ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ #1

Α) ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΘΕΩΡΙΑ

Αριθμητική παράσταση είναι μια σειρά πράξεων με αριθμούς.

Μια αριθμητική παράσταση μπορεί να περιλαμβάνει παρενθέσεις, αγκύλες κλπ.

Παραδείγματα παραστάσεων

$10-5 + 24 : 3 =$

$72 : (4 + 2) - 2 + 7 \cdot 3 =$

Για να λύσουμε μία αριθμητική παράσταση ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Πρώτα κάνουμε τις πράξεις στις παρενθέσεις.
   Αν σε μία παρένθεση υπάρχουν πολλές πράξεις , ξεκινάμε με τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις , με τη σειρά , από τ' αριστερά προς τα δεξιά , κι έπειτα τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις , κι αυτές με τη σειρά που τις βλέπουμε.

2. Ακολουθούν οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις , με τη σειρά που τις βλέπουμε , απ' τ' αριστερά προς τα δεξιά.

3. Για το τέλος αφήνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$8 + (2 \cdot 5 - 3) - 12 : 4 \cdot (5 + 3) : 4$

1.Πρώτα κάνουμε τις πράξεις στις παρενθέσεις.

$8 + (10 - 3) - 12 : 4 \cdot 8 : 4$

Συνεχίζουμε μέχρι να τελειώσουν όλες οι πράξεις στις παρενθέσεις.

$8 + 7 - 12 : 4 \cdot 8 : 4 =$

2.Ακολουθούν οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις , με τη σειρά που τις βλέπουμε.

$8 + 7 - 3 \cdot 8 : 4 =$

Συνεχίζουμε με τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις , μέχρι να τις κάνουμε όλες.

$8 + 7 - 24 : 4 =$

$8 + 7 - 6 =$

3.Στο τέλος κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις , με τη σειρά που τις βλέπουμε.

$15 - 6 =$

11

Πρέπει να **ΘΥΜΑΜΑΙ**

1. ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΙΣ

2. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ

3 . ΠΡΟΣΘΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΕΙΣ

ΠΡΟΣΟΧΗ !

Δεν αλλάζω ποτέ τη σειρά των πράξεων, διότι έτσι προκύπτει λάθος αποτέλεσμα !

$3 + 7 \cdot 5 =$

$3 + 35 =$

38

Σωστή λύση.
Πρώτα ο πολλ/σμός κι έπειτα η πρόσθεση.

$3 + 7 \cdot 5 =$

$10 \cdot 5 =$

50

Λάθος λύση ,
διότι πρώτα έπρεπε να γίνει ο πολλ/σμός και μετά η πρόσθεση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$(4 \cdot 5 + 6 : 3) \cdot 5 - 5 =$

____

$10 \cdot (5 + 6 : 6) =$

____

$(2,4 \cdot 5 - 2) - 0,1 =$

____

$3,4 \cdot 0,1 + 5 \cdot (1,8 - 1) =$

____

$0,7 \cdot (8,2 + 1,8) + 10 =$

____

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Β) Ο Μιχάλης αγόρασε από το ψιλικατζίδικο της γειτονιάς του 3 σοκολάτες προς 0,7 € η μία, 8 εισιτήρια για λεωφορείο προς 0,5 € το ένα, 1 εφημερίδα προς 2 € και 1 περιοδικό προς 7,5 €. Έδωσε ένα χαρτονόμισμα των 20 €. Πόσα ρέστα πήρε;

Λύση

____

____

Απάντηση:

Δ) Σε μια τάξη υπάρχουν 28 παιδιά. Η δασκάλα πρέπει να δώσει 6 συνδετήρες σε κάθε παιδί. Αν η δασκάλα έχει 4 κουτιά με 45 συνδετήρες το καθένα, να βρείτε πόσοι συνδετήρες θα περισσέψουν.

Λύση

____

____

Απάντηση: ______________________________________

Β) ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑΣ

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ 2, 3, 4 , 5 , 6 , 9 ΚΑΙ ΤΟΥ 10

Για να διακρίνουμε εύκολα και γρήγορα αν ένας ακέραιος αριθμός διαιρείται ακριβώς από έναν άλλο, χρησιμοποιούμε ορισμένους κανόνες που ονομάζουμε κριτήρια διαιρετότητας.

