# ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ 1

## Θεωρία

Ορισμός: Κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της λέγεται ταυτότητα.

## Ταυτότητες που πρέπει να γνωρίζουμε:

**Τετράγωνο αθροίσματος**

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

**Απόδειξη:**

$(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

**Τετράγωνο διαφοράς**

$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

**Απόδειξη:**

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta-\beta\alpha+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

**Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά**

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$

**Απόδειξη:**

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta+\beta\alpha-\beta^2=\alpha^2-\beta^2$

## Παρατηρήσεις

1. Οι παραστάσεις των δεύτερων μελών των ταυτοτήτων λέγονται αναπτύγματα.
2. Οι ταυτότητες του τετραγώνου και του κύβου της διαφοράς αποδεικνύονται και αν στις αντίστοιχες ταυτότητες του αθροίσματος θέσουμε όπου $\beta$ το $-\beta$.
3. Οι ταυτότητες ισχύουν και στην περίπτωση που στη θέση των μεταβλητών $\alpha$ και $\beta$ υπάρχουν οποιεσδήποτε αλγεβρικές παραστάσεις.
4. Παραστάσεις της μορφής $\alpha+\beta$ και $\alpha-\beta$ ονομάζονται συζυγείς παραστάσεις.
5. Τονίζουμε ότι: $(\alpha+\beta)^2\neq\alpha^2+\beta^2$, $(\alpha-\beta)^2\neq\alpha^2-\beta^2$,

$$(\alpha+\beta)^3\neq\alpha^3+\beta^3,\quad (\alpha-\beta)^3\neq\alpha^3-\beta^3$$

6. Ισχύει ότι: $(-\alpha+\beta)^2=(\beta-\alpha)^2=(\alpha-\beta)^2$,

$$(-\alpha-\beta)^2=[-(\alpha+\beta)]^2=(\alpha+\beta)^2.$$

## Παραδείγματα – Εφαρμογές

**1.** Να βρεθούν τα αναπτύγματα:

α) $(2x+1)^2$ β) $\left(\alpha+\frac{2}{a}\right)^2$ γ) $(x-4y)^2$ δ) $(y^2-2x)^2$

Λύση:

α) $(2x+1)^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 1+1^2=4x^2+4x+1$

β) $\left(\alpha+\frac{2}{a}\right)^2=\alpha^2+2\cdot\alpha\cdot\frac{2}{a}+\left(\frac{2}{a}\right)^2=\alpha^2+4+\frac{4}{a^2}$

γ) $(x-4y)^2=x^2-2\cdot x\cdot 4y+(4y)^2=x^2-8xy+16y^2$

δ) $(y^2-2x)^2=(y^2)^2-2\cdot y^2\cdot 2x+(2x)^2=y^4-4xy^2+4x^2$

# Ασκήσεις:

**1.** Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x+2)^2$ β) $(2x+3)^2$

γ) $(3x+y)^2$ δ) $(5\alpha+\frac{\beta}{2})^2$

ε) $(3xy+5)^2$ στ) $(\alpha^2+2\beta)^2$

**2.** Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(y-3)^2$ β) $(4x-1)^2$

γ) $\left(\omega-\frac{1}{2}\right)^2$ δ) $(3xz-5y)^2$

**3.** Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x+3)(x-3)$ β) $(2y-1)(2y+1)$

γ) $(4\alpha+3\beta)(4\alpha-3\beta)$ δ) $\left(\alpha+\frac{2}{\beta}\right)\left(\alpha-\frac{2}{\beta}\right)$

**8.** Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $(2 + ___)^2 = ___ + ___ + 25x^2$

β) $(x^2 + ___)^2 = ___ + 4x^2y + ___$

γ) $(___ - ___)^2 = 9x^2 - ___ + 1$

δ) $(___ - 4\beta)^2 = ___ - 8\alpha\beta + ___$

ε) $(3x - ___)(3x + ___) = ___ - 16y^2$

Πηγή: https://docplayer.gr/2370787-1-5-axiosimeiotes-taytotites.html