Αρχή ανεξαρτησίας/επαλληλίας των κινήσεων σε δύο άξονες:

$\vec{s}(t) = \vec{x}(t) + \vec{y}(t)$ και $\vec{v}(t) = \vec{v_x}(t) + \vec{v_y}(t)$

Δηλαδή η θέση του κινητού σε κάθε χρονική στιγμή $\vec{s}(t)$ προσδιορίζεται πλήρως από το διανυσματικό άθροισμα της οριζόντιας $\vec{x}(t)$ και της κάθετης συνιστώσας $\vec{y}(t)$ που αποτελούν δύο ανεξάρτητες κινήσεις. Επίσης ταυτόχρονα η ταχύτητα είναι διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους ταχυτήτων. Ανεξάρτητες είναι οι κινήσεις με την έννοια ότι δεν υπάρχουν δυνάμεις που "εμπλέκουν" τους δύο άξονες, δηλαδή που δεν έχουν συνιστώσα και στις δύο διευθύνσεις της κίνησης. Στην επαλληλία είτε οι κινήσεις εκτελούνται ταυτόχρονα είτε διαδοχικά καταλήγουν στο ίδιο σημείο στον ίδιο χρόνο.

ΟΡΙΣΜΟΙ-ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Η **οριζόντια βολή "φυσικά"** ορίζεται η κίνηση όπου το σώμα έχει αρχικά μόνο οριζόντια ταχύτητα υ_0 και εκτελεί πτώση μόνο με την επίδραση της δύναμης του βάρους (μοναδική δύναμη της κίνησης).

$\Sigma F = F_y = w = mg \Rightarrow a = g$

Η **οριζόντια βολή "μαθηματικά"** ορίζεται ως η επαλληλία

1. Ευθύγραμμης Ομαλής Κίνησης (ΕΟΚ) με σταθερή ταχύτητα την αρχική οριζόντια ταχύτητα υ_0 στον x άξονα αφού $F_x = 0$: $v_x(t) = \upsilon_0 = \sigma\tau\alpha\theta, x(t) = \upsilon_0 t$
2. Ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης (ΕΟΕΚ) ή απλά ελεύθερης πτώσης στον y άξονα εφόσον $F_y = w = mg$: $\upsilon_y(t) = gt,\ y(t) = \frac{1}{2}gt^2$ και $h(t) = H - y(t) = H - \frac{1}{2}gt^2$

ΠΟΛΥ ΠΡΟΣΟΧΗ: το y δεν είναι το ύψος από το έδαφος αλλά η κάθετη συνιστώσα της θέσης από το αρχικό σημείο από το οποίο γίνεται η βολή (την αρχική θέση πάνω από το έδαφος) προς το έδαφος. Άρα, για να βρούμε το ύψος στο οποίο βρίσκεται το σώμα κάποια χρονική στιγμή, κάνουμε $h(t) = H - y(t)$, όπου H το αρχικό ύψος από το οποίο πέφτει το σώμα.

Εξίσωση τροχιάς Για κάθε σημείο της τροχιάς (χ, y) εξάγουμε μια σχέση μεταξύ των δύο συνιστωσών:

$y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{\upsilon_0}\right)^2 \Rightarrow y = \frac{g}{2\upsilon_0^2}x^2$. Η εξίσωση αυτή μαθηματικά ονομάζεται **παραβολή**

Από την επαλληλία (σύνθεση διανυσμάτων) έχουμε:

$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 t^2 + \frac{1}{4}g^2 t^4}$, (απόσταση που διανύει από αρχικό σημείο = μέτρο μετατόπισης)

$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2 t^2}$ (μέτρο ταχύτητας κάθε στιγμή)

Επίσης αυτή η σχέση μπορεί να γραφτεί ως συνάρτηση του y καθώς $\upsilon_y = gt = \sqrt{2gy}$

$\upsilon(y) = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gy}$

Μπορούμε να ορίσουμε και την γωνία θ του διανύσματος της ταχύτητας ως προς τον οριζόντια άξονα x ως **"γωνία εκτροπής"** $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{gt}{\upsilon_0} = \frac{\sqrt{2gy}}{\upsilon_0}$

ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ

Θυμίζουμε ότι η ενεργειακή λύση είναι μια καλή επιλογή όταν δεν συμμετέχει ούτε στα δεδομένα ούτε στα ζητούμενα ο χρόνος. Εδώ ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (ΑΔΜΕ) για κάθε χρονική στιγμή αφού το σώμα κινείται μόνο με την συντηρητική δύναμη της βαρύτητας.

$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + mgH = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + mgh$

Θυμίζουμε επίσης ότι για τη συντηρητική δύναμη του βάρους ΘΜΚΕ και ΑΔΜΕ στην ουσία συμπίπτουν αφού το έργο του βάρους είναι $W_w = -\Delta U = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda} = \Delta K = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi}$

<u>ΜΕΓΕΘΗ ΠΡΟΣΕΔΑΦΙΣΗΣ</u>

Μια σημαντική χρονική στιγμή είναι **η στιγμή της προσεδάφισης** που το βαλλόμενο σώμα αγγίζει το έδαφος οπότε στον y άξονα έχει διανύσει όλο το ύψος h_0.
Για την προσεδάφιση ενεργειακά ισχύει:

$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + mgH = \frac{1}{2}mv_{\tau\varepsilon\lambda}^2 + 0$ (αφού έχει μηδέν ύψος στο έδαφος)

Ολικός χρόνος πτώσης $t_{o\lambda}$

$$y(t_{o\lambda}) = H \Rightarrow H = \frac{1}{2}gt_{o\lambda}^2 \Rightarrow t_{o\lambda} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Συνολική οριζόντια απόσταση που διένυσε, ή αλλιώς το "**βεληνεκές**" (συμβολίζεται και s_{max}):

$$x_{o\lambda} = v_0 t_{o\lambda} = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Τελική ταχύτητα εδάφους (συμβολίζεται και $v_{\varepsilon\delta}$)

$v_{\tau\varepsilon\lambda} = \sqrt{v_0^2 + 2gH} = \sqrt{v_0^2 + gt_{o\lambda}^2}$ με διεύθυνση: $\varepsilon\varphi\theta_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{v_{y,\tau\varepsilon\lambda}}{v_0} = \frac{\sqrt{2gH}}{v_0} = \frac{gt_{o\lambda}}{v_0}$

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

Τα βασικά χαρακτηριστικά μεγέθη που αρκούν για να περιγράψουμε πλήρως την κίνηση είναι:
η αρχική οριζόντια ταχύτητα v_0 και το αρχικό ύψος H ή το $t_{o\lambda}$ (αυτά τα δύο συνδέονται άμεσα)
Αν δίνονται αυτά η άσκηση είναι εφαρμογή των παραπάνω τύπων με απλή αντικατάσταση.
Επίσης αυτά μπορεί να δίνονται έμμεσα μέσω των μεγεθών προσεδάφισης. Στόχος να βρούμε v_0 και H.

1. Δ: [H, $x_{o\lambda}$]. Ζ: $v_0 =$; 2. Δ: [v_0, $x_{o\lambda}$]. Ζ: $H =$; 3. Δ: [H, $v_{\tau\varepsilon\lambda}$]. Ζ: $v_0 =$; 4. Δ: [v_0, $v_{\tau\varepsilon\lambda}$]. Ζ: $H =$;
5. Δ: [H,$\theta_{\tau\varepsilon\lambda}$]. Ζ: $v_0 =$; 6. Δ: [v_0,$\theta_{\tau\varepsilon\lambda}$]. Ζ: $H =$;
7. Δ: [$x_{o\lambda}$, $v_{\tau\varepsilon\lambda}$]. Ζ: ($v_0 =$; $H =$;) 8. Δ: [$x_{o\lambda}$, $\theta_{\tau\varepsilon\lambda}$]. Ζ: ($v_0 =$; $H =$;) 9. Δ: [$v_{\tau\varepsilon\lambda}$, $\theta_{\tau\varepsilon\lambda}$]. Ζ: ($v_0 =$; $H =$;)

Επίσης μία ταχύτητα είτε v_0 είτε $v_{\tau\varepsilon\lambda}$ ως μέτρο (σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μπορεί να δωθεί μέσω κινητικής ενέργειας Κ και μάζας m ($K = \frac{1}{2}mv^2$). Επίσης είναι προτιμότερο να δουλέψουμε ενεργειακά αν δεν υπάρχει ο χρόνος στο πρόβλημα. Υπάρχει επίσης μια σχέση που προκύπτει μετά από λίγη άλγεβρα για την μεταβολή της κινητικής ενέργειας $\frac{\Delta K}{K_{\alpha\rho\chi}} = \varepsilon\varphi^2\theta$

Τέλος άλλος ένας έμμεσος τρόπος να δωθεί η αρχική ταχύτητα v_0 είναι να δωθεί η σχέση $y = cx^2$ όπου η σταθερά c αντιστοιχεί βεβαίως στην $\frac{g}{2v_0^2}$.

Σε όλα τα παραπάνω η επιτάχυνση της βαρύτητας θεωρείται αυτή της γης, η γνωστή $g \approx 10m/s^2$. Υπάρχουν όμως ασκήσεις που η επιτάχυνση της βαρύτητας (πχ. στη σελήνη) θεωρείται ζητούμενο.

Στα δεδομένα ή στα ζητούμενα μπορεί επίσης να μην είναι αρχικά και τελικά σημεία αλλά κάποιο ενδιάμεσο σημείο της παραβολικής τροχιάς. Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις κίνησης/εξίσωση τροχιάς. Πολύ προσοχή και πάλι στα ενδιάμεσα σημεία το y δεν συμπίπτει με το ύψος από το έδαφος.

Τέλος "συνδιαστικές" ασκήσεις περιέχουν και ένα δεύτερο σώμα που κινείται ευθύγραμμα στο έδαφος ταυτόχρονα με το σώμα που εκτελεί οριζόντια βολή (συνήθως σώμα που εκτελεί πτώση από αεροπλάνο και άρα έχει την ίδια αρχική οριζόντια ταχύτητα με το αεροπλάνο) και συνήθως ζητούνται κάποια στοιχεία ώστε τελικά όταν το βαλλόμενο σώμα προσεδαφιστεί να βρίσκεται στην ίδια θέση και στον ίδιο χρόνο και το οριζόντια κινούμενο σώμα. Τότε πρέπει να συμπίπτει το βεληνεκές με την απόσταση που θα διανύσει το οριζόντια κινούμενο σώμα. Σε άλλες περιπτώσεις υπάρχει δεύτερο σώμα που εκτελεί οριζόντια βολή ή ελεύθερη πτώση με ίδια/διαφορετικά αρχικά χαρακτηριστικά.