Ταλαντώσεις

Για την Γ’ Λυκείου

Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Υγείας

Γιάννης Μπρούζος
Διδάκτωρ Φυσικής
14^o ΓΕΛ Περιστερίου

Ενότητα 1. Εισαγωγή στις Κινήσεις

Η ταλάντωση είναι μια μορφή κίνησης. Μέχρι τώρα έχετε ήδη δει στο μάθημα της φυσικής διάφορες μορφές κίνησης:

- Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση (ΕΟΚ)
- Ευθύγραμμη Ομαλά Μεταβαλλόμενη Κίνηση (ΕΟΜΚ) που περιλαμβάνει την Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνόμενη ή Επιβραδυνόμενη Κίνηση
- Ομαλή κυκλική κίνηση (ΟΚΚ)
- Οριζόντια βολή (σύνθεση ΕΟΚ και ΕΟΜΚ)

Όλες οι κινήσεις είναι στην πραγματικότητα αλλαγές της θέσης $\vec{x}$ του κινητού και άρα χαρακτηρίζονται από:

- Ένα πεδίο δυνάμεων που καταλήγουν σε μια συνισταμένη δύναμη $\vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)$ η οποία εξαρτάται ή όχι από την θέση ή/και από τον χρόνο ή/και από άλλα μεγέθη όπως η ταχύτητα.
- Μία εξίσωση κίνησης $\vec{x}(t)$ που δείχνει (και προβλέπει) την θέση που βρίσκεται το κινητό κάθε χρονική στιγμή t
- Έναν ρυθμό αλλαγής (μεταβολής) της θέσης που ονομάζεται ταχύτητα $\vec{v}(t)$ και η οποία δείχνει πόσο γρήγορα αλλάζει η θέση. Μαθηματικά ορίζεται ως η παράγωγος της θέσης $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{x}}{dt}$
- Έναν ρυθμό αλλαγής (μεταβολής) της ταχύτητας που ονομάζεται επιτάχυνση $\vec{\alpha}(t)$ και η οποία δείχνει πόσο γρήγορα αλλάζει η ταχύτητα. Μαθηματικά ορίζεται ως η παράγωγος της ταχύτητας $\vec{\alpha}(t) = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

Η έννοια και ο τρόπος υπολογισμού της παραγωγού που δίνει όλα τα “παράγωγα” μεγέθη (πχ. ταχύτητα, επιτάχυνση) αναλύεται εκτενέστερα στο μαθηματικό βοήθημα της επόμενης ενότητας (βλ. Ενότητα 2)

Αυτό που πρέπει να κρατήσουμε εδώ είναι ότι κάθε είδους κίνηση χαρακτηρίζεται από την μορφή της συνισταμένης δύναμης $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x},t)$ η οποία με την σειρά της καθορίζει την εξίσωση κίνησης $\overrightarrow{x}(t)$.

Ο τρόπος που η συνισταμένη δύναμη καθορίζει την εξίσωση κίνησης έχει δωθεί από τον Νεύτωνα με τον περιβόητο Νόμο του:

$$\overrightarrow{\Sigma F}=\frac{d\overrightarrow{p}}{dt}$$

Εδώ εμφανίζεται η μεταβολή της ορμής η οποία στα κλασσικά μηχανικά συστήματα ορίζεται ως το γινόμενο της μάζας επί την ταχύτητα $\overrightarrow{p}=m\overrightarrow{v}$

Άρα μπορούμε να γράψουμε (όταν η μάζα είναι σταθερή αμετάβλητη στον χρόνο) τον Νόμο του Νεύτωνα στην πιο γνωστή μορφή του:

$$\overrightarrow{\Sigma F}=\frac{d\overrightarrow{p}}{dt}=m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}=m\overrightarrow{\alpha}$$

Άρα για να αποδείξουμε ότι όντως μια μορφή της εξίσωσης κίνησης $\overrightarrow{x}(t)$ αντιστοιχεί στην μορφή της συνισταμένης δύναμης $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x},t)$ πρέπει να την "παραγωγίσουμε" μία φορά (για να βρούμε την ταχύτητα) και άλλη μια φορά (για να βρούμε την επιτάχυνση) και να δούμε αν αυτή επαληθεύει τον Νόμο του Νεύτωνα. Πριν εφαρμόσουμε αυτήν την μεθοδολογία θα πρέπει να δούμε πως "παραγωγίζονται" διάφορες συνήθεις συναρτήσεις και το κάνουμε αυτό στην επόμενη ενότητα (Ενότητα 2).

Είναι όμως πάντα δυνατόν να βρούμε μια ρητά εκφρασμένη (με συνήθεις συναρτήσεις) σε κλειστή αναλυτική μορφή -όπως λέγεται- εξίσωση κίνησης για κάθε είδους συνισταμένη δύναμη $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{v},t)$; Η απάντηση είναι βεβαίως όχι! Μόνο για πολύ λίγες περιπτώσεις τα έχουμε καταφέρει μεταξύ των οποίων και η ταλάντωση που μαθαίνουμε εδώ. Και για αυτό ακριβώς -επειδή ξέρουμε ακόμα μόνο πολύ λίγα- υπάρχει ακόμα πεδίο ελεύθερο για να δημιουργήσουν οι επιστήμονες του μέλλοντος: εσείς!

Ενότητα 2. Παράγωγος και ρυθμός μεταβολής

Η παράγωγος είναι ένα πολύ χρήσιμο μαθηματικό εργαλείο που εισήγαγε (ποιος άλλος;) ο Νεύτωνας γιατί ακριβώς δείχνει τον ρυθμό μεταβολής διαφόρων μεγεθών που μας ενδιαφέρουν καθώς εξετάζουμε κάποιο φαινόμενο όπου όλα αλλάζουν συνεχώς. Ένα τέτοιο φαινόμενο είναι βεβαίως η κίνηση κάθε μορφής. Στην πραγματικότητα κάθε φαινόμενο που περιέχει αλλαγή περιέχει και κάποιου είδους κίνηση.

Στο επίπεδο που μας ενδιαφέρει εδώ πρέπει απλά να καταλάβουμε ότι για να βρούμε μια παράγωγο πρέπει να πάρουμε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα dt και να δούμε πόσο άλλαξε το μέγεθος μας που είναι μια συνάρτηση του χρόνου $f(t)$. Το μέγεθος μας έχει αλλάξει και αυτό πολύ λίγο (εξαρτάται από το ποια είναι αυτή η συνάρτηση) και την μικρή αυτή αλλαγή του την συμβολίζουμε $df(t)$. Η παράγωγος λοιπόν συμβολίζεται ως:

$$\frac{df(t)}{dt}$$

Παράδειγμα μεγέθους η θέση $\vec{x}(t)$. Η παράγωγος συμβολίζεται τότε ως $\dfrac{d\vec{x}(t)}{dt}$ και βέβαια δεν είναι άλλη από την γνωστή μας ταχύτητα $\vec{v}(t)$ ο ρυθμός μεταβολής της θέσης δηλαδή σε αυτήν την περίπτωση. Αντίστοιχα η παράγωγος της ταχύτητας δίνει την επιτάχυνση.

Χωρίς μαθηματικές αποδείξει (αν και υπάρχουν και τα παιδιά της Θετικής θα τις μάθουν) ας δούμε την παράγωγο μερικών πολύ βασικών συναντήσεων. Μπορείτε να μην διαβάσετε από δω και πέρα αν δεν σας ενδιαφέρει καθώς αυτό είναι καθαρά εκτός ύλης για τα παιδιά της κατεύθυνσης των Επιστημών Υγείας.

◉ Σταθερή συνάρτηση $f(t) = c$ όπου c μια σταθερά δηλαδή ένας αριθμός που δεν αλλάζει με τον χρόνο. Εφόσον είναι σταθερή η παραγωγός της δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της θα πρέπει να είναι μηδέν (αφού είναι σταθερή και δεν μεταβάλλεται. Όντως σε αυτήν την περίπτωση:

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{dc}{dt} = 0$$

◉Συνάρτηση αναλογίας ή ευθείας $f(t) = ct$ όπου c πάλι μια σταθερά που εδώ ονομάζεται και σταθερά αναλογίας ή κλίση της ευθείας. Σε αυτήν την περίπτωση η παράγωγος είναι ακριβώς αυτή η κλίση δηλαδή το c. Πράγματι σε αυτήν την περίπτωση $\frac{df(t)}{dt} = \frac{d(ct)}{dt} = c$

◉Συνάρτηση δευτέρου βαθμού ή τετραγώνου $f(t) = ct^2$. Σε αυτήν την περίπτωση $\frac{df(t)}{dt} = \frac{d(ct^2)}{dt} = 2ct$

◉Συνάρτηση ημιτόνου $f(t) = A\eta\mu\omega t$(όπου A και ω σταθερές που επίτηδες συμβολίζω με αυτά τα γράμματα για να συνδεθούν με τα επόμενα και ιδιαίτερα την ταλάντωση). Σε αυτήν την περίπτωση

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{d(c\eta\mu\omega t)}{dt} = c\omega\sigma\upsilon\nu(\omega t)$$

◉Συνάρτηση συνημιτόνου $f(t) = A\sigma\upsilon\nu\omega t$. Σε αυτήν την περίπτωση $\frac{df(t)}{dt} = \frac{d(c\sigma\upsilon\nu\omega t)}{dt} = -c\omega\eta\mu\omega t$

◉Συνάρτηση αντίστροφης αναλογίας $f(x) = \frac{c}{x}$. Επίτηδες εδώ μιλάμε για χωρική συνάρτηση διότι αυτή η παράγωγος αφορά κυρίως την σχέση δυναμικής ενέργειας και δύναμης, βαρυτικό ή ηλεκτρικό πεδίο

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d(c/x)}{dx} = -\frac{c}{x^2}$$

Βεβαίως παράγωγος μπορεί να υπάρξει και ως προς άλλα μεγέθη πέρα από τον χρόνο όπως ο χώρος -όπως είδαμε στην τελευταία περίπτωση ή άλλα. Εδώ συνήθως όμως μας ενδιαφέρει η παράγωγος ως προς τον χρόνο.

Ενότητα 3. Οι κινήσεις και οι εξισώσεις τους

Για όλες τις κινήσεις που γνωρίζουμε μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι όντως η εξίσωση κίνησης του και η συνισταμένη δύναμη στην οποία υπόκεινται υπακούουν στον Νόμο του Νεύτωνα. Θα το κάνουμε για την ΕΟΚ παραδειγματικά.

Στις ευθύγραμμες (και γενικότερα μονοδιάστατες κινήσεις) δεν χρειάζεται να χρησιμοποιούμε διανύσματα. Όλα τα διανυσματικά μεγέθη μπορεί να είναι θετικά ή αρνητικά σύμφωνα με την αλγεβρική τιμή τους.

Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση (ΕΟΚ)

Στην ΕΟΚ έχουμε $\Sigma F = 0$. Ας σταθούμε λίγο εδώ γιατί αυτή στην πραγματικότητα είναι η συνθήκη ισορροπίας, που σημαίνει αυτόματα σταθερή ταχύτητα (και όχι αναγκαστικά μηδέν) και μηδενική επιτάχυνση.

Η εξίσωση κίνησης στην ΕΟΚ είναι $x(t) = x_0 + v_0 t$ όπου x_0 (αρχική θέση σε χρόνο $t = 0$) και v_0 (αρχική ταχύτητα) είναι κάποιες σταθερές.

Παραγωγίζω μια φορά την εξίσωση κίνησης για να βρω την ταχύτητα

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(x_0 + v_0 t)}{dt} = \frac{d(x_0)}{dt} + \frac{d(v_0 t)}{dt} = 0 + v_0 = v_0$$

Προφανώς απλά βρήκαμε ότι η ταχύτητα είναι σταθερή και ίση με v_0

Παραγωγίζω τώρα την ταχύτητα για να βρω την επιτάχυνση

$$\alpha(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d(v_0)}{dt} = 0$$

Όπως αναμενόταν για την ΕΟΚ μια κίνηση με σταθερή ταχύτητα η επιτάχυνση είναι μηδέν. Μόλις όμως αποδείξαμε κάτι πολύ σημαντικό. Ο νόμος του Νεύτωνα $\Sigma F = m\alpha$ πράγματι επαληθεύεται από την εξίσωση κίνησης στην ΕΟΚ αφού τόσο το αριστερό μέλος (η δύναμη) όσο και το δεξί (η επιτάχυνση που βγήκε από την εξίσωση κίνησης) είναι ίσα με μηδέν.

Αυτό που κάναμε μπορούμε να το επαναλάβουμε για κάθε γνωστή μας κίνηση. Το αφήνω σαν άσκηση σε όποιο παιδί ενδιαφέρεται για την ΕΟΜΚ.

Παρακάτω απλά θα παραθέσω για κάθε ευθύγραμμη κίνηση τις εξισώσεις που πρέπει να γνωρίζουμε και για τις εξετάσεις ώστε να τα έχετε σε συνοπτική μορφή. Σε αυτήν την λίστα (τρίτη στήλη) ανοίκει και η απλή αρμονική ταλάντωση (ΑΑΤ) ένα είδος γραμμικής ταλάντωσης που θα εξετάσουμε στην επόμενη ενότητα (βλ. Υποενότητες 4.1-4.2). Στον πίνακα υπάρχουν οι αντίστοιχες εξισώσεις για να τα έχετε όλα μαζί. Ακόμα και αν δεν γνωρίζουμε τα σύμβολα των εξισώσεων της ΑΑΤ, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η εξίσωση κίνησης που καταλήγει στην συγκεκριμένη επιτάχυνση επαληθεύει τον νόμο του Νεύτωνα δηλαδή $\Sigma F = m\alpha$

ΕΟΚ	**ΕΟΜΚ**	**ΑΑΤ**
$\Sigma F = 0$	$\Sigma F = F = \sigma\tau\alpha\theta$	$\Sigma F = -Dx = -m\omega^2 x$
$x(t) = x_0 + v_0 t$	$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\alpha_0 t^2$	$x(t) = A\eta\mu(\omega t + \varphi)$
$v(t) = v_0 = \sigma\tau\alpha\theta$	$v(t) = v_0 + a_0 t$	$v(t) = A\omega\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi)$
$\alpha(t) = 0$	$\alpha(t) = \alpha_0 = \sigma\tau\alpha\theta$	$\alpha(t) = -A\omega^2\eta\mu(\omega t + \varphi)$

Ενότητα 4. Απλή αρμονική ταλάντωση

4.1 Γενικά χαρακτηριστικά της ταλάντωσης

Η ταλάντωση είναι γενικά μια παλίνδρομη περιοδική κίνηση που επαναλαμβάνεται σε τακτά χρονικά διαστήματα (περιόδους). Μπορούμε να έχουμε διάφορα είδη ταλαντώσεων σε μία ή πολλές διαστάσεις. Ένα πολύ κλασικό παράδειγμα είναι το **εκκρεμές** με το οποίο ξεκίνησε η ιστορία της σύγχρονης επιστήμης όταν ο 17χρονος Γαλιλαίος πριν 440 χρόνια έκανε τις παρατηρήσεις και τα πειράματα του ενθουσιασμένος από την ταλαντωτική κίνηση των πολυέλαιων μιας εκκλησίας. Ένα άλλο τέτοιο σύστημα είναι το (ιδανικό) **ελατήριο** το οποίο ταλαντώνεται πάνω σε μια ευθεία με τον τρόπο ακριβώς που μας ενδιαφέρει εδώ δηλαδή με απλή αρμονική ταλάντωση.

Κάποια γενικά χαρακτηριστικά κάθε ταλαντωτικής κίνησης είναι τα εξής:

- Η **περίοδος** T που ορίζεται ως ο χρόνος που απαιτείται για την ολοκλήρωση μίας επανάληψης της κίνησης. Αν μετρήσω N επαναλήψεις της κίνησης σε χρόνο t_{count} τότε προφανώς η περίοδος είναι $T = \dfrac{t_{count}}{N}$
- Η **συχνότητα** f που ορίζεται απλά ως το αντίστροφο της περιόδου $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{N}{t_{count}}$
- Η **γωνιακή συχνότητα** ω που δεν έχει ιδιαίτερη φυσική σημασία απλά μας βολεύει γιατί συντομεύει τον συμβολισμό και ορίζεται ως: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$
- **Θέση Ισορροπίας ΘΙ** ορίζεται η θέση όπου η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο κινητό είναι μηδέν $\overrightarrow{\Sigma F} = 0$. Είναι η πιο σημαντική θέση σε μια ταλάντωση καθώς αποτελεί το σημείο αναφοράς. Ουσιαστικά όλη η αξία της μελέτης των ταλαντώσεων οφείλεται στο ότι τα περισσότερα δυναμικά συστήματα (φυσικά, χημικά, βιολογικά, κοινωνικά, οικονομικά) έχουν μία ή περισσότερες ΘΙ που καθορίζουν την εξέλιξή τους. Επίσης είναι η θέση στην οποία οι περισσότερες πραγματικές ταλαντώσεις που φθίνουν με την πάροδο του χρόνου καταλήγουν τελικά (βλ. Υποενότητα 5.2 Φθίνουσες ταλαντώσεις)
- **Απομάκρυνση** $\overrightarrow{x}$ είναι η θέση του κινητού κάθε χρονική στιγμή ως προς την ΘΙ δηλαδή με σημείο αναφοράς την ΘΙ.
- **Θέσεις Μέγιστης Απομάκρυνσης ΘΜΑ** είναι οι θέσεις όπου η απομάκρυνση παίρνει την μέγιστη (απόλυτη) τιμή της.

- **Πλάτος** A της ταλάντωσης ορίζεται ως η απόλυτη τιμή της μέγιστης απομάκρυνσης ή αλλιώς η απόσταση της ΘΜΑ από την ΘΙ.

4.2 Απλή Αρμονική ταλάντωση ορισμός και εξισώσεις

Η ταλάντωση σε μία ευθεία ονομάζεται **γραμμική ταλάντωση**

Μια περίπτωση γραμμικής ταλάντωσης είναι η **Απλή Αρμονική Ταλάντωση (ΑΑΤ)** η οποία μπορεί να οριστεί με δύο ισοδύναμου τρόπους:

ΑΑΤ ορισμός 1: Η κίνηση όπου η συνισταμένη δύναμη (επαναφοράς) ΣF είναι ανάλογη της απομάκρυνσης x από την Θ.Ι. και αντίθετης φοράς. $\Sigma F = -Dx$

D είναι η σταθερά αναλογίας ή σταθερά επαναφοράς

ΑΑΤ ορισμός 2: Η κίνηση όπου η θέση του κινητού υπακούει στην εξίσωση κίνησης $x(t) = A\eta\mu(\omega t + \varphi)$

Οι παραπάνω ορισμοί είναι ισοδύναμοι γιατί απλά με εξίσωση κίνησης σύμφωνα με τον δεύτερο ορισμό επαληθεύουμε τον Νόμο του Νεύτωνα για την δύναμη όπως δίνεται στον πρώτο ορισμό.

Η **ταχύτητα** από την παραγώγιση της εξίσωσης κίνησης προκύπτει:

$$v(t) = A\omega\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi)$$

Η **επιτάχυνση** από την παραγώγιση της ταχύτητας προκύπτει:

$$\alpha(t) = -A\omega^2\eta\mu(\omega t + \varphi)$$

Άρα εν τελεί έχουμε για τον νόμο του Νεύτωνα:

$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow -Dx = -m\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi) \Rightarrow D = m\omega^2$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει η **περίοδος της ΑΑΤ** ως συνάρτηση της μάζας και της σταθεράς επαναφοράς.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

Αφήσαμε τελευταίο τον σχολιασμό του φ που ονομάζεται αρχική φάση της ταλάντωσης. Όπως για την ΕΟΚ ή την ΕΟΜΚ μπορεί να υπάρχει μια αρχική θέση x_0 έτσι και η ταλάντωση δεν ξεκινάει αναγκαστικά από την ΘΙ δηλαδή $x_0 = 0$. Αν ξεκινάει οπουδήποτε αλλού θα πρέπει να μπει αυτή η αρχική φάση για να προκύπτει (όταν θέσουμε $t = 0$) το σωστό x_0

Γενικότερα όλη η ποσότητα μέσα στο ημίτονο $(\omega t + \varphi)$ για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή ονομάζεται φάση της ταλάντωσης γιατί ακριβώς δείχνει σε ποια "φάση" της επαναληπτικής κίνησης βρισκόμαστε την δεδομένη στιγμή. Επίσης αν γνωρίζουμε τί συμβαίνει σε μια φάση γνωρίζουμε επίσης τί θα συμβεί σε όλες τις φάσεις που απέχουν κάποιο ακέραιο πολλαπλάσιο του κύκλου ($n2\pi$ όπου $n = \ldots -2, -1{,}0{,}1{,}2\ldots$) από αυτήν την συγκεκριμένη φάση (βλ. Υποενότητα 4.3)

Ενέργεια: Στην ΑΑΤ ισχύει η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας δηλαδή ότι το σύνολο δυναμικής και κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι σταθερό καθόλη την διάρκεια της κίνησης. $E = U(t) + K(t) = \sigma\tau\alpha\theta$

Η Κινητική ενέργεια ορίζεται όπως πάντα:

$$K(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi)$$

Η δυναμική ενέργεια που προκύπτει από την σχέση $F = -\dfrac{dU}{dx}$ είναι:

$$U(t) = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\eta\mu^2(\omega t + \varphi)$$

Εύκολα επαληθεύουμε (υπενθυμίζω ότι $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$) ότι η συνολική μηχανική ενέργεια είναι σταθερή και ίση με

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

Είναι ίσως το κυριότερο "κλειδί" που κρύβεται πίσω από την λύση πολλών ασκήσεων, καθώς σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή το κινητό θα έχει κάποια απομάκρυνση x και κάποια ταχύτητα v που θα υπακούουν στην εξίσωση:

$$\frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \omega^2A^2 = \omega^2x^2 + v^2$$

4.3 Φασική Ανάλυση της ΑΑΤ

Ουσιαστικά σε κάθε χρονική στιγμή t της ταλάντωσης όλα καθορίζονται από το σε ποια φάση $\omega t + \varphi$ βρισκόμαστε. Αυτό συμβαίνει γιατί τα ημίτονα και τα συνημίτονα που εμφανίζονται στις εξισώσεις μας (ημιτονοειδείς συναρτήσεις) παίρνουν ακριβώς την ίδια τιμή για φάσεις που απέχουν ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του κύκλου ($n2\pi$ όπου $n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2\ldots$).

Δύο σημαντικές φάσεις της ταλάντωσης η ΘΙ και οι ΘΜΑ έχουν τα χαρακτηριστικά που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

ΘΕΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΘΙ	**ΘΕΣΕΙΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗ ΘΜΑ**
$\omega t + \varphi = n\pi$ όπου $n = 0,1,2....$	$\omega t + \varphi = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ όπου $n = 0,1,2....$
$x = 0$	$x = \pm x_{max} = \pm A$ με πρόσημο $(+)$ για $m = 0,2,4...$ και $(-)$ για $m = 1,3,5...$
$v = \pm v_{max} = \pm A\omega$ με πρόσημο $(+)$ για $n = 0,2,4...$ και $(-)$ για $n = 1,3,5...$	$v = 0$
$\alpha = 0$	$\alpha = \pm \alpha_{max} = \pm A\omega^2$ με πρόσημο $(-)$ για $n = 0,2,4...$ και $(+)$ για $n = 1,3,5...$
$\Sigma F = 0$	$\Sigma F = \pm \Sigma F_{max} = \pm m\omega^2 A = \pm DA$ με πρόσημο $(-)$ για $n = 0,2,4...$ και $(+)$ για $n = 1,3,5...$
$K = K_{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = E$	$K = 0$
$U = 0$	$U = U_{max} = \frac{1}{2}Dx_{max}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = E$

Να σημειώσουμε εδώ ότι η δυναμική και η κινητική ενέργεια είναι πάντα θετικές και εναλλάσσονται μεταξύ τους καθώς η μία μετατρέπεται στην άλλη. Η δυναμική είναι μέγιστη και ίση με την συνολική στην ΘΜΑ ενώ η κινητική στην ΘΙ.

Τώρα ας θυμηθούμε από τα μαθηματικά ότι (πρέπει να) γνωρίζουμε κάποιες συγκεκριμένες τιμές για το ημίτονο και το συνημίτονο οι οποίες είναι άλλες φάσεις που έχουν μια ξεχωριστή σημασία στις ταλαντώσεις

Ας θυμηθούμε λοιπόν ότι:

$\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$	$\eta\mu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\eta\mu\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

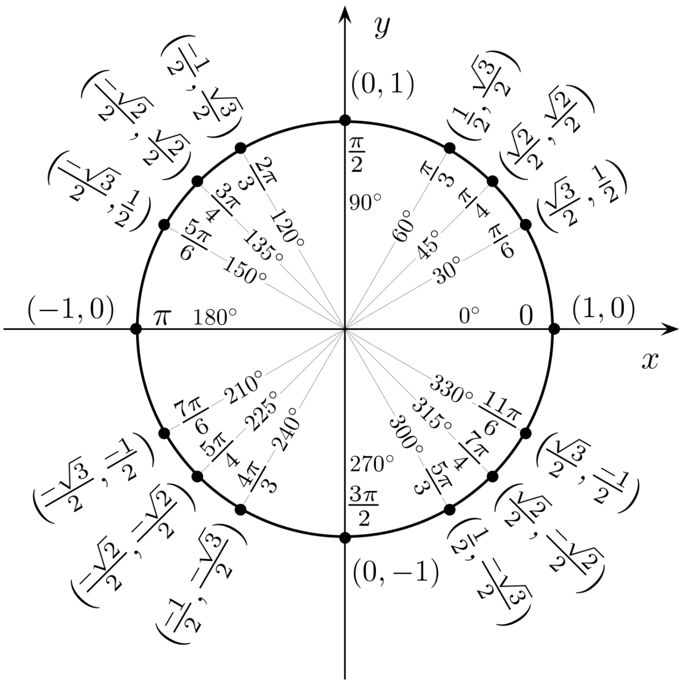
Άρα ας δούμε τί γίνεται σε αυτές τις φάσεις

$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\omega t+\varphi=\frac{\pi}{6}+2n\pi$ όπου $n=0,1,2....$	$\omega t+\varphi=\frac{\pi}{4}+2n\pi$ όπου $n=0,1,2....$	$\omega t+\varphi=\frac{\pi}{3}+2n\pi$ όπου $n=0,1,2....$
$x=\frac{1}{2}x_{max}=\frac{1}{2}A$	$x=\frac{\sqrt{2}}{2}x_{max}=\frac{\sqrt{2}}{2}A$	$x=\frac{\sqrt{3}}{2}x_{max}=\frac{\sqrt{3}}{2}A$
$v=\frac{\sqrt{3}}{2}v_{max}=\frac{\sqrt{3}}{2}A\omega$	$v=\frac{\sqrt{2}}{2}v_{max}=\frac{\sqrt{2}}{2}A\omega$	$v=\frac{1}{2}v_{max}=\frac{1}{2}A\omega$
$\alpha=-\frac{1}{2}\alpha_{max}=-\frac{1}{2}\omega^2A$	$\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_{max}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\omega^2A$	$\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_{max}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2A$
$\Sigma F=-\frac{1}{2}F_{max}=-\frac{1}{2}m\omega^2A$	$\Sigma F=-\frac{\sqrt{2}}{2}F_{max}=-\frac{\sqrt{2}}{2}m\omega^2A$	$\Sigma F=-\frac{\sqrt{3}}{2}F_{max}=-\frac{\sqrt{3}}{2}m\omega^2A$
$K=\frac{3}{4}K_{max}=\frac{3}{4}\frac{1}{2}mv_{max}^2=\frac{3}{8}m\omega^2A^2$	$K=\frac{1}{2}K_{max}=\frac{1}{2}\frac{1}{2}mv_{max}^2=\frac{1}{4}m\omega^2A^2$	$K=\frac{1}{4}K_{max}=\frac{1}{4}\frac{1}{2}mv_{max}^2=\frac{1}{8}m\omega^2A^2$
$U=\frac{1}{4}U_{max}=\frac{1}{4}\frac{1}{2}Dx_{max}^2=\frac{1}{8}m\omega^2A^2$	$U=\frac{1}{2}U_{max}=\frac{1}{2}\frac{1}{2}Dx_{max}^2=\frac{1}{4}m\omega^2A^2$	$U=\frac{3}{4}U_{max}=\frac{3}{4}\frac{1}{2}Dx_{max}^2=\frac{3}{8}m\omega^2A^2$

Παρατηρούμε ότι από τον παραπάνω πίνακα προκύπτουν διάφορα ενδιαφέροντα στοιχεία για τις φάσεις αυτές της ταλάντωσης:

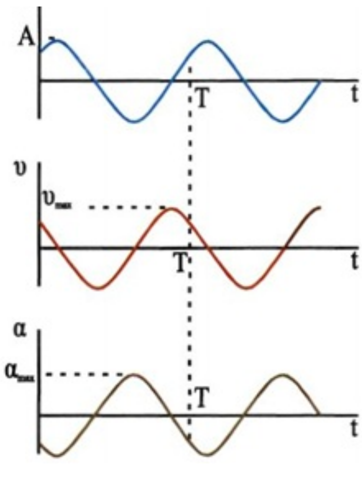
Έχουμε για παράδειγμα το απομάκρυνση στο μισό πλάτος στην φάση $\pi/6$, ενώ η κινητική και η δυναμική ενέργεια γίνονται ίσες (και ίσες με το μισό της συνολικής βεβαίως) στην φάση $\pi/4$

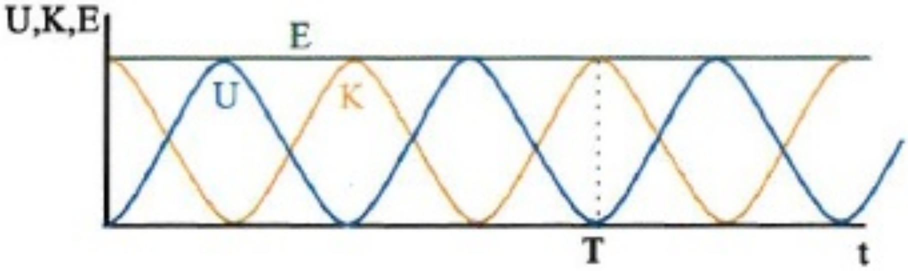
Αυτά όλα βέβαια προκύπτουν εύκολα από την επίλυση των αντίστοιχων εξισώσεων ενώ είναι σημαντικό να θυμόμαστε επίσης τον τριγωνομετρικό κύκλο που προκύπτει από τις επιπλέον ιδιότητες ημιτόνων και συνημιτόνων.



$\eta\mu(\pi-\theta)=\eta\mu\theta$	$\eta\mu(\pi+\theta)=-\eta\mu\theta$	$\eta\mu(\pi/2-\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta$	$\eta\mu(\pi/2+\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta$	$\eta\mu(-\theta)=-\eta\mu(\theta)$
$\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta$	$\sigma\upsilon\nu(\pi+\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta$	$\sigma\upsilon\nu(\pi/2-\theta)=\eta\mu\theta$	$\sigma\upsilon\nu(\pi/2+\theta)=-\eta\mu\theta$	$\sigma\upsilon\nu(-\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta$

Καλό είναι να έχουμε και μια καλή εικόνα των γραφικών παραστάσεων όλων των συναντήσεων ως προς τον χρόνο.





5. Φθίνουσες και εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

5.1 Εισαγωγή -ορισμοί

Είναι προφανές ότι στην φύση αργά η γρήγορα μια εξιδανικευμένη περίπτωση όπως η ΑΑΤ θα "σβήσει" θα "φθίνει" καταλήγοντας στην ΘΙ. Για παράδειγμα για ένα πραγματικό ελατήριο που έχει επιμηκυνθεί αρχικά το πλάτος της ταλάντωσης του θα μειώνεται σταδιακά για να καταλήξει σε μια ακινησία στην ΘΙ. Λόγω τριβών ή αντιστάσεων και αποβολής θερμότητας από το σύστημα στο περιβάλλον η αρχική ενέργεια σταδιακά μειώνεται.

Ορισμός 1: Φθίνουσα ή αποσβεννύμενη ταλάντωση είναι αυτή που σταδιακά με την πάροδο του χρόνου το πλάτος και η ενέργεια της μειώνεται.

Μπορούμε να αναπληρώνουμε αυτήν την ενέργεια αυτή ασκώντας μια εξωτερική περιοδική δύναμη (διεγείρουσα δύναμη) με αποτέλεσμα να διατηρούμε ένα σταθερό πλάτος ταλάντωσης.

Ορισμός 2: Η εξαναγκασμένη ταλάντωση είναι αυτή που διατηρεί το πλάτος της ταλάντωσης σταθερό με την άσκηση εξωτερικής περιοδικής δύναμης της οποίας η περίοδος ισούται με την περίοδο της ταλάντωσης.

5.2 Φθίνουσες ταλαντώσεις με σταθερά απόσβεσης

Μια σημαντική περίπτωση φθίνουσων ταλαντώσεων είναι όταν η δύναμη απόσβεσης (η δύναμη που αντιτίθεται στην κίνηση, πχ. η τριβή) είναι ανάλογη και αντίθετης φοράς με την ταχύτητα.

$$F' = -bv$$

Με σταθερά αναλογίας b η οποία ονομάζεται και σταθερά απόσβεσης.

Η συνολική δύναμη λοιπόν στο σώμα είναι πλέον

$$\Sigma F = F + F' = -Dx - bv$$

Σε αυτήν την περίπτωση η εξίσωση κίνησης (που επαληθεύει τον Νόμο του Νεύτωνα) είναι η εξής:

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \sigma\upsilon\nu\omega t$$

Για ευκολία αυτή η εξίσωση ξεκινάει από την ΘΜΑ δηλαδή στην αρχική χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε $x(0) = A_0$ δηλαδή ίσο με το αρχικό πλάτος. Ουσιαστικά είναι σαν να έχουμε βάλει αρχική φάση $\varphi = \pi/2$.

Το πλάτος λοιπόν μειώνεται σύμφωνα με την εξίσωση

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} = A_0 e^{-\Lambda t}$$

όπου A_0 είναι το αρχικό πλάτος. Μπορούμε για ευκολία να συμβολίσουμε $\Lambda = \dfrac{b}{2m}$. Στο βιβλίο εμφανίζεται μόνο το Λ χωρίς να λέγεται ότι είναι ίσο με αυτό το πηλίκο απλά ότι εξαρτάται από την σταθερά απόσβεσης και την μάζα. Είναι όμως μια πολύ απλή εξάρτηση.

Από αυτό προκύπτει και η σταθερή αναλογία διαδοχικών μέγιστων δηλαδή χρονικών στιγμών όπου η φάση τους $\omega t_n + \varphi$ διαφέρει κατά 2π δηλαδή $\omega t_{n+1} + \varphi - (\omega t_n + \varphi) = 2\pi \Rightarrow t_{n+1} - t_n = 2\pi/\omega$. Έχουμε συνεπώς:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{e^{-\Lambda t_{n+1}}}{e^{-\Lambda t_n}} = e^{-\frac{b}{2m}(t_{n+1}-t_n)} = e^{-\Lambda 2\pi} = e^{-\frac{b}{m}} = \sigma\tau\alpha\theta$$

Πρακτικά από της εξισώσεις της ΑΑΤ και την αντίστοιχη ανάλυση που κάναμε το μόνο που αλλάζει είναι αυτή η σταδιακή μείωση του πλάτους.

Η σημαντικότερη αλλαγή σε αυτό είναι η αντίστοιχη μείωση της ενέργειας:

$$E(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A(t)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 e^{-2\Lambda t} = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 e^{-\frac{b}{m}t}$$

Συνεπάγεται επίσης ότι οι διαδοχικές μειώσεις της ενέργειας σε κάθε διαδοχική μέγιστη απομάκρυνση έχουν επίσης σταθερό λόγο

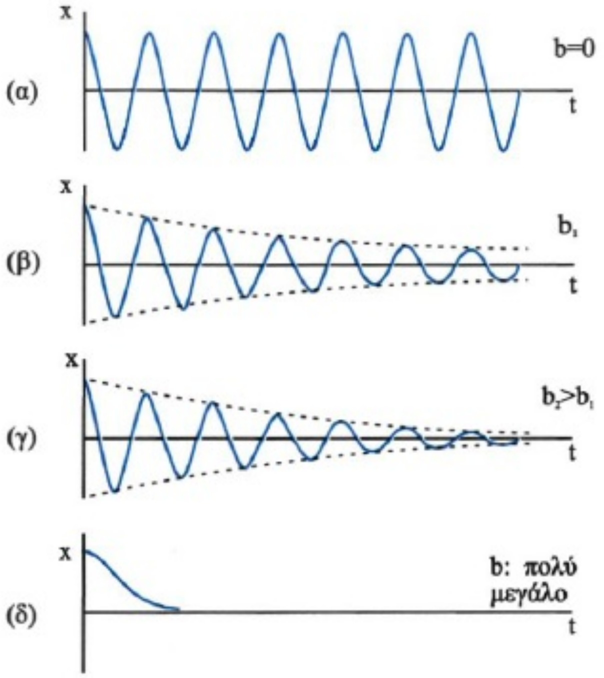
$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = \frac{A_{n+1}^2}{A_n^2} = e^{-\Lambda 4\pi} = e^{-\frac{2b}{m}} = \sigma\tau\alpha\theta$$

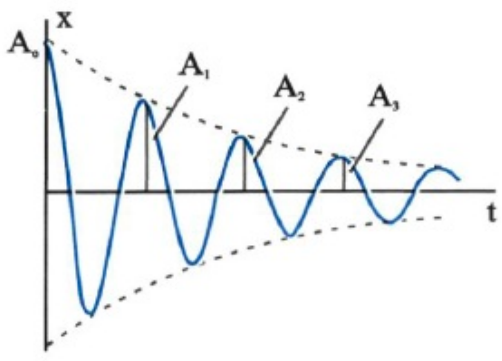
Παρατηρούμε βέβαια ότι όσο μεγαλύτερη η σταθερά απόσβεσης b τόσο μεγαλύτερη και η μείωση του πλάτους και της ενέργειας σε κάθε βήμα (διαδοχικό μέγιστο) όπως αναμενόταν αφού το μέγεθος b καθορίζει ακριβώς πόσο γρήγορα θα "φθίνει" ή "σβήνει" η ταλάντωση.

Τώρα η γωνιακή συχνότητα έχει μια μικρή μείωση σε σχέση με την αρχική του ιδανικού αρμονικού ταλαντωτή (ιδανικό ελατήριο που κάνει ΑΑΤ). Αυτό δίνει μια μικρή αύξηση στην περίοδο η οποία όμως στα πλαίσια της ύλης μας θεωρείται αμελητέα (πολύ μικρή). Παρόλα αυτά ας γράψουμε την τελική σχέση (εκτός ύλης) για να έχετε μια εικόνα.

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \Lambda^2}$$

Όλα αυτά όμως συμβαίνουν υπό έναν όρο τον οποίο βλέπουμε χαρακτηριστικά στην τελευταία σχέση. Άν η σταθερά απόσβεσης είναι πολύ μεγάλη (για την ακρίβεια $\Lambda^2 > \frac{D}{m} \Rightarrow \frac{b^2}{4m^2} > \frac{D}{m} \Rightarrow b > 2\sqrt{mD}$) έχουμε κατευθείαν απόσβεση χωρίς να ολοκληρωθεί ούτε μισή περίοδος δηλαδή απεριοδική (και όχι ταλαντωτική) κίνηση.





$$\frac{A_o}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = ... = \sigma\tau\alpha\theta.$$

5.3 Εξαναγκασμένη ταλάντωση

Όπως είδαμε ένας ιδανικός αρμονικός ταλαντωτής (ένα ιδανικό ελατήριο χωρίς τριβές) εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με μια συχνότητα:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$$

Αυτή η συχνότητα χαρακτηρίζει μόνο τον ίδιο τον ταλαντωτή, το ίδιο το ελατήριο και **εξαρτάται αποκλειστικά από τα χαρακτηριστικά του ταλαντούμενου συστήματος** (σταθερά επαναφοράς και μάζα σώματος που ταλαντώνεται). Για αυτόν τον λόγο ονομάζεται **ίδιο-συχνότητα.**

Ακόμα και όταν ο ταλαντωτής είναι ένα πραγματικό ελατήριο είδαμε ότι η ιδιοσυχνότητα είναι πρακτικά και πάλι η συχνότητα ταλάντωσης του (με μια μικρή απόκλιση προς τα κάτω λόγω της σταθεράς απόσβεσης) και αλλάζει κυρίως το πλάτος (μειώνεται με την πάροδο του χρόνου). Η φθίνουσα ταλάντωση που συμβαίνει με μια συχνότητα πάρα πολύ κοντά στην ιδιοσυχνότητα ονομάζεται **ελεύθερη ταλάντωση.**

Όμως αν θέλουμε να έχει το ταλαντούμενο σύστημα σταθερό πλάτος και ενέργεια τότε πρέπει να εισάγουμε ενέργεια με μια εξωτερική δύναμη. Όταν αυτή η δύναμη που ονομάζεται **διεγείρουσα δύναμη** είναι περιοδική $F = F_0 \eta\mu\omega t$ με μια συχνότητα $f = \frac{\omega}{2\pi}$ τότε και το σύστημα ταλαντώνεται ακριβώς με αυτήν την συχνότητα.

Η συνολική δύναμη σε αυτό το σύστημα είναι $\Sigma F = -Dx - bv + F_0 \eta\mu\omega t$.

Η εξίσωση κίνησης που επαληθεύει τον νόμο του Νεύτωνα σε αυτήν την περίπτωση είναι (δεν είναι εντός ύλης αλλά καλό είναι να έχετε εικόνα):

$$x = \frac{F_0}{m\omega Z}\eta\mu(\omega t + \varphi)$$

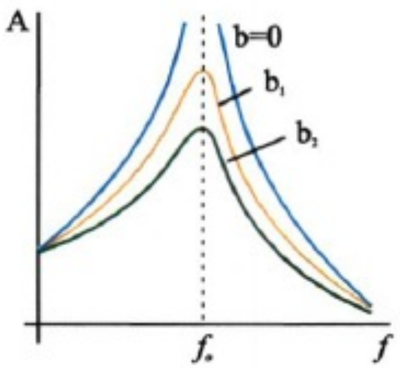
Όπου Z η εμπέδιση που ισούται με $Z = \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 + \frac{1}{\omega^2}\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}$

Όπως βλέπουμε η εξαναγκασμένη ταλάντωση έχει την συχνότητα της εξωτερικής δύναμης ω και το πλάτος της εξαρτάται από αυτήν την συχνότητα ω, την σταθερά απόσβεσης b, την μάζα, το πλάτος της διεγείρουσας δύναμης F_0 και την ιδιοσυχνότητα ω_0.

Όμως το πιο σημαντικό φαινόμενο εδώ είναι η εξάρτηση του πλάτους από την σχέση μεταξύ συχνότητας του διεγέρτη και ιδιοσυχνότητας. Μάλιστα αν αυτές οι δύο συχνότητες έρθουν γίνουν ίσες $f = f_0$ και επιπλέον δεν έχουμε απόσβεση $(b = 0)$ συνεπάγεται ότι μηδενίζεται η εμπέδιση $Z = 0$ με αποτέλεσμα τον μηδενισμό του παρανομαστή που δίνει το πλάτος $\frac{F_0}{m\omega Z}$ και άρα αυτό τείνει στο άπειρο. Αυτό το φαινόμενο της σύμπτωσης συχνότητας διεγέρτη με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντούμενου συστήματος ονομάζεται **συντονισμός** και οδηγεί σε απειρισμό του πλάτους.

Στα πραγματικά συστήματα που υπάρχει μη μηδενική σταθερά απόσβεσης b η Ζ παραμένει μή μηδενική και άρα ο απειρισμός αποφεύγεται. Όμως παρόλα αυτά στην συχνότητα συντονισμού ο ταλαντωτής έχει την μεγαλύτερη τιμή πλάτους ταλάντωσης.

Το πλάτος ως συνάρτηση της συχνότητας ταλάντωσης του διεγέρτη δίνεται από την παρακάτω εικόνα. Αυτή η εξάρτηση του πλάτους από την συχνότητα ταλάντωσης του διεγέρτη δείχνει μια “εκλεκτικότητα” στην απορρόφηση ενέργειας από το σύστημα που είναι “βέλτιστη” στην συχνότητα συντονισμού.

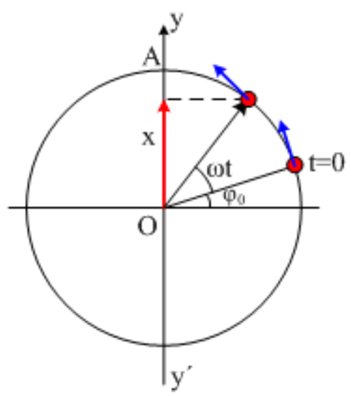


Ενότητα 6. Σύνθεση Ταλαντώσεων

6.1 Εισαγωγή.

Η σύνθετη ταλάντωση είναι μια επαλληλία δύο ή περισσότερων κινήσεων όπως πχ. Η οριζόντια βολή είναι μια επαλληλία μιας ΕΟΚ στον οριζόντιο άξονα με μια ΕΟΜΚ στον κάθετο άξονα (ελεύθερη πτώση). Όπως κάθε σύνθετη κίνηση εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά των επί μέρους κινήσεων από τις οποίες συντίθεται. Δύο περιπτώσεις μας ενδιαφέρουν εδώ:και οι δύο αφορούν σύνθεση δύο ΑΑΤ που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο ΘΙ και στην ίδια διεύθυνση (συγγραμμικές). Η σύνθεση γίνεται (όπως και στην οριζόντια βολή και σε κάθε σύνθετη κίνηση) σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας της ανεξαρτησίας των κινήσεων που σημαίνει ότι η απομάκρυνση του σώματος θα είναι το άθροισμα των απομακρύνσεων από τις δύο επιμέρους ταλαντώσεις δηλαδή:

$x = x_1 + x_2$



Εδώ βοηθάει πολύ να κατανοήσουμε ότι η ΑΑΤ μπορεί να αναπαρασταθεί διανυσματικά μέσω της ομαλής κυκλικής κίνηση ΟΚΚ. Το διάνυσμα πάνω τριγωνομετρικό κύκλο έχει μέτρο το πλάτος της ταλάντωσης A και η γωνία του διανύσματος με τον άξονα χ-χ΄ αναπαριστά την φάση $\omega t + \varphi_0$. Το διάνυσμα αυτό διαγράφει ΟΚΚ με γωνιακή ταχύτητα ίσα με την γωνιακή συχνότητα ω της ταλάντωσης. Η συνιστώσα y του διανύσματος δίνει την απομάκρυνση $x(t)$ ενώ η συνιστώσα χ του διανύσματος δίνει την ταχύτητα.

Υπενθυμίζουμε επίσης με την ευκαιρία αυτή τις εξισώσεις της ΟΚΚ:

$\theta(t) = \omega t + \varphi$ για την γωνία

$s = v_{\gamma\rho\alpha\mu} t$ για το τόξο που διανύει

$v_{\gamma\rho\alpha\mu} = \omega R$ για την γραμμική ταχύτητα.

Επειδή η (γραμμική) ταχύτητα αλλάζει μόνο κατεύθυνση αλλά όχι μέτρο έχουμε την σταθερή κεντρομόλο δύναμη και κεντρομόλο επιτάχυνση

$\alpha_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho} = \frac{v^2}{R}$ και $F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho} = m\frac{v^2}{R}$

6.2 Ίδια συχνότητα διαφορετικό πλάτος

Πρώτη περίπτωση σύνθεσης: Ένα σώμα κάνει ταυτόχρονα δύο ΑΑΤ που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο ΘΙ και στην ίδια διεύθυνση (συγγραμμικές), οι οποίες έχουν την ίδια συχνότητα, διαφορετικό πλάτος και μια διαφορά φάσης φ έχουμε δηλαδή τις εξισώσεις κίνησης:

$$x_1 = A_1\eta\mu\omega t$$

$$x_2 = A_2\eta\mu(\omega t + \varphi)$$

Η σύνθετη ταλάντωση έχει εξίσωση κίνησης

$$x = A\eta\mu(\omega t + \theta)$$

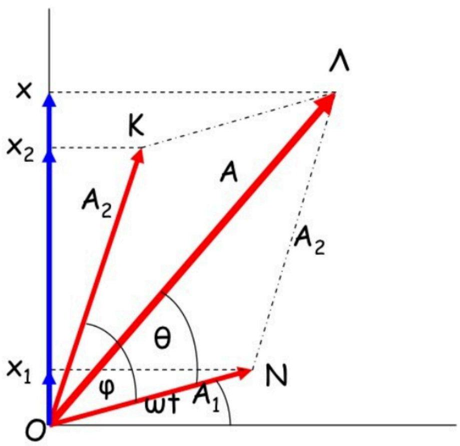
Άρα είναι και αυτή μια ΑΑΤ με την ίδια συχνότητα.

Το πλάτος A της σύνθεσης δίνεται από την σχέση

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

Η φάση θ της σύνθεσης προκύπτει από την σχέση:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{A_2\eta\mu\varphi}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$$



Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν από την διανυσματική ανάλυση (εικόνα). Δεν είναι εντός ύλης να γνωρίζετε πως προκύπτουν απλά ήθελα να σας δώσω μια εικόνα (όπως και στα προηγούμενα) ότι οι σχέσεις που βρίσκουμε δεν προκύπτουν εκ του μηδενός αλλά έχουν αυστηρή μαθηματική απόδειξη. Εν προκειμένω αναπαραστούμε τις δύο ταλαντώσεις ως διανύσματα που εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση ίδιας ταχύτητας-γωνιακής συχνότητας ω όπως είδαμε στην εισαγωγή (υποενότητα 6.1) Η συνισταμένη των δύο διανυσμάτων που είναι η επαλληλία των ανεξάρτητων κινήσεων (υπολογιζόμενη σύμφωνα με τον κανόνα του παραλληλόγραμμου) δίνει τις παραπάνω σχέσεις.

Δύο επιμέρους περιπτώσεις σε σχέση με την αρχική φάση φ είναι:

- $\varphi = 0$ (συμφασικές). Για την ακρίβεια δεν χρειάζεται καν να είναι μηδενικές και οι δύο φάσεις αρκεί να είναι ίδιες. Τότε έχουμε: $A = A_1 + A_2$ και $\theta = 0$ ή γενικότερα ίδια με την αρχική φάση τους.

Πρόκειται για αυτό που ξέραμε ως συνισταμένη των ομόρροπων δυνάμεων (θυμίζω $\Sigma F = F_1 + F_2$) εφαρμοσμένο εδώ (όχι στις δυνάμεις) αλλά στην διανυσματική αναπαράσταση των ΑΑΤ.

- $\varphi = \pi$ (αντιφατικές, αντίθετη φάση ή διαφορά φάσης π). Σε αυτήν την περίπτωση μας ενδιαφέρει ποιο πλάτος ταλάντωσης είναι μεγαλύτερο και η φάση θ της σύνθεσης είναι η φάση της ταλάντωσης με το μεγαλύτερο πλάτος. Το πλάτος της σύνθεσης είναι $A = |A_2 - A_1|$

Πρόκειται για αυτό που ξέραμε ως συνισταμένη των αντίρροπων δυνάμεων (θυμίζω $\Sigma F = |F_2 - F_1|$) εφαρμοσμένο εδώ (όχι στις δυνάμεις) αλλά στην διανυσματική αναπαράσταση των ΑΑΤ.

6.2 Διαφορετική συχνότητα ίδιο πλάτος και συμφασικές

Δεύτερη περίπτωση σύνθεσης: Ένας ταλαντωτής κάνει ταυτόχρονα δύο ΑΑΤ που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο ΘΙ και στην ίδια διεύθυνση (συγγραμμικές) οι οποίες έχουν διαφορετική συχνότητα, ίδιο πλάτος και είναι συμφασικές έχουμε δηλαδή τις εξισώσεις κίνησης:

$$x_1 = A\eta\mu\omega_1 t$$

$$x_2 = A\eta\mu\omega_2 t$$

Υπενθυμίζουμε την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Συνεπώς η σύνθετη ταλάντωση έχει εξίσωση κίνησης

$$x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

Αυτή η ταλάντωση σίγουρα δεν είναι ΑΑΤ και δεν έχει την μορφή ούτε φθίνουσας ούτε εξαναγκασμένης ταλάντωσης. Στην πραγματικότητα είναι μια ταλάντωση με πάρα πολλές και διαφορετικές συχνότητες.

Μια ειδική περίπτωση της παραπάνω ταλάντωσης που μπορούμε να την αναλύσουμε περαιτέρω είναι όταν οι δύο συχνότητες είναι πολύ κοντά $\omega_1 \approx \omega_2$ περίπτωση που ονομάζουμε διακρότημα. Στο διακρότημα ο όρος του συνημιτόνου $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$ μεταβάλλεται πολύ αργά δηλαδή με μια πολύ μικρή συχνότητα ενώ ο όρος του ημιτόνου $\eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$ πολύ πιο γρήγορα με συχνότητα την μέση τιμή των δύο συχνοτήτων που είναι περίπου ίση και με την κάθε μία τους $\overline{\omega} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \approx \omega_1 \approx \omega_2$.

Τώρα πλέον μπορούμε να γράψουμε ένα είδος διαμορφούμενης (σε πλάτος) αρμονικής ταλάντωσης του τύπου

$$x(t) = A'\eta\mu\overline{\omega}t$$

Όπου το αργά και περιοδικά διαμορφούμενο πλάτος είναι:

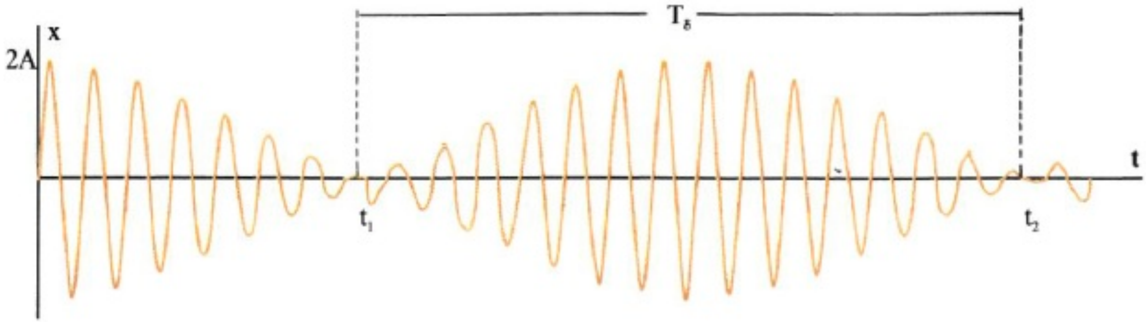
$$A' = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

Η αργή αυτή ταλάντωση του πλάτους του διακροτήματος ορίζει και μια νέα (μεγάλη σχετικά) περίοδο, που ονομάζεται περίοδος του διακροτήματος T_δ. Όμως η T_δ δεν ορίζεται ως ο χρόνος για μια πλήρη ολοκλήρωση του περιοδικού φαινομένου (εδώ της ταλάντωσης του πλάτους) όπως συνήθως. Αν ήταν έτσι θα ήταν η περίοδος που προκύπτει από την γωνιακή συχνότητα $\omega_{A'} = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}$ δηλαδή $T_{A'} = \frac{2\pi}{\omega_{A'}} = \frac{4\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$.

Η περίοδος του διακροτήματος ορίζεται ως ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών ή δύο διαδοχικών μεγιστοποιήσεων του πλάτους του διακροτήματος. Ουσιαστικά δηλαδή πρόκειται για την "μισή πραγματική περίοδο" $T_{A'}$ της αργής ταλάντωσης του πλάτους A'

$$T_\delta = \frac{T_{A'}}{2} = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} = \frac{1}{|f_1 - f_2|}$$

Αντίστοιχα βέβαια υπολογίζεται η συχνότητα του διακροτήματος $f_\delta = \dfrac{1}{T_\delta}$



Η εικόνα αυτή της σύνθετης ταλάντωσης του διακροτήματος εξηγεί αυτή την επιλογή στον ορισμό της T_δ. Αν από το διακρότημα προέκυπτε ένα ηχητικό κύμα θα ακούγαμε περιοδικούς "κρότους" που εξηγούν και το όνομα του.

ΤΕΛΟΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Σημείωση: Η θεωρία όπως σας την παρουσιάζω εδώ έχει στόχο να διευκρινήσει το "γιατί" είναι κάτι έτσι ιδιαίτερα σε πολλές περιπτώσεις σε αυτό το κεφάλαιο όπου το βιβλίο απλά παραθέτει χωρίς εξήγηση σαν να προέρχονται από το πουθενά διάφορες εξισώσεις (πχ. ΑΑΤ, σύνθεση ταλαντώσεων ίδιας συχνότητας). Από την άλλη παραθέτω διάφορες εξισώσεις (φθίνουσα ταλάντωση, εξαναγκασμένη ταλάντωση) που το βιβλίο παραλείπει περιγράφοντας τα "αποτελέσματα τους" χωρίς εξήγηση.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ- ΤΑΛΑΝΤΟΥΜΕΝΑ ΦΥΣΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ένα σημαντικό φυσικό σύστημα που “πραγματώνει” την ταλάντωση στο φυσικό κόσμο είναι το ελατήριο. Το ελατήριο χαρακτηρίζεται από:

-το φυσικό μήκος του (ΦΜ) l_0 που είναι το μήκος στο οποίο βρίσκεται σε ΘΙ αν και εφόσον δεν υπάρχει καμία εξωτερική δύναμη πάνω του.

-την δύναμη επαναφοράς τους ελατηρίου F_k ανάλογη και αντίθετης φοράς με την απομάκρυνση. Κατά μέτρο είναι ανάλογη με το μήκος Δl “παραμόρφωσης” (επιμήκυνσης ή συσπείρωσης) του ελατηρίου και σταθερά αναλογίας την σταθερά σκληρότητας ελατηρίου k, $F_k = k\Delta l = k(l - l_0)$

ΠΡΟΣΟΧΗ: η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου δεν ταυτίζεται αναγκαστικά με την δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης. Η δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης είναι η συνισταμένη όλων των δυνάμεων και μπορεί να επηρεάζεται και από άλλες δυνάμεις (πχ. Βάρος του ταλαντωτή). Άρα σε ασκήσεις με ελατήρια σε διάφορες διατάξεις (κρεμάμμενο, στερωμένο στο έδαφος ή σε τοίχο ή σε κεκλιμένο επίπεδο) και σώματα που έχουν προσαρτηθεί σε αυτά να υπολογίζουμε σωστά τόσο την δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου (με βάση το φυσικό μήκος και το μήκος παραμόρφωσης) όσο και τις υπόλοιπες δυνάμεις που ως συνισταμένη δίνουν την τελική δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης.

Άλλοι κλασικοί ταλαντωτές είναι βέβαια το εκκρεμές και επίσης μια μπάλα σε τετραγωνικό βαρυτικό δυναμικό. Και οι δύο περιπτώσεις μπορούν να αναπαρασταθούν σαν ΑΑΤ, αλλά μια πλήρης περιγραφή τους ξεφεύγει από το σχολικό βιβλίο. Θα σημειώσουμε όμως πως ένα εκπληκτικό αποτέλεσμα του Γαλιλαίου που ξεκίνησε την ιστορία της σύγχρονης επιστήμης ήταν ότι η περίοδος του εκκρεμούς (σε μικρές γωνίες αρχικής απομάκρυνσης) δεν εξαρτάται ούτε από το πλάτος ούτε από τη μάζα του ταλαντωτή αλλά μόνο από το μήκος! $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ γιατί έδειξε ότι $D = \frac{mg}{L}$.