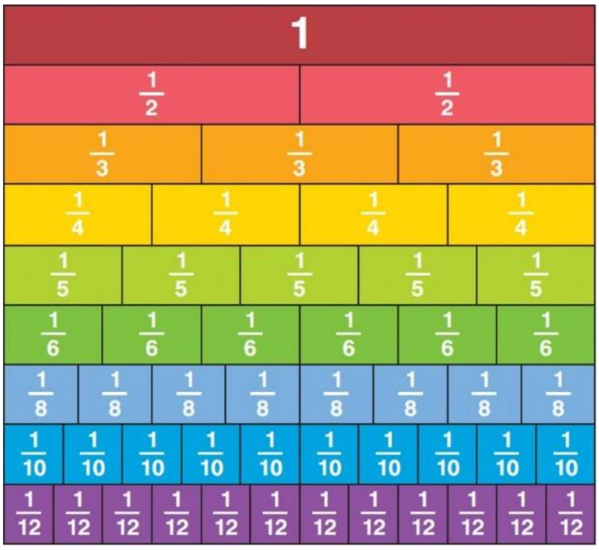
Εικόνα 6. Το κουτί των κλασμάτων (Κολέζα, 2000)

Τα μοντέλα μήκους είναι πολύ σημαντικά για την ανάπτυξη της κατανόησης των κλασμάτων από τους/τις μαθητές/τριες. Πρόσφατες ανασκοπήσεις ερευνών για τα κλάσματα αναφέρουν ότι η αριθμογραμμή βοηθά στην κατανόηση ενός κλάσματος ως αριθμό (Petit et al., 2010· Siegler et al., 2010). Στην ίδια κατεύθυνση, ο Siegler et al. (2010) παροτρύνει τους/τις εκπαιδευτικούς να χρησιμοποιούν τις αριθμογραμμές ως εργαλείο αναπαράστασης των κλασμάτων από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού.

3. Η περίπτωση με τις λωρίδες/ράβδους κλασμάτων (fraction tiles or fraction strips)

Οι λωρίδες ή ράβδοι κλασμάτων, όπως προαναφέρθηκε, ανήκουν στην κατηγορία των αναπαραστατικών μοντέλων μήκους ή μέτρησης για τη διδασκαλία των κλασματικών εννοιών.

Πρόκειται για μια εκδοχή των ράβδων του Cuisenaire τις οποίες μπορεί κάποιος να μιμηθεί χρησιμοποιώντας λωρίδες διαφόρων χρωμάτων (Σταματόπουλος, 2011). Κάθε λωρίδα έχει διαφορετικό χρώμα, ενώ είναι χωρισμένη σε διαφορετικό αριθμό ίσων μερών, συνήθως μέχρι τα 12 μέρη. Μόνο η πρώτη λωρίδα που αναπαριστά την ακέραιη μονάδα είναι ενιαία (Εικόνα 7).



Εικόνα 7. Λωρίδες κλασμάτων (πηγή: Βιβλίο του Μαθητή των Μαθηματικών της Ε΄ τάξης)

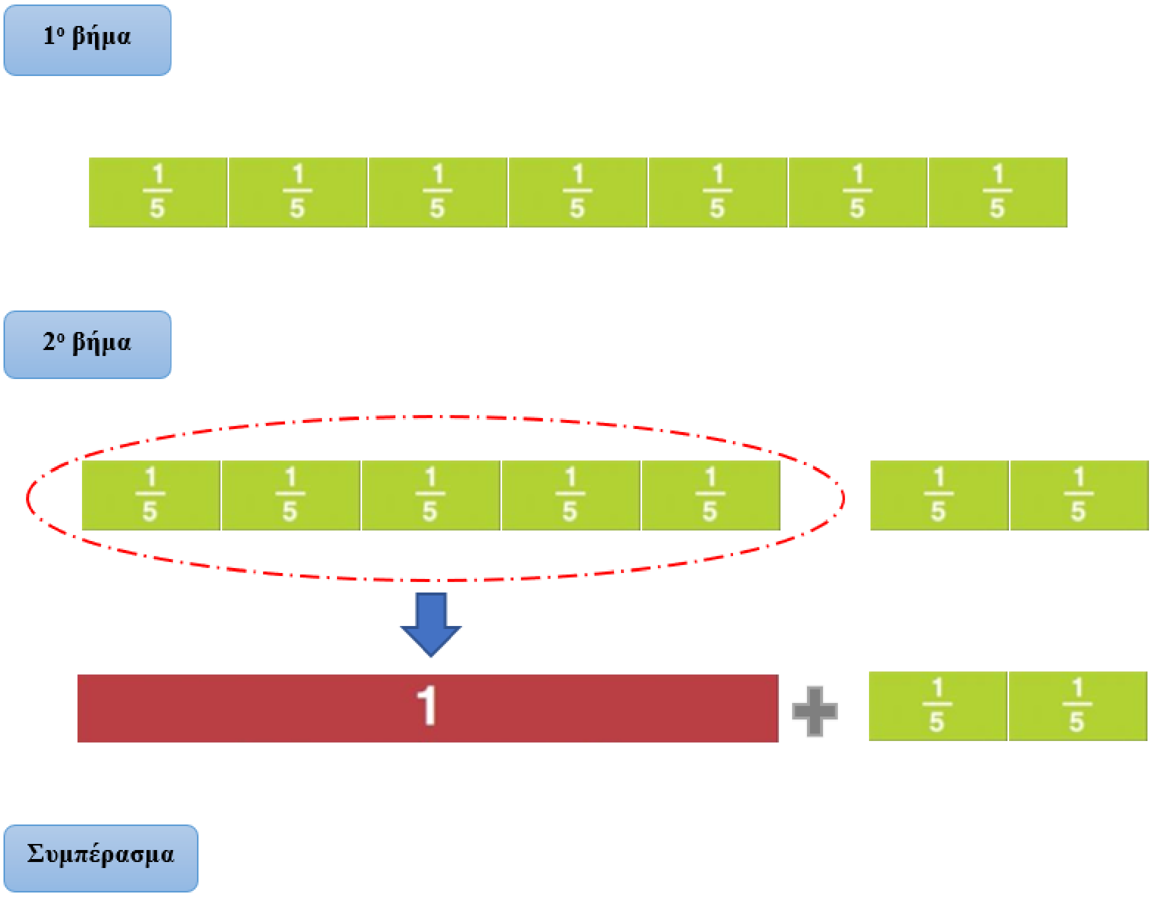
Το συγκεκριμένο μοντέλο αναπαράστασης συμβάλλει σημαντικά στη διδασκαλία πολύπλοκων εννοιών των κλασμάτων (π.χ. ισοδυναμία κλασμάτων, πράξεις κλασματικών αριθμών κ.ά.). Ταυτόχρονα, όμως, δίνει τη δυνατότητα στους/στις μαθητές/τριες να σχεδιάσουν αντίστοιχες λωρίδες σε ένα απλό χαρτί ή χαρτόνι και να εργαστούν είτε ατομικά είτε ομαδικά. Υποδείγματα για τον σχεδιασμό τους υπάρχουν στο παράρτημα του βιβλίου του μαθητή των Μαθηματικών της Ε΄ τάξης.

4. Διδακτικά παραδείγματα με λωρίδες/ράβδους κλασμάτων

Στο μέρος αυτό θα αναπτυχτούν τέσσερα διδακτικά παραδείγματα που βασίζονται στη χρήση του αναπαραστατικού μοντέλου των ράβδων κλασμάτων προκειμένου να κατανοηθούν βασικές έννοιες των κλασματικών αριθμών, όπως η μετατροπή καταχρηστικού κλάσματος σε μεικτό αριθμό και το αντίστροφο, η ισοδυναμία κλασμάτων και η πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων.

4.1. Από το καταχρηστικό κλάσμα στον μεικτό αριθμό

Οι μαθητές/τριες καλούνται να αναπαραστήσουν το καταχρηστικό κλάσμα 7/5 με τις ράβδους/λωρίδες κλασμάτων και στη συνέχεια να περιγράψουν τη διαδικασία μετατροπής του σε μεικτό αριθμό με τη βοήθειά τους. Στο τέλος καταγράφουν την τελική τους απάντηση με αριθμητικά σύμβολα (Εικόνα 8).



$$\frac{7}{5} = \frac{5}{5} + \frac{2}{5} = 1 + \frac{2}{5} = 1\frac{2}{5} \ (\mu\epsilon\iota\kappa\tau\acute{o}\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma)$$

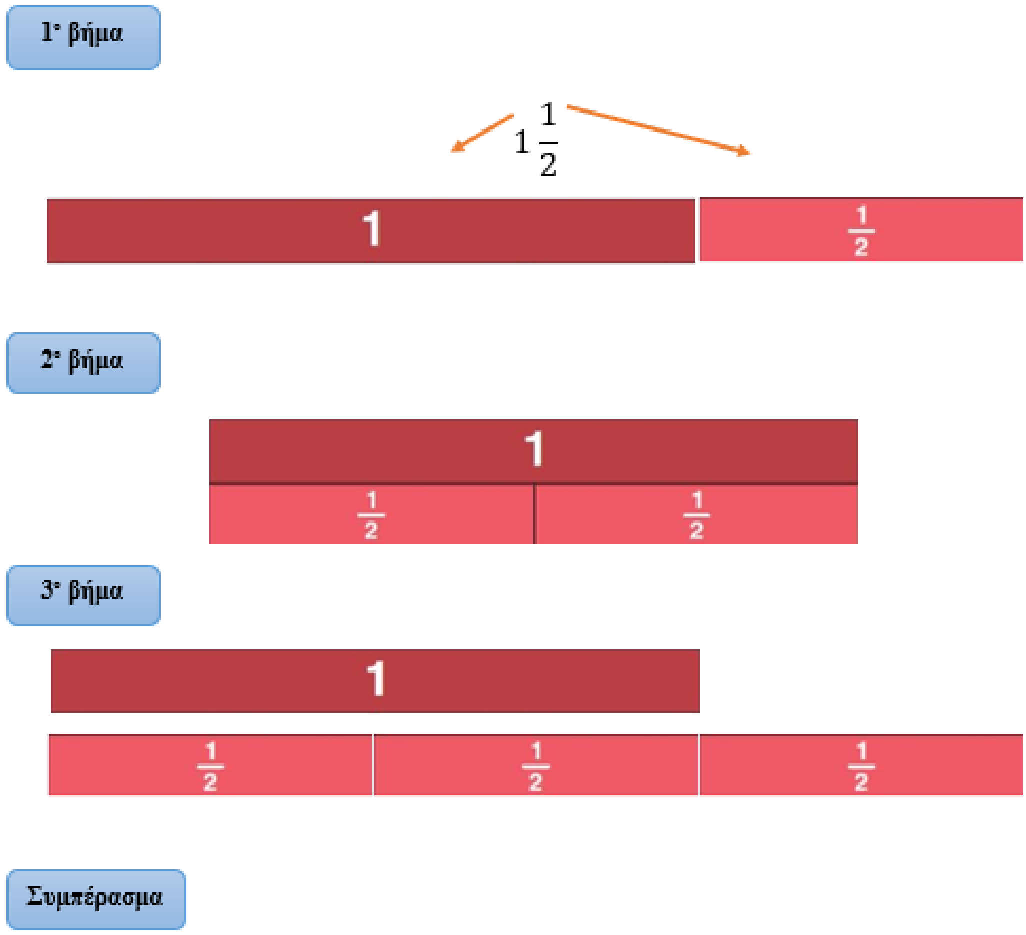
Εικόνα 8. Μετατροπή καταχρηστικού κλάσματος σε μεικτό αριθμό

Σημαντικό ρόλο στην όλη διαδικασία διαδραματίζουν τα υποβοηθητικά ερωτήματα που θέτει ο/η εκπαιδευτικός με στόχο να ενεργοποιήσει τις πρότερες γνώσεις των μαθητών/τριών:

- *«Σε πόσες κλασματικές μονάδες αναλύεται ο κλασματικός αριθμός* $\frac{7}{5}$ *; »*
- *«Πόσες από τις κλασματικές μονάδες που αναλύσατε παραπάνω είναι ισοδύναμες με μία ακέραιη μονάδα;»*
- *«Πόσες κλασματικές μονάδες περισσεύουν;»*

4.2. Από τον μεικτό αριθμό στο καταχρηστικό κλάσμα

Οι μαθητές/τριες καλούνται να αναπαραστήσουν τον μεικτό αριθμό με τις ράβδους/λωρίδες κλασμάτων και στη συνέχεια να τον αναλύσουν σε κλασματικές μονάδες με τη βοήθειά τους. Στο τέλος καταγράφουν την τελική τους απάντηση με αριθμητικά σύμβολα (Εικόνα 9).



$1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ *(κλασματικός αριθμός)*

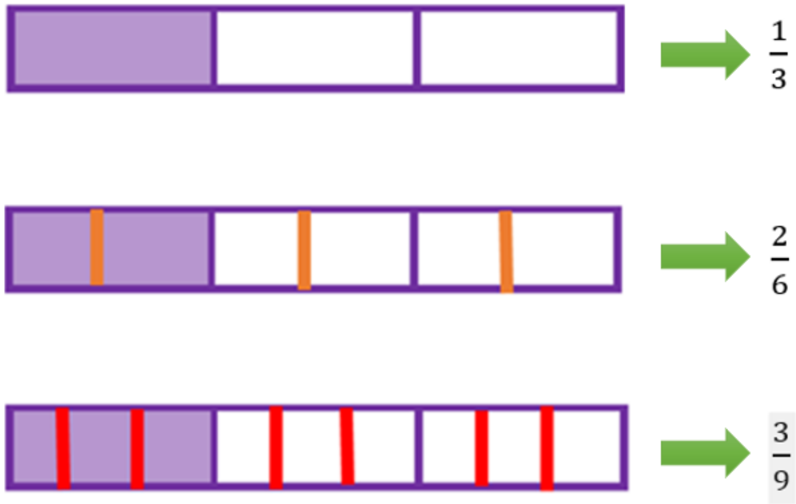
Εικόνα 9. Μετατροπή μεικτού αριθμού σε καταχρηστικό κλάσμα

Τα υποβοηθητικά ερωτήματα που θέτει ο/η εκπαιδευτικός κατά σειρά είναι τα εξής:

- *«Ποιο είναι το ακέραιο μέρος και ποιο το κλασματικό μέρος του μεικτού αριθμού* $1\frac{1}{2}$*; »*
- *«Σε πόσες κλασματικές μονάδες με παρονομαστή το 2 μπορούμε να αναλύσουμε την ακέραιη μονάδα;»*
- *«Πόσες κλασματικές μονάδες με παρονομαστή το 2 έχουμε συνολικά;»*

4.3. Ισοδύναμα κλάσματα

Οι μαθητές/τριες, παρατηρώντας την Εικόνα 10 με τις λωρίδες/ράβδους κλασμάτων, θα προβληματιστούν σχετικά με τη διαδικασία δημιουργίας ισοδυνάμων κλασμάτων και θα ανακαλύψουν έναν από τους αλγόριθμους της δημιουργίας τους.

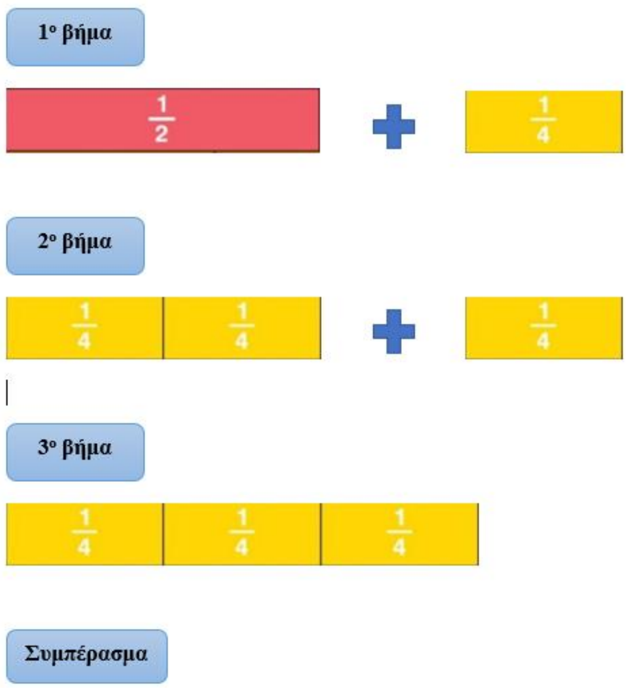


Εικόνα 10.

4.4. Πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων

Οι μαθητές/τριες, ανακαλύπτουν τον αλγόριθμο πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων με τη βοήθεια των λωρίδων/ράβδων κλασμάτων (Εικόνα 11).

Παράδειγμα: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = ;$



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Εικόνα 11. Πρόσθεση ετερώνυμων κλσμάτων

5. Συζήτηση - Προτάσεις

Οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να αντιληφθούν τη σημασία και την αξία της ενσωμάτωσης ποικίλων αναπαραστατικών μοντέλων στη διδασκαλία σύνθετων μαθηματικών εννοιών όπως τα κλάσματα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, η σκέψη των παιδιών να οδηγείται από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο (Cuoco & Curcio, 2001).

Μεταξύ άλλων, η χρήση αναπαραστατικών μοντέλων βοηθά τους/τις μαθητές/τριες να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες και σχέσεις, να εκφράσουν τη σκέψη τους, να διατυπώσουν επιχειρήματα και να ερμηνεύσουν πραγματικές καταστάσεις. Προς επίρρωση των ανωτέρω, ο Van de Walle (2005) τονίζει ότι αυτά τα μοντέλα μπορούν να λειτουργήσουν ως παιχνίδια δοκιμής και ομιλίας.

Ωστόσο, αυτό που πρέπει να αποφευχθεί είναι η λανθασμένη χρήση αυτών των μοντέλων, καθώς η απλή παρουσίασή τους από τον/την εκπαιδευτικό, χωρίς την ενεργό συμμετοχή των μαθητών/τριών, δε διασφαλίζει την οικοδόμηση της γνώσης. Τέλος, προτείνεται οι μαθητές/τριες να εισαχθούν σταδιακά από το ένα μοντέλο αναπαράστασης στο άλλο, ώστε μετά από καιρό να έχουν κατανοήσει τη χρησιμότητα του καθενός και να είναι σε θέση να επιλέγουν το καταλληλότερο, ανάλογα με την προβληματική κατάσταση που τίθεται κάθε φορά (Zhang et al., 2015).

Βιβλιογραφικές αναφορές

Behr, M. J., Wachsmuth, I., & Post, T. (1988). Rational number learning aids: Transfer from continuous to discrete models. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *10*(4), 1–18.

Charalambous, C. Y., & Pitta -Pantazi, D. (2005). *Revisiting a theoretical model on fractions: implications for teaching and research*. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, pp. 233-240. Melbourne: PME.

Clarke, D., Clarke, B., & Roche, A. (2011). Building teachers’ expertise in understanding, assessing and developing children’s mathematical thinking: the power of task-based, one-to-one interviews. *ZDM Mathematics Education*, *43*(6), 901–913.

Cuoco, A. A., & Curcio, F. R. (2001). *The roles of representation in school mathematics: 2001 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mat.

Cramer, K. A., Post, T. R., & Del Mas, B. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- And fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(2), 111-144.

Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2008). The role of representations in fraction addition and subtraction. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 490–496.

Doğan, A., & Işık-Tertemiz, N. (2019). Investigating Primary School Teachers' Knowledge Towards Meanings of Fractions. *International Education Studies*, *12*(6), 56-74. doi: 10.5539/ies.v12n6p56

Doğan, A., & Tertemiz, N. (2018). Examination of knowledge levels of primary school teacher candidates to fractional meanings. *The Journal of Academic Social Science*, *6*(68), 580-597. doi:10.16992/ASOS.13582

Hodges, T. E., Cady, J., & Collins, R. L. (2008). Fraction representation: The not-so-common denominator among textbooks. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *14*(2), 78–84.

Κλιάπης, Π., & Κασσώτη, Ο. (2005, Δεκέμβριος). *Πειραματική εφαρμογή του νέου σχολικού εγχειριδίου των Μαθηματικών της Στ Δημοτικού: Αλλαγές στις στάσεις και τις συμπεριφορές των μαθητών*. Ανακοίνωση στο 1ο Πανελλήνιο Συνέδριο ΕνΕΔιΜ, Αθήνα.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: Leader Books.

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing from fractions to rational numbers. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 146–165). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lemonidis, Ch., & Iliadou, Th. (2016). *Effects of remedial instruction on 6th grade students with and without difficulties in fractions*. Biennial Meeting of EARLI SIG 3 - Conceptual Change, Florina, Greece.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33–40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Martin, T., Svihla, V., & Smith, C. P. (2012). The role of physical action in fraction learning. *Education and Human Development*, *5*(1), 1–17.

Nishida, T. K. (2008). *The use of manipulatives to support children's acquisition of abstract math concepts*. Charlottesville, VA: University of Virginia.

Soni, M., & Okamoto, Y. (2020). Improving children's fraction understanding through the use of number lines. *Mathematical Thinking and Learning*, *22*(3), 233–243. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1709254

Petit, M., Laird, R., & Marsden, E. (2010). *Focus on Fractions: Bringing Research to the Classroom*. New York, NY: Routledge.

Siegler, R., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., & Wray, J. (2010). *Developing effective fractions instruction for kindergarten through eighth grade: A practice guide (NCEE#2010-4039)*. Washington, D.C.: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Educational Sciences, U.S. Department of Education.

Σταματόπουλος, Κ. (2011). *Η Μαθηματική και διδακτική διάσταση της γνώσης των μελλοντικών εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας σχετικά με την έννοια του κλάσματος* (Διπλωματική εργασία). Πανεπιστήμιο Αθηνών-Πανεπιστήμιο Κύπρου, Αθήνα.

Tsai, T., & Li, H. (2017). Towards a framework for developing students’ fraction proficiency. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(2), 244–255. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1238520

Τζεκάκη, Μ. (2010). *Μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και την πρώτη σχολική ηλικία: Αλλάζοντας την τάξη των Μαθηματικών*. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2013). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (8th ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Van de Walle, J. A. (2007). *Διδάσκοντας Μαθηματικά για Δημοτικό και Γυμνάσιο: Μια Αναπτυξιακή Διαδικασία* (μτφ. Β. Αράπογλου). Δ. Ασημακοπούλου (Επιμ.). Αθήνα: Επίκεντρο.

Van de Walle, J. A. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια εξελικτική διδασκαλία* (μτφ. Α. Αλεξανδροπούλου & Β. Κομπορόζος). Τ. Τριανταφυλλίδης (Επιμ.). Αθήνα: Τυπωθήτω – Γ. Δαρδανός.

Zhang, X., Clements, M. A., & Ellerton, N. F. (2015). Enriching student concept images: Teaching and learning fractions through multiple-embodiment approach. *Mathematics Education Research Journal*, *27*, 201–231. doi:10.1007/s13394-014-0137-4