Ένας ακέραιος διαιρείται ακριβώς

με το **2**, αν το **τελευταίο του ψηφίο** είναι **0** ή **2** ή **4** ή **6** ή **8** (δηλαδή είναι ζυγός αριθμός)

με το **3**, όταν το **άθροισμα των ψηφίων** του είναι **3** ή **6** ή **9**

Παράδειγμα: ο αριθμός 174 διαιρείται με το 3 γιατί 1+7+4=12(2+1=3), ο 969 το ίδιο γιατί 9+6+9=24(2+4=6) κλπ.

με το **4**, όταν τα **δυο τελευταία του ψηφία διαιρούνται με το 4**

Π. χ. Ο 324 διαιρείται με το 4, γιατί και το 24 (δύο τελευταία) διαιρούνται

με το **5**, αν το **τελευταίο** του ψηφίο είναι **5** ή **0**

με το **6** αν είναι **ταυτόχρονα διαιρετός** και **με το 2 και με το 3**

Π. χ. Ο 678 είναι διαιρετός από το 6 γιατί διαιρείται και με το 2(ζυγός) και με το 3(6+7+8=21=2+1=3)

με το **8**, όταν οι **3 τελευταίοι αριθμοί διαιρούνται με το 8**

Π. χ. Ο 7.368 διαιρείται ακριβώς με το 8 γιατί και ο 368 διαιρείται με το 8

με το **9**, όταν το **άθροισμα των ψηφίων** του δίνει **9**.

Π. χ. Ο 351 διαιρείται ακριβώς με το 9 γιατί 3+5+1=9. Το ίδιο και ο 459 γιατί 4+5+9=18(8+1=9)

με το **10**, αν το **τελευταίο** του ψηφίο είναι **0**

Με το **25** οι αριθμοί που **τα τελευταία τους δύο ψηφία είναι 00 ή 25 ή 50 ή 75**

α) ποιοι από τους αριθμούς 27, 40, 259, διαιρούνται ακριβώς με το 2.
Διαιρούνται: ____________________
β) ποιοι από τους αριθμούς 46, 170, 21.587 διαιρούνται ακριβώς με το 5.
Διαιρούνται: ____________________
γ) ποιοι από τους αριθμούς 72, 123, 4.410 διαιρούνται ακριβώς με το 3.
Διαιρούνται: ____________________
δ) ποιοι από τους αριθμούς 195, 279, 504 διαιρούνται ακριβώς με το 9.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Οι μαθητές/τριες που θα συμμετάσχουν στην εκδρομή του σχολείου θα είναι από 40 μέχρι 50 (δεν ξέρουμε ακριβώς πόσοι/ες θα έρθουν).

Α) πόσοι/ες μαθητές/τριες αν έρθουν θα γεμίσουν ακριβώς οι θέσεις του πούλμαν που είναι 2πλές;

(6 πιθανοί αριθμοί __ __ __ __ __ __)

Β) πόσοι/ες αν έρθουν θα χρησιμοποιήσουν στο ξενοδοχείο ένα ασανσέρ που χωράει 3 άτομα χωρίς να περισσέψει κανένας;

(4 πιθανοί αριθμοί __ __ __ __)

Γ) ΠΡΩΤΟΙ (ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΟΙ) ΑΡΙΘΜΟΙ

ΘΕΩΡΙΑ

Πρώτοι ονομάζονται οι αριθμοί που διαιρούνται ακριβώς μόνο με τη μονάδα (1) και τον εαυτό τους.

1. Σύνθετοι ονομάζονται οι αριθμοί που διαιρούνται ακριβώς με τη μονάδα (1), τον εαυτό τους και με έναν τουλάχιστον ακόμη αριθμό.

...ΜΕ ΑΛΛΑ ΛΟΓΙΑ ΤΟ ΙΔΙΟ ΠΡΑΓΜΑ...

Ένας αριθμός, μεγαλύτερος από το 1, που έχει μόνο δύο διαιρέτες (το 1 και τον εαυτό του) λέγεται πρώτος. π.χ. Ο αριθμός 2, έχει για διαιρέτες μόνο το 1 και το 2.
Ένας αριθμός που έχει τουλάχιστον τρεις διαιρέτες λέγεται σύνθετος. π.χ. Ο αριθμός 4, έχει για διαιρέτες το 1, το 2 και το 4.
Ο αριθμός 1 δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος (έχει μόνο έναν διαιρέτη, τον εαυτό του).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω αριθμοί είναι πρώτοι ή σύνθετοι χρησιμοποιώντας τα κριτήρια διαιρετότητας αριθμών 2, 5 και 3 ή κάνοντας τη διαίρεση με το 7 και το 11.

	Αριθμοί		
Διαιρέτες	78	121	140
2			
3			
5			
7			
11			

Δ) ΠΑΡΑΓΟΝΤΟ-ΠΟΙΗΣΗ

ΘΕΩΡΙΑ

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ένας **σύνθετος** αριθμός μπορεί να εκφραστεί και ως **γινόμενο πρώτων αριθμών** (**γινόμενο πρώτων παραγόντων**).

Π.χ. 24= 2*2*2*3 60=2*2*3*5

Μπορούμε να αναλύσουμε ένα **σύνθετο** αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων με δύο τρόπους:

Α. με δεντροδιαγράμματα

Β. με διαδοχικές διαιρέσεις

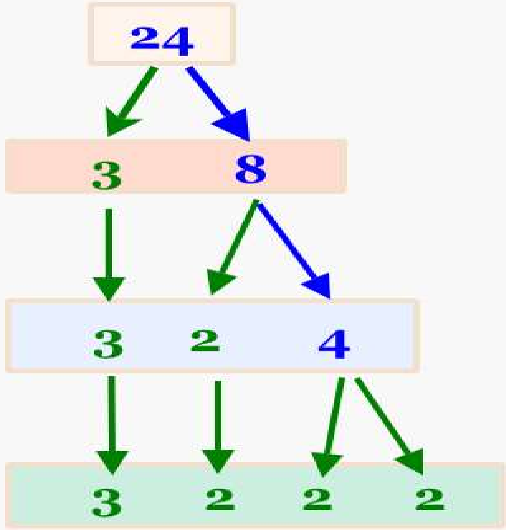
Α. με δεντροδιαγράμματα

Ας πάρουμε τον αριθμό 24.

Βρίσκουμε δυο αριθμούς που να έχουν γινόμενο 24,(3*8 ή 2*12 ή 4*6) και τους γράφουμε κάτω από το 24.

Ο αριθμός 3 είναι πρώτος και δεν μπορεί να αναλυθεί περισσότερο. Τον ξαναγράφω από κάτω. Ο αριθμός 8 μπορεί να αναλυθεί σε 2*4. Τους γράφω κάτω απ' το 8.

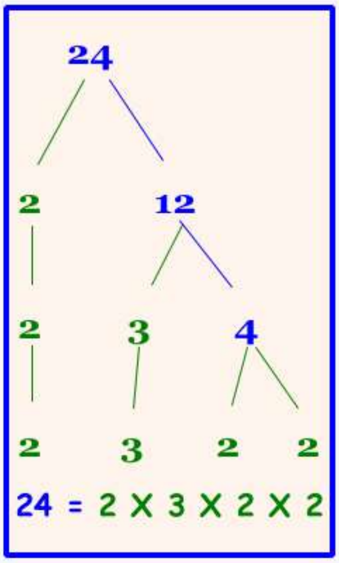
Ο αριθμός 2 είναι πρώτος και δεν μπορεί να αναλυθεί περισσότερο. Τον ξαναγράφω από κάτω. Ο αριθμός 4 μπορεί να αναλυθεί σε 2*2. Τους γράφω κάτω απ' το 4.

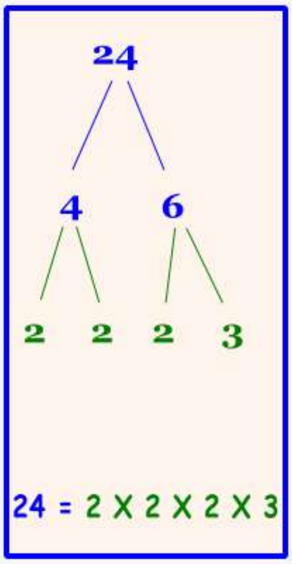


Η ανάλυση τελειώνει, όταν όλοι οι παράγοντες
είναι **πρώτοι αριθμοί** όπως εδώ (3,2, 2 και 2).
Άρα ο αριθμός 24 μπορεί να εκφραστεί
ως γινόμενο πρώτων παραγόντων ως εξής:
24 = 3 Χ 2 Χ 2 Χ 2

Και τι αποτέλεσμα θα είχαμε αν στην αρχή δεν διαλέγαμε το 3*8 αλλά το 2*12 ή το 4*6 ;

Ακριβώς το ίδιο.





Β. με διαδοχικές διαιρέσεις

Ας πάρουμε τον αριθμό 60. Τον γράφουμε και τραβάμε μια κάθετη γραμμή στα δεξιά του.

Εξετάζουμε ποιος είναι **ο μικρότερος πρώτος αριθμός** που διαιρεί ακριβώς το 60. Είναι το 2. Διαιρούμε το 60 με το 2 και γράφουμε κάτω από το 60 το **πηλίκο** της διαίρεσης δηλαδή το 30. (το πηλίκο της διαίρεσης 60:2) .

Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία για το 30. Διαιρούμε με το 2 , γιατί είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός που το διαιρεί , και γράφουμε το **πηλίκο** της διαίρεσης που είναι το 15. (30:2).

Το 15 δε διαιρείται με το 2. Πάμε στον επόμενο πρώτο αριθμό που είναι το 3 και εξετάζουμε αν διαιρείται με το 15. Διαιρούμε με το 3 και γράφουμε το **πηλίκο** της διαίρεσης που είναι το 5.

Το ίδιο κάνουμε και για το 5, που το διαιρούμε με το 5 , και καταλήγουμε σε **πηλίκο** 1. Τότε τελειώνει και η ανάλυση.

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Άρα ο αριθμός 60 εκφράζεται ως γινόμενο πρώτων παραγόντων ως εξής:

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

Στις διαδοχικές διαιρέσεις , όπως και στα δεντροδιαγράμματα , δε με ενδιαφέρει η σειρά των πρώτων αριθμών με την οποία διαιρώ τον σύνθετο και τα πηλίκα που προκύπτουν.

Με όποιον τρόπο και αν γίνει αυτό, το γινόμενο των πρώτων αριθμών είναι το ίδιο.

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

60	3
20	2
10	5
2	2
1	

$60 = 3 \times 2 \times 5 \times 2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΕΙΣ ΜΕ ΔΕΝΔΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ

Ε) ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ – ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΟΙΝΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ

Μπορούμε να βρούμε τα πολλαπλάσια κάθε αριθμού, **πολλαπλασιάζοντάς** τον διαδοχικά με το 1 , 2, 3 , 4 , 5 … 1.000 ….

Τα πολλαπλάσια κάθε αριθμού είναι **άπειρα** , διότι άπειροι είναι και οι αριθμοί με τους οποίους μπορώ να τον πολλαπλασιάσω.

Πολλαπλάσιο ενός φυσικού αριθμού λέγεται ένας αριθμός που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τον αρχικό αριθμό με έναν άλλο φυσικό αριθμό.
Κάθε φυσικός αριθμός έχει άπειρα πολλαπλάσια.
Κάθε πολλαπλάσιο ενός αριθμού διαιρείται ακριβώς από τον αριθμό αυτό.
Κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών λέγονται οι αριθμοί που είναι πολλαπλάσια όλων αυτών των φυσικών αριθμών.
Το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια εκτός από το 0 δύο ή περισσότερων αριθμών λέγεται **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο** (Ε.Κ.Π.) των αριθμών αυτών.

Παράδειγμα

Π3 = 0 , 3 , 6 , 9 , 12 , 15 , 18, ……

Π5 = 0 , 5 , 10 , 15 , 20 , 25 , 30 , …..

Ποια είναι τα κοινά πολλαπλάσια;

Κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών είναι τα πολλαπλάσια που **είναι ίδια** (κοινά) **σε όλους τους αριθμούς.**

Τα **κοινά πολλαπλάσια** δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών είναι **άπειρα.**

Παράδειγμα

Π3 =0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36…

Π4 = 0,4,8,12,16,20,24,28,32,36 …

Οι αριθμοί 0 , 12 , 24 , 36 είναι πολλαπλάσια και του 3 και του 4.

Είναι τα κοινά πολλαπλάσια (Κ.Π.) του 3 και του 4.

Επομένως:
Κ.Π. (3,4)= 0 , 12 , 24 , 36 …..48 ..

Τι είναι το Ε.Κ.Π. ;

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών ονομάζω το **μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια** των αριθμών, **όχι όμως το μηδέν.**

Παράδειγμα

Π3 =0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36…

Π4 = 0,4,8,12,16,20,24,28,32,36 …

Κ.Π. (3,4)= 0 , 12 , 24 , 36 …..48 ..

Ε.Κ.Π. (3,4) = 12

ΤΡΟΠΟΙ ΕΥΡΕΣΗΣ ΤΟΥ Ε.Κ.Π.

1ος τρόπος

Γράφουμε όλα τα πολλαπλάσια κάθε αριθμού με τη σειρά **και βρίσκουμε το μικρότερο από τα κοινά** πολλαπλάσιά τους.

Παράδειγμα

Π3 =0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36…

Π4 = 0,4,8,12,16,20,24,28,32,36 …

Κ.Π. (3,4)= 0 , 12 , 24 , 36 …..48 ..

Ε.Κ.Π. (3,4) = 12

2ος τρόπος

Με πολλαπλάσια του μεγαλύτερου αριθμού

Επιλέγουμε το μεγαλύτερο από τους αριθμούς και εξετάζουμε **αν διαιρείται ακριβώς από όλους** τους άλλους.

Αν διαιρείται με όλους, τότε είναι αυτός το Ε.Κ.Π.

Αν δε διαιρείται τότε **τον διπλασιάζουμε** , τριπλασιάζουμε, τετραπλασιάζουμε κτλ **μέχρι να βρούμε τον αριθμό που διαιρείται ακριβώς από τους άλλους.**

Αυτός ο αριθμός θα είναι το Ε.Κ.Π. τους.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί το Ε.Κ.Π. (16, 24 , 36)

Μεγαλύτερος είναι το 36.
Δε διαιρείται με το 16 ούτε με το 24.

Διπλασιάζω το 36 → 36x2=72
Το 72 διαιρείται με το 24 (3x24=72) , όχι όμως και με το 16.

Τριπλασιάζω το 36 → 36x3=108
Το 108 δε διαιρείται με το 16 ούτε με το 24.

Τετραπλασιάζω το 36 → 36x4=144

Το 144 διαιρείται και με το 16 και με το 24. Επομένως το 144 είναι το Ε.Κ.Π.

Άρα **Ε.Κ.Π. (16,24,36) = 144**

3ος τρόπος

Με διαδοχικές διαιρέσεις.

Γράφω οριζόντια τους αριθμούς και δεξιά τους φέρνω μια κατακόρυφη γραμμή .

Δεξιά της γραμμής γράφω **πρώτους αριθμούς** (2,3,5,7,11…) **που διαιρούν έστω και έναν** από τους αριθμούς που έχουν δοθεί.

Τότε αριστερά της γραμμής, **κάτω από τους αριθμούς** που έχουν δοθεί, **βάζω τα πηλίκα** (όταν η διαίρεση είναι τέλεια) ή τον ίδιο αριθμό (όταν η διαίρεση δεν είναι τέλεια).

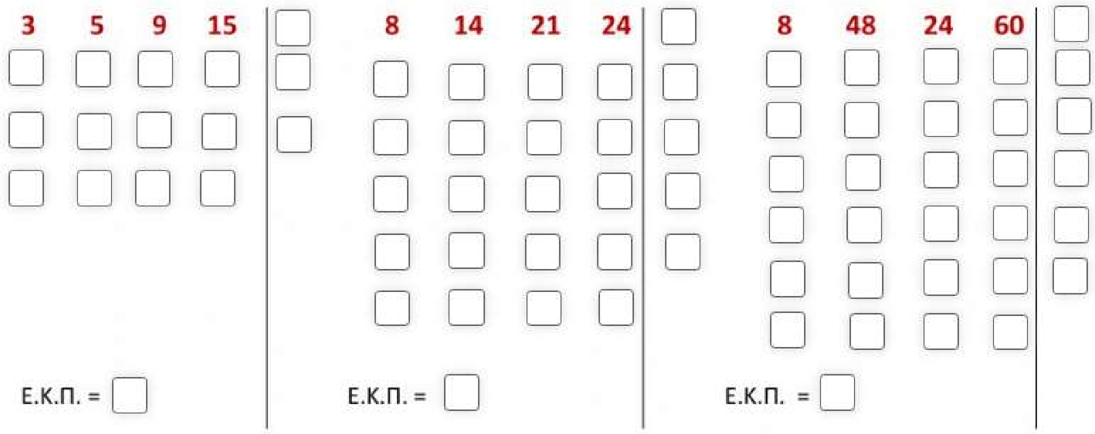
Συνεχίζω την ίδια διαδικασία μέχρι **όλα τα πηλίκα να γίνουν 1**,

οπότε το **Ε.Κ.Π. είναι το γινόμενο των πρώτων παραγόντων δεξιά της γραμμής.**

16	24	36	2
8	12	18	2
4	6	9	2
2	3	9	2
1	3	9	3
1	1	3	3
1	1	1	

Ε.Κ.Π. (16,24,36) = 2x2x2x2x3x3=144

ΑΣΚΗΣΕΙΣ



ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

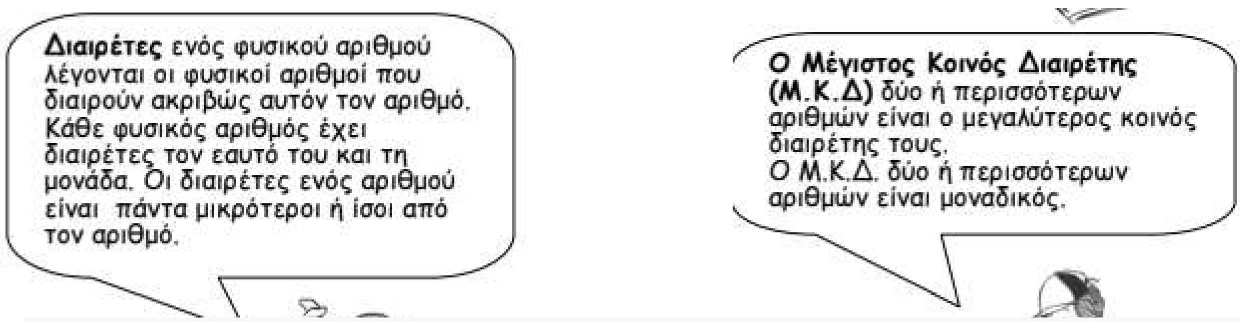
Τρεις φίλες πηγαίνουν στο κολυμβητήριο. Η Μαριάντζελα πάει στο κολυμβητήριο κάθε 3 ημέρες, η Παναγιώτα κάθε 4 ημέρες και η Ελευθερία κάθε 6 ημέρες. Σήμερα πήγαν και οι τρεις μαζί στο κολυμβητήριο.

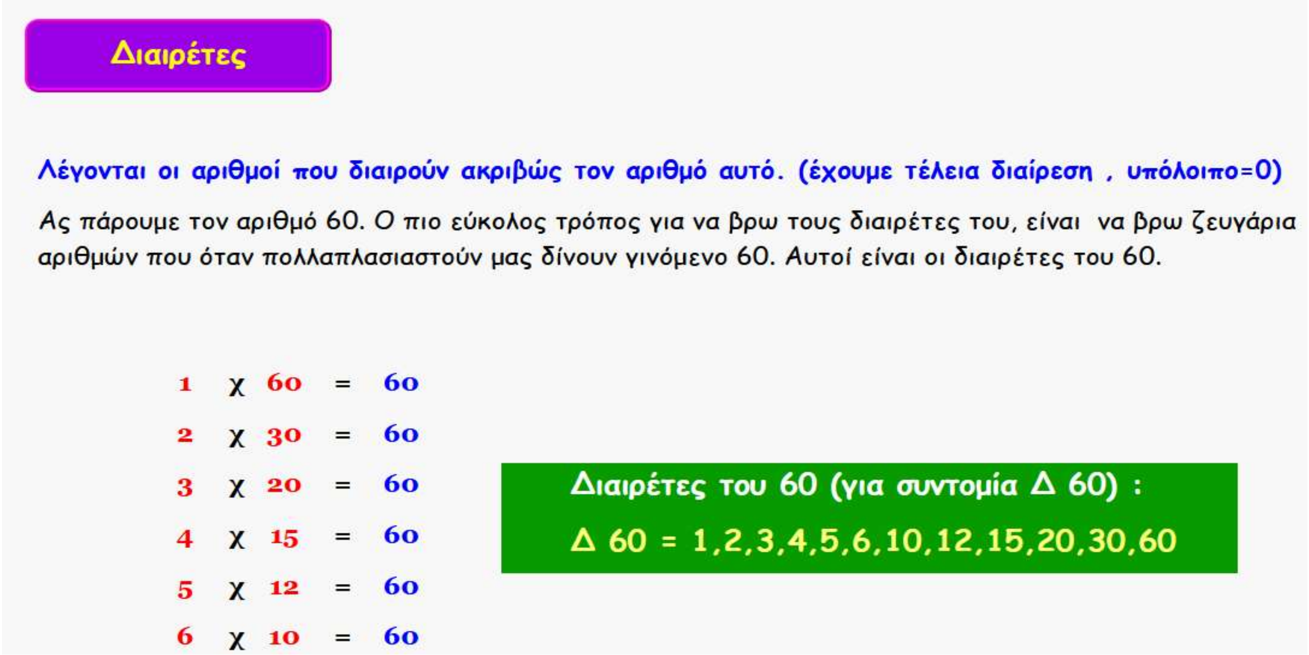
α) Μετά από πόσες ημέρες θα συναντηθούν ξανά και οι τρεις μαζί στο κολυμβητήριο;

β) Πόσες φορές θα έχει πάει μέχρι τότε καθεμία στο κολυμβητήριο;

Λύση

στ) ΔΙΑΙΡΕΤΕΣ – ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ (Μ.Κ.Δ.)





Διαιρέτες

Λέγονται οι αριθμοί που διαιρούν ακριβώς τον αριθμό αυτό. (έχουμε τέλεια διαίρεση , υπόλοιπο=0)

Ας πάρουμε τον αριθμό 60. Ο πιο εύκολος τρόπος για να βρω τους διαιρέτες του, είναι να βρω ζευγάρια αριθμών που όταν πολλαπλασιαστούν μας δίνουν γινόμενο 60. Αυτοί είναι οι διαιρέτες του 60.

1 χ 60 = 60
2 χ 30 = 60
3 χ 20 = 60
4 χ 15 = 60
5 χ 12 = 60
6 χ 10 = 60

Διαιρέτες του 60 (για συντομία Δ 60) :
Δ 60 = 1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60

Κοινοί διαιρέτες

Κοινοί διαιρέτες δύο ή περισσοτέρων ακεραίων αριθμών λέγονται οι φυσικοί αριθμοί που τους διαιρούν όλους ακριβώς.

Ας πάρουμε τους αριθμούς 12 , 24 και 60 κι ας βρούμε τους διαιρέτες τους.

Δ 12 = 1 , 2 , 3 , 4, 6 , 12

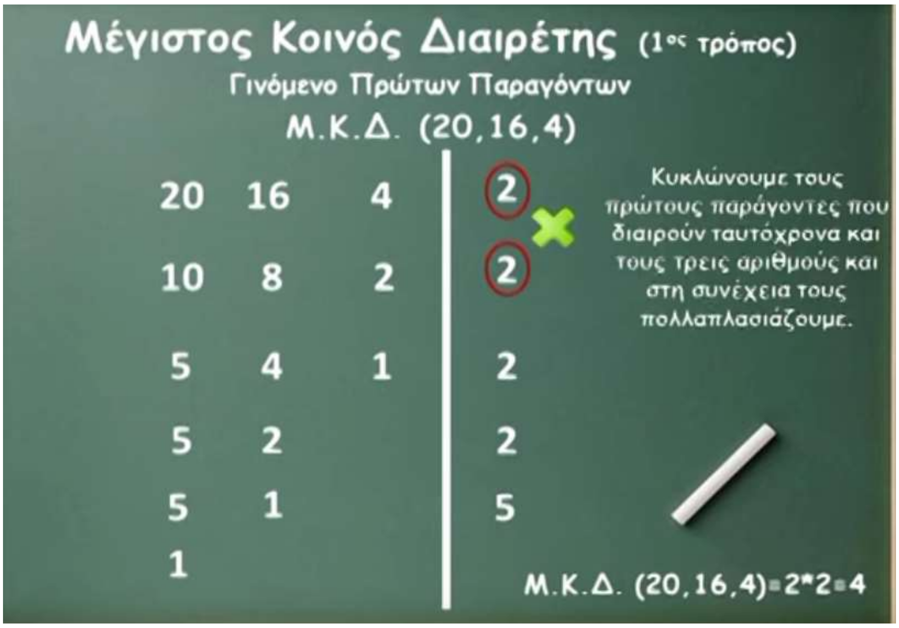
Δ 24 = 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 8 , 12 , 24

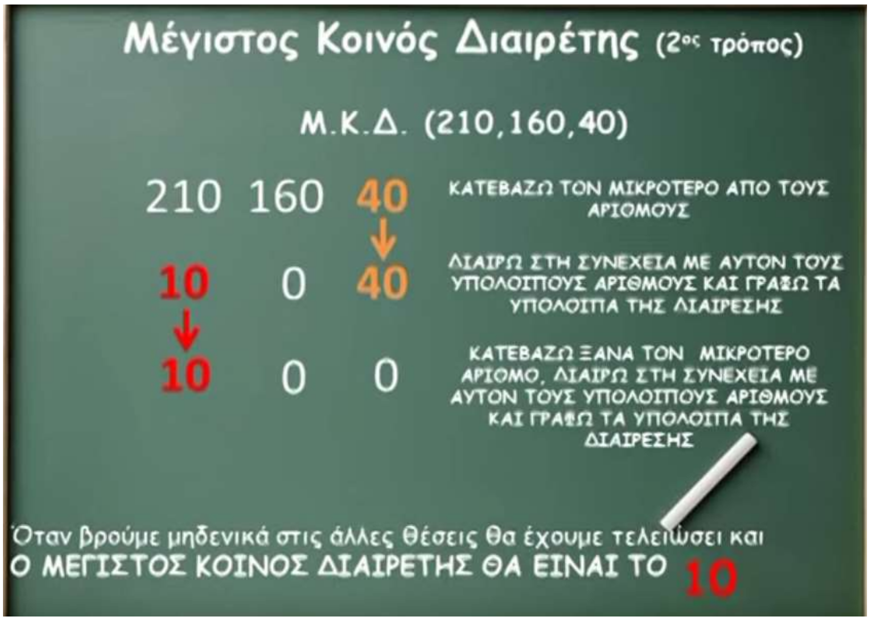
Δ 60 = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 10 , 12 , 15 , 20 , 30 , 60

Κοινοί Διαιρέτες του 12 , 24 ,60 (για συντομία Κ.Δ.)

Κ.Δ. (12 , 24 , 60) = 1,2,3,4,6,12

Βλέπουμε ότι οι αριθμοί 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 12 είναι **διαιρέτες και των τριών αριθμών.** Αυτοί είναι οι Κοινοί Διαιρέτες του 12 , του 24 και του 60.





ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Δ) Η Κατερίνα δουλεύει σ' ένα βιβλιοχαρτοπωλείο. Έχει στη διάθεσή της 150 μπλε, 120 μαύρα και 90 κόκκινα στυλό, τα οποία θέλει να τοποθετήσει σε κασετίνες.

α) Πόσες το πολύ όμοιες κασετίνες μπορεί να φτιάξει;

β) Πόσα μπλε, μαύρα και κόκκινα στυλό θα υπάρχουν τότε σε κάθε κασετίνα;

Λύση

Απάντηση: ____