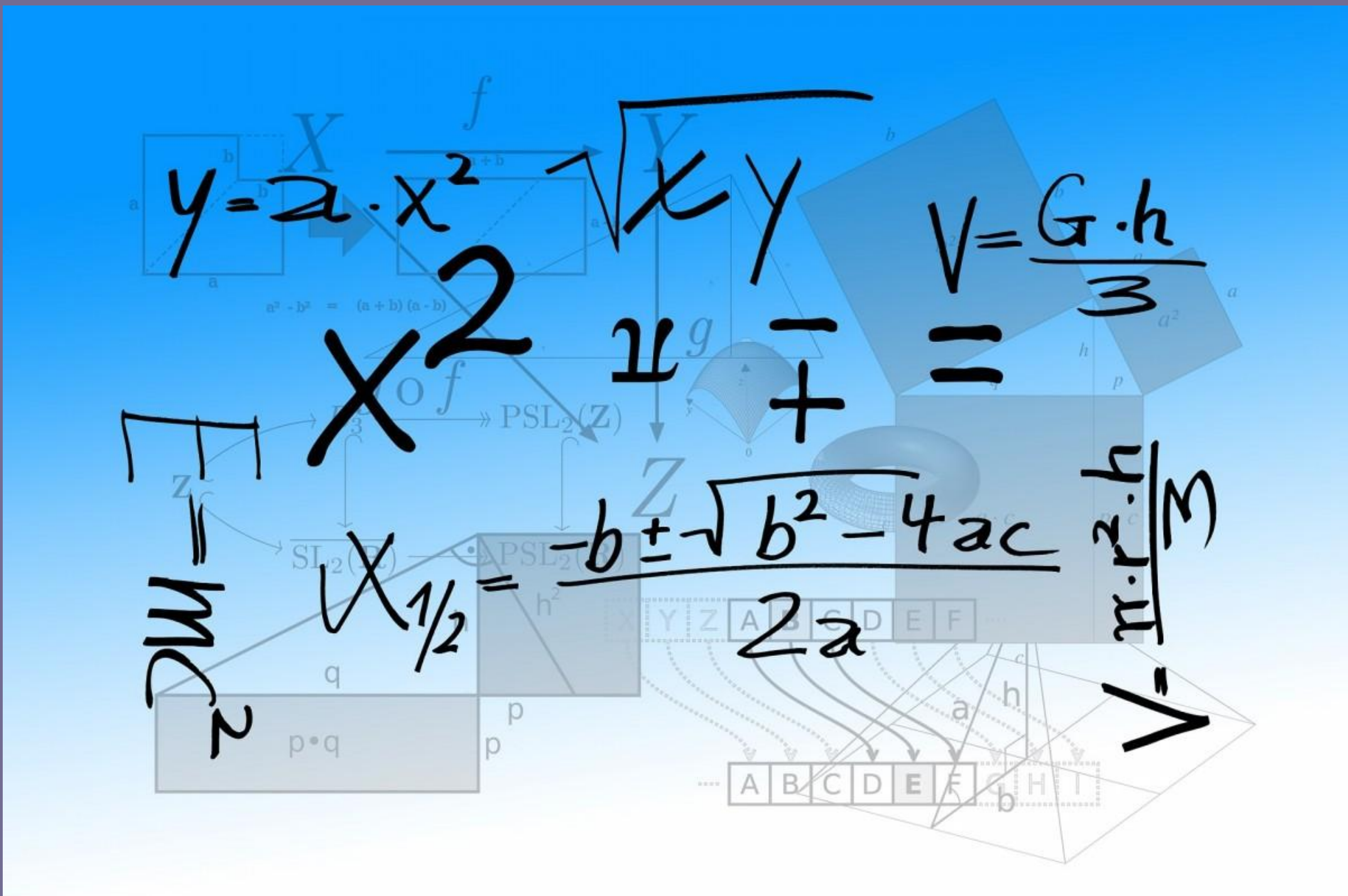
Παύλος Παλαιολόγου

Άλγεβρα Β΄ Λυκείου
Γενικής Παιδείας



www.pitetragono.gr

Αγαπητοί μαθητές,

αυτό το βιβλίο αποτελεί ένα χρήσιμο βοήθημα για την Άλγεβρα της Β΄Λυκείου, που είναι ένα από τα σημαντικότερα μαθήματα, καθώς περιέχει γνώσεις απαραίτητες για την ύλη της Γ΄ Λυκείου.

Κάθε κεφάλαιο περιέχει :

- Βασική θεωρία
- Μεθοδολογίες και σχόλια
- Λυμένα παραδείγματα
- Ασκήσεις όλων των επιπέδων δυσκολίας
- Θέματα ανά ενότητα, από την τράπεζα θεμάτων (2022)

Καλή μελέτη

Παύλος Παλαιολόγου

Σεπτέμβριος 2022

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

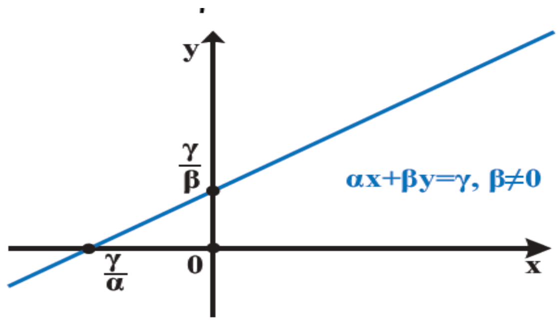
Η εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$, με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$, λέγεται **γραμμική εξίσωση**. Οι μεταβλητές x, y είναι οι άγνωστοι της εξίσωσης αυτής. Οι αριθμοί α,β λέγονται συντελεστές των αγνώστων της εξίσωσης ενώ το γ λέγεται σταθερός όρος της εξίσωσης. Κάθε ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) που έχει την ιδιότητα να επαληθεύει την εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$, δηλαδή να ισχύει $\alpha x_0+\beta y_0=\gamma$, λέγεται λύση της γραμμικής εξίσωσης. Άρα το ζεύγος (x_0, y_0) είναι λύση της γραμμικής εξίσωσης αν και μόνο αν οι αριθμοί x_0, y_0 επαληθεύουν την εξίσωση.
π.χ. αν έχω τη γραμμική εξίσωση : $3x-2y=8$ τότε το ζεύγος $(2,-1)$ λέγεται λύση της εξίσωσης γιατί την επαληθεύει : $3\cdot 2-2\cdot(-1)=8 \Leftrightarrow 6+2=8$ που ισχύει.

Για την εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

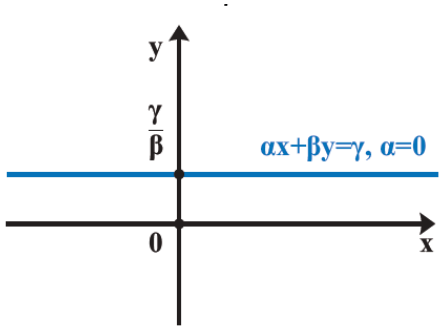
- Αν $\beta\neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται : $\alpha x+\beta y=\gamma \Leftrightarrow \beta y=-\alpha x+\gamma \Leftrightarrow y=-\dfrac{\alpha}{\beta}x+\dfrac{\gamma}{\beta}$

  Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\dfrac{\alpha}{\beta}$

  και τέμνει τον άξονα y ' y στο σημείο $\dfrac{\gamma}{\beta}$.



Σχήμα α΄



Σχήμα β΄

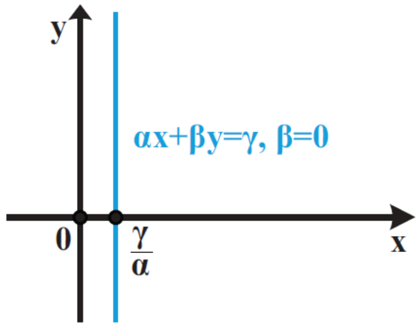
Ειδικότερα :

✓ Αν $\alpha\neq 0$, τότε η ευθεία τέμνει και τους δύο άξονες (Σχ. α΄), ενώ

✓ Αν $\alpha=0$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y=\dfrac{\gamma}{\beta}$ και επομένως παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x'x και τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο $\dfrac{\gamma}{\beta}$ (Σχ. β΄).

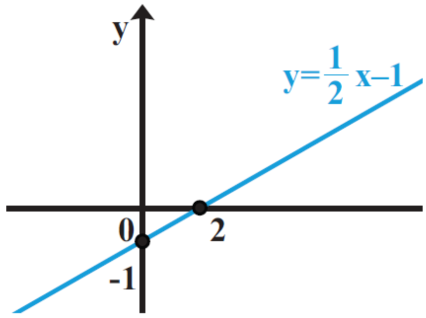
- Αν $\beta=0$ (οπότε $\alpha\neq 0$), τότε η εξίσωση γράφεται $\alpha x=\gamma \Leftrightarrow x=\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y'y και τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο $\frac{\gamma}{\alpha}$.

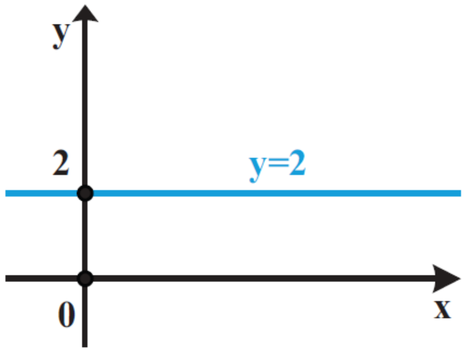


Για παράδειγμα :

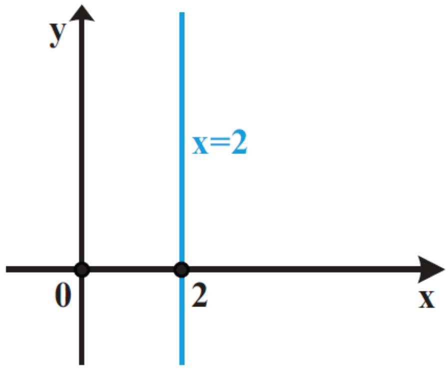
- ✓ Η εξίσωση $x-2y=2$ παίρνει τη μορφή $y=\frac{1}{2}x-1$ η οποία παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{1}{2}$ και τέμνει τον άξονα y ' y στο σημείο -1.



- ✓ Η εξίσωση y=2 παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x ' x και τέμνει τον άξονα y ' y στο σημείο 2.



- ✓ Η εξίσωση x=2 παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y ' y και τέμνει τον άξονα x ' x στο σημείο 2 .



Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει μία γραμμική εξίσωση λέγεται λύση της γραμμικής εξίσωσης.

Για παράδειγμα, το ζεύγος (4,-1) είναι λύση της εξίσωσης x-2y=6 , αφού 4-2(-1) =4+2=6 . Διαπιστώνουμε, όμως, ότι και τα ζεύγη (16,5) , (-10,-8) είναι λύσεις της εξίσωσης και γενικά ότι κάθε ζεύγος της μορφής $\left(\kappa, \frac{1}{2}\kappa - 3\right)$, $\kappa \in \mathbb{R}$ είναι λύση της εξίσωσης.

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ 2x2

Όταν ψάχνουμε τις κοινές λύσεις δυο γραμμικών εξισώσεων : $\alpha x + \beta y = \gamma$ και $\alpha' x + \beta' y = \gamma'$ τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε γραμμικό σύστημα 2x2 : $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$. Δηλαδή έχω 2 εξισώσεις και 2 αγνώστους. Για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα 2x2 διαλέγουμε έναν από τους παρακάτω τρόπους. Η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος οδηγεί στο αποτέλεσμα είτε : το σύστημα έχει ακριβώς μια λύση, είτε είναι αδύνατο (καμία λύση), είτε είναι αόριστο (άπειρες λύσεις).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

ΒΗΜΑ 1 : Διαλέγω μια από τις 2 εξισώσεις, συνήθως αυτή που έχει τουλάχιστον έναν από τους δυο αγνώστους με συντελεστή 1, και λύνω ως προς τον άγνωστο αυτό.
ΒΗΜΑ 2 : Στη συνέχεια αντικαθιστώ αυτό που βρήκα στην άλλη και έτσι θα έχω δημιουργήσει μια εξίσωση με έναν μόνο άγνωστο την οποία και λύνω.
ΒΗΜΑ 3 : Αφού βρω τη λύση για τον έναν από τους δυο αγνώστους, αντικαθιστώ την τιμή του στην άλλη εξίσωση και βρίσκω τον άλλο άγνωστο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Να λύσετε τα σύστημα : i. $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x - 4y = 3 & (1) \\ 3x - 12y = 9 & (2) \end{cases}$

Λύση :

i. **ΒΗΜΑ 1 :** Έχω : $\begin{cases} 4x + 3y = 5, (1) \\ 2x + y = 1, (2) \end{cases}$, διαλέγω τη (2) γιατί αυτή έχει τον άγνωστο y με συντελεστή 1. Άρα $2x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - 2x, (1)$

ΒΗΜΑ 2 : Παίρνω την εξίσωση (1) και θα αντικαταστήσω όπου $y = 1 - 2x$, άρα :

$$4x + 3y = 5 \overset{y=1-2x}{<====>} 4x + 3(1-2x) = 5 \Leftrightarrow 4x + 3 - 6x = 5 \Leftrightarrow 4x - 6x = 5 - 3 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1$$

ΒΗΜΑ 3 : $y = 1 - 2x \overset{x=-1}{<===>} y = 1 - 2(-1) \Leftrightarrow y = 1 + 2 \Leftrightarrow y = 3$

ii. $(1) \Leftrightarrow x = 4y + 3$, άρα $(2) \Leftrightarrow 3(4y+3) - 12y = 9 \Leftrightarrow 12y + 9 - 12y = 9 \Leftrightarrow 0y = 0$, η οποία είναι αόριστη, επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Για να βρούμε τη μορφή των άπειρων λύσεων του συστήματος, λύνουμε μια εξίσωση ως προς έναν άγνωστο, π.χ. $x = 4y + 3$. Για $y = \kappa$, όπου κ τυχαίος αριθμός, είναι $x = 4\kappa + 3$. Άρα κάθε ζεύγος της μορφής $(4\kappa + 3, \kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

(Θα μπορούσαμε να λύσουμε ως προς y δηλ. $(1) \Leftrightarrow x = 4y + 3 \Leftrightarrow y = \frac{x-3}{4}$ *και για* $x = \kappa$ *το σύστημα θα έχει άπειρες λύσεις της μορφής* $\left(\kappa, \frac{\kappa - 3}{4}\right)$, $\kappa \in \mathbb{R}$. *)*

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΘΕΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

ΒΗΜΑ 1 : Δημιουργούμε αντίθετους συντελεστές σε έναν από τους δυο αγνώστους πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλο αριθμό τα μέλη της μιας εξίσωσης ή και των δυο.
ΒΗΜΑ 2 : Προσθέτουμε κατά μέλη τις δυο εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν μόνο άγνωστο την οποία και λύνουμε ως προς τον άγνωστο αυτό.
ΒΗΜΑ 3 : Αφού βρω τη λύση για τον έναν από τους δυο αγνώστους, αντικαθιστώ την τιμή του σε οποία από τις 2 εξισώσεις θέλω και βρίσκω τον άλλο άγνωστο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

2. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} 3x-y=-3 \\ 2x-5y=-28 \end{cases}$

Λύση :

ΒΗΜΑ 1 : Έχω : $\begin{cases} 3x-y=-3 \\ 2x-5y=-28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y=-3 & \cdot 2 \\ 2x-5y=-28 & \cdot(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-2y=-6 \\ -6x+15y=84 \end{cases}$

ΒΗΜΑ 2 : Προσθέτοντας κατά μέλη έχω : $13y=78 \Leftrightarrow y=6$

ΒΗΜΑ 3 : Πάω στην εξίσωση $3x-y=-3$ και θα βάλω όπου $y=6$, άρα έχω :
$3x-6=-3 \Leftrightarrow 3x=6-3 \Leftrightarrow 3x=3 \Leftrightarrow x=1$. Άρα η λύση του συστήματος είναι $(x,y)=(1,6)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2x2

Καθεμία από τις εξισώσεις του συστήματος $\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$, παριστάνει μια ευθεία γραμμή $(\varepsilon):\alpha x+\beta y=\gamma$ και $(\varepsilon'):\alpha' x+\beta' y=\gamma'$ αντίστοιχα. Η λύση (x_0, y_0) του συστήματος είναι το κοινό ή τα κοινά σημεία των δυο ευθειών. Η γραφική επίλυση ενός συστήματος, ουσιαστικά είναι ο σχεδιασμός των δυο αυτών ευθειών σε ένα σύστημα συντεταγμένων και στην εύρεση των συντεταγμένων του κοινού τους σημείου. Για να σχεδιάσω μια ευθεία, χρειάζομαι δυο σημεία τα οποία θα ενώσω. Συνήθως διαλέγω τα σημεία τομής μιας ευθείας με τους άξονες. Για σημείο τομής με τον άξονα x΄x βάζω y=0 στην εξίσωση και βρίσκω το αντίστοιχο x άρα το σημείο Α(x,0). Ενώ για σημείο τομής με τον άξονα y΄y βάζω x=0 στην εξίσωση και βρίσκω το αντίστοιχο y άρα το σημείο Β(0,y).

ΒΗΜΑ 1 : Δίνω στα x,y διαδοχικά την τιμή 0 και βρίσκω τα σημεία τομής με τους άξονες Α(x,0) και Β(0,y)
ΒΗΜΑ 2 : Σχεδιάζω ένα σύστημα συντεταγμένων και εντοπίζω τα σημεία τομής με τους άξονες Α(x,0) και Β(0,y), τα ενώνω και έτσι σχεδιάζω την εξίσωση της γραμμής $(\varepsilon):\alpha x+\beta y=\gamma$
ΒΗΜΑ 3 : Επαναλαμβάνω τη διαδικασία και σχεδιάζω την εξίσωση της γραμμής $(\varepsilon'):\alpha' x+\beta' y=\gamma'$. Από το σχήμα βρίσκω τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους, που είναι και η λύση του συστήματος.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3. Να λύσετε γραφικά το σύστημα : $\begin{cases} x-y=-2 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

Λύση :

Έστω $(\varepsilon_1): x-y=-2$ και $(\varepsilon_2): 2x+y=5$ οι ευθείες που παριστάνουν οι δυο εξισώσεις του παραπάνω συστήματος. Στην (ε_1)

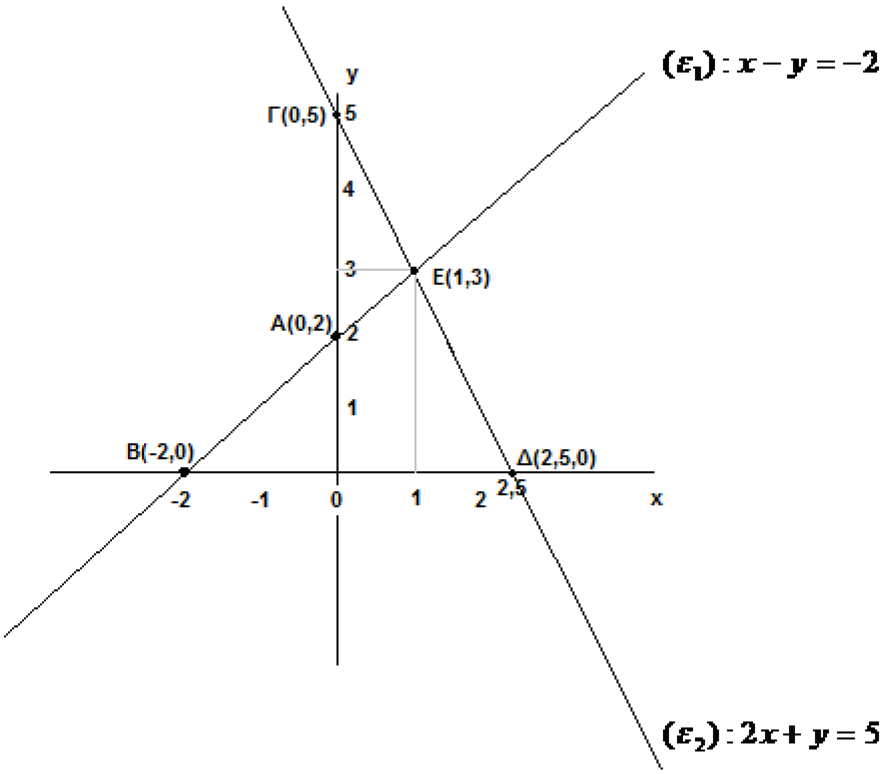
για $x=0$ έχω $0-y=-2 \Leftrightarrow y=2$ άρα $\mathrm{A}(0,2)$ σημείο τομής της (ε_1) με τον y΄y

για $y=0$ έχω $x-0=-2 \Leftrightarrow x=-2$ άρα $\mathrm{B}(-2,0)$ σημείο τομής της (ε_1) με τον x΄x

Ομοίως στην (ε_2)

για $x=0$ έχω $2\cdot 0+y=5 \Leftrightarrow y=5$ άρα $\Gamma(0,5)$ σημείο τομής της (ε_2) με τον y΄y

για $y=0$ έχω $2x+0=5 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow x=2{,}5$ άρα $\Delta(2{,}5{,}0)$ σημείο τομής της (ε_2) με τον x΄x.



Παρατηρούμε από το σχήμα ότι οι δυο ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $\mathrm{E}(1,3)$. Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x,y)=(1,3)$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

i. Η εξίσωση $\dfrac{\alpha}{x}+\beta y=\gamma$ είναι γραμμική.
ii. Η εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ παριστάνει ευθεία.
iii. Οι ευθείες χ=κ και y=λ είναι κάθετες.
iv. Η ευθεία χ=κ είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω εξισώσεις με **Σωστό**, αν παριστάνουν ευθεία ή ευθείες πάντοτε και με **Λάθος**, αν δεν παριστάνουν.

i. $|x-3y|=0$ ii. $ax+\beta y=\gamma$ iii. $\alpha\chi+(\alpha-1)y=2$

iv. $\lambda x+(\lambda^2-\lambda)y=5$ v. $\dfrac{y}{x-1}=2$ vi. $x^2-2xy=-y^2$

vii. $y^2-x^2=0$ viii. $x^2-xy=0$ ix. $x^2+y^2=0$

6. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.
Έστω (Σ) το σύστημα δυο γραμμικών εξισώσεων με δυο αγνώστους.

i. Αν οι ευθείες με εξισώσεις τις εξισώσεις του (Σ) τέμνονται, τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση.
ii. Αν το (Σ) έχει δυο λύσεις, τότε έχει άπειρες λύσεις.
iii. Αν το (Σ) είναι αδύνατο, τότε οι ευθείες με εξισώσεις τις εξισώσεις του (Σ) ταυτίζονται.
iv. Αν το (Σ) έχει ως λύση το ζεύγος (0,0), τότε οι σταθεροί όροι των εξισώσεων του (Σ) είναι μηδέν.

7. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

i. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(3,y), $y\in\mathbb{R}$ είναι η ευθεία ………
ii. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x,2), $x\in\mathbb{R}$ είναι η ευθεία ……..
iii. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x,x-2), $x\in\mathbb{R}$ είναι η ευθεία ……….
iv. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(0,y), $y\in\mathbb{R}$ είναι ο άξονας …………
v. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x,0), $x\in\mathbb{R}$ είναι ο άξονας ………..

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8. Δίνεται η εξίσωση $(\alpha^2-2)x-|\beta-1|y+2=0$. Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε το ζεύγος (1,-1) να είναι λύση της εξίσωσης.

9. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε η εξίσωση $(|\lambda|-1)x+(\lambda^2-\lambda)y+5=0$ να παριστάνει ευθεία.

➢ **Γραφική επίλυση συστήματος**

10. Να λύσετε γραφικά το σύστημα $\begin{cases}2x-y=0\\x+y=3\end{cases}$

11. Να λύσετε γραφικά το σύστημα $\begin{cases}2x-y=1\\2x-y=3\end{cases}$

12. Να λύσετε γραφικά το σύστημα $\begin{cases}3x-y=2\\6x-2y=4\end{cases}$

- **Αλγεβρική επίλυση συστήματος**

13. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 7x-y=13 \end{cases}$

14. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 3x-5y=8 \\ 4x+7y=-3 \end{cases}$

15. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{2}-\dfrac{3y-1}{4}=-x+5 \\ 1-2x(y-1)=3x-y(2x-1) \end{cases}$

16. Να βρείτε τις τιμές των α και β, ώστε η εξίσωση (α-2β-1)x+(2α-β-5)y+α-1=0 να παριστάνει ευθεία.

17. i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε, που διέρχεται από τα σημεία Α(1,2) και Β(2,-1).
ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη στην ευθεία ε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

18. Να εξετάσετε, ποια από τα ζεύγη (1,2), (0,-3) και (α,2α-3) είναι λύσεις της εξίσωσης 2x-y=3

19. i. Να δείξετε ότι η εξίσωση (λ+2)x+(λ-1)y+3=0, παριστάνει ευθεία, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
ii. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε η εξίσωση (λ^2-4)x+(λ-2)y+5=0, να παριστάνει ευθεία.

20. Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

i. $\begin{cases} y=x+1 \\ y=2 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} y=2x \\ x-y=3 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=3 \end{cases}$

21. Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

i. $\begin{cases} x-2y=4 \\ x-2y=6 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 2x-y=1 \\ -4x+2y=-2 \end{cases}$

22. Να λύσετε με την μέθοδο της αντικατάστασης τα συστήματα:

i. $\begin{cases} x-3y=2 \\ 2x+4y=14 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 3x-2y=3 \\ 9x-y=4 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}$

23. Να λύσετε με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών τα συστήματα:

i. $\begin{cases} 3x+2y=-1 \\ -3x+5y=-6 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 4x+2y=-2 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} 3x-5y=-2 \\ 4x-7y=-3 \end{cases}$

24. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=\dfrac{5}{2} \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-5y=4 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} x+2y=0 \\ -2x+y=1 \end{cases}$

25. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-4y=3 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 2x-y=4 \\ -x+\dfrac{y}{2}=-2 \end{cases}$

26. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-1=\dfrac{y}{4} \\ \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2y}{3}=\dfrac{4}{3} \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x-2(x-y)=3-(2x-y) \\ y-x(1-2y)=1+2y(x-1) \end{cases}$

27. Αν τα συστήματα: $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ και $\begin{cases} \alpha x+y=7\beta \\ 5x-\beta y=3\alpha \end{cases}$ έχουν κοινή λύση, να βρείτε τα α και β.

28. Να βρείτε τις τιμές των α και β, ώστε η εξίσωση (α-3β+1)x+(3α-β-5)y+β-3=0 να παριστάνει ευθεία.

29. Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών: ε_1: x-3y+1=0 και ε_2: 2x-y-3=0

30. Αν οι ευθείες ε_1: 2αx+βy=α+39 και ε_2: x+(α-β)y=β-2 τέμνονται στο σημείο Α(5,3), να βρείτε τα α και β.

31. Δίνονται οι ευθείες ε_1: 2x-y=-4 και ε_2: x+2y=3.

i. Να βρείτε το σημείο τομής Α, των ευθειών ε_1 και ε_2

ii. Να βρείτε την ευθεία ε, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Α.

32. i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε, που διέρχεται από τα σημεία Α(2,-3) και Β(-2,5).

ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η, που τέμνει τον άξονα y΄y στο -1 και είναι παράλληλη στην ευθεία ε.

33. Να δείξετε ότι η εξίσωση $y^2-x^2=2x+1$ παριστάνει δυο ευθείες ε_1,ε_2 και να βρείτε το σημείο τομής τους.

34. Αν η εξίσωση (α-2β-1)x=2α-β-5 έχει άπειρες λύσεις, να βρείτε τις τιμές των α και β.

35. Αν ισχύει x-2y+1+λ(x-y)=0, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, να βρείτε τα x και y.

36. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=8x^3-4\alpha x^2-2\beta x+2\alpha-3\beta$ τέμνει τον άξονα των x΄x στο σημείο -1 και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(-\dfrac{1}{2},-20)$, να βρείτε τα α και β.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 2x2 ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Έχουμε το σύστημα $\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$. Θεωρούμε τους αριθμούς

$D=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}=\alpha\beta'-\alpha'\beta$ (Ορίζουσα D του συστήματος)

$D_x=\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}=\gamma\beta'-\gamma'\beta$ (Ορίζουσα D_x: δεν έχει x, δηλαδή αντικαθιστώ τους συντελεστές του x με τους σταθερούς όρους)

$D_y=\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}=\alpha\gamma'-\alpha'\gamma$ (Ορίζουσα D_y: δεν έχει y, δηλαδή αντικαθιστώ τους συντελεστές του y με τους σταθερούς όρους)

Για να λύσουμε ένα σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών : βρίσκουμε τις ορίζουσες των D, D_x, D_y και μετά :

- Αν $D\neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση (x,y), όπου : $x=\frac{D_x}{D}$, $y=\frac{D_y}{D}$
- Αν $D=0$ και $D_x\neq 0$ ή $D_y\neq 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο
- Αν $D=0$ και $D_x=0$ και $D_y=0$, τότε το σύστημα είναι αόριστο, έχει δηλαδή άπειρες λύσεις.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

37. (Άσκηση 5 σελ. 21 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τα συστήματα με τη μέθοδο των οριζουσών :

i. $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-5y=4 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 2y=3x-8 \\ x+3y+1=0 \end{cases}$

Λύση :

i. $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-5y=4 \end{cases}$

Έχω : $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=2\cdot(-5)-1\cdot 3=-10-3=-13\neq 0$

$D_x=\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}=-35-4=-39$, $D_y=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=8-21=-13$

Άρα : $x=\frac{D_x}{D}=\frac{-39}{-13}=3$, $y=\frac{D_y}{D}=\frac{-13}{-13}=1$, δηλ. το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x,y)=(3,1)$

ii. $\begin{cases} 2y=3x-8 \\ x+3y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+2y=-8 \\ x+3y=-1 \end{cases}$

Έχω : $D=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-9-2=-11\neq 0$

$D_x = \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -24 + 2 = -22$, $D_y = \begin{vmatrix} -3 & -8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11$

Άρα : $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-22}{-11} = 2$, $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{11}{-11} = -1$, δηλ. το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y) = (2, -1)$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 :</u> ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Για να λύσουμε ένα παραμετρικό σύστημα χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των οριζουσών. Συγκεκριμένα ακλουθούμε τα εξής βήματα :

ΒΗΜΑ 1 : Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D, D_x, D_y

ΒΗΜΑ 2 : Λύνουμε την εξίσωση $D = 0$

ΒΗΜΑ 3 : Διακρίνουμε την περίπτωση για την οποία ισχύει $D \neq 0$

ΒΗΜΑ 4 : Διακρίνουμε την περίπτωση για την οποία ισχύει $D = 0$

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

38. (Άσκηση 8 σελ. 23 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να λύσετε τα σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών :

i. $\begin{cases} (\lambda - 1)x - 2y = 1 \\ 4x - (\lambda + 1)y = -2 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ii. $\begin{cases} (\mu - 2)x + 5y = 5 \\ x + (\mu + 2)y = 5 \end{cases}$, $\mu \in \mathbb{R}$

<u>Λύση :</u>

i. (Τα παραμετρικά συστήματα, λύνονται μόνο με τη μέθοδο των οριζουσών)

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x - 2y = 1 \\ 4x - (\lambda + 1)y = -2 \end{cases}$$

ΒΗΜΑ 1 :

$$D = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 4 & -(\lambda + 1) \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda + 1) + 8 = -(\lambda^2 - 1) + 8 = -\lambda^2 + 1 + 8 = 9 - \lambda^2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -(\lambda + 1) \end{vmatrix} = -(\lambda + 1) - (-2)(-2) = -\lambda - 1 - 4 = -\lambda - 5$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2(\lambda - 1) - 4 = -2\lambda + 2 - 4 = -2\lambda - 2$$

ΒΗΜΑ 2 : $D = 0 \Leftrightarrow 9 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow \lambda = \pm 3$

ΒΗΜΑ 3 : Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 3$ & $\lambda \neq -3$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την : $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-\lambda - 5}{9 - \lambda^2}$, $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-2\lambda - 2}{9 - \lambda^2}$

ΒΗΜΑ 4 : Αν $D = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3$ τότε :

- Αν $\lambda = 3$ έχω : $\begin{cases} (3 - 1)x - 2y = 1 \\ 4x - (3 + 1)y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ 4x - 4y = -2 \end{cases}\right| \cdot (-2) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4y = -2 \\ 4x - 4y = -2 \end{cases}$ προσθέτοντας κατά μέλη έχω :

  $0 = -4$ άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

- Αν $\lambda=-3$ έχω : $\begin{cases}(-3-1)x-2y=1\\ 4x-(-3+1)y=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4x-2y=1\\ 4x+2y=-2\end{cases}$

  Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει $0=-1$ άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

ii. $\begin{cases}(\mu-2)x+5y=5\\ x+(\mu+2)y=5\end{cases}$

ΒΗΜΑ 1 :

$$D=\begin{vmatrix}\mu-2 & 5\\ 1 & \mu+2\end{vmatrix}=(\mu-2)(\mu+2)-5=\mu^2-4-5=\mu^2-9$$

$$D_x=\begin{vmatrix}5 & 5\\ 5 & \mu+2\end{vmatrix}=5(\mu+2)-25=5\mu+10-25=5\mu-15$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\mu-2 & 5\\ 1 & 5\end{vmatrix}=5(\mu-2)-5=5\mu-10-5=5\mu-15$$

ΒΗΜΑ 2 : $D=0 \Leftrightarrow \mu^2-9=0 \Leftrightarrow \mu^2=9 \Leftrightarrow \mu=\pm\sqrt{9} \Leftrightarrow \mu=\pm3$

ΒΗΜΑ 3 : Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow \mu\neq 3, \& \mu\neq -3$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την :

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{5\mu-15}{\mu^2-9}=\frac{5(\mu-3)}{(\mu-3)(\mu+3)}=\frac{5}{\mu+3},$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{5\mu-15}{\mu^2-9}=\frac{5(\mu-3)}{(\mu-3)(\mu+3)}=\frac{5}{\mu+3}$$

ΒΗΜΑ 4 : Αν $D=0 \Leftrightarrow \mu=\pm3$ τότε :

- Αν $\mu=3$ έχω : $\begin{cases}(3-2)x+5y=5\\ x+(3+2)y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+5y=5\\ x+5y=5 \;\Big|\cdot(-1)\end{cases} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \begin{cases}x+5y=5\\ -x-5y=-5\end{cases}$ προσθέτοντας κατά μέλη έχω :

  $0=0$ άρα το σύστημα είναι αόριστο, έχει δηλαδή άπειρες λύσεις της μορφής $(5-5y,y)$ όπου y είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. (Για να βρω τις λύσεις διαλέγω μια από τις δυο εξισώσεις και λύνω ως προς έναν από τους δυο αγνώστους : $x+5y=5 \Leftrightarrow x=5-5y$)

- Αν $\mu=-3$ έχω : $\begin{cases}(-3-2)x+5y=5\\ x+(-3+2)y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-5x+5y=5\\ x-y=5 \;\Big|\cdot 5\end{cases} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \begin{cases}-5x+5y=5\\ 5x-5y=25\end{cases}$ Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει $0=30$ άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

<u>ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :</u>

39. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

Έστω το σύστημα $\begin{cases}ax+\beta y=\gamma\\ \alpha' x+\beta' y=\gamma'\end{cases}$

i. Αν το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση, τότε D=0

ii. Αν D=0, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

iii. Αν το σύστημα είναι αόριστο, τότε D=0.

iv. Αν D=0, τότε το σύστημα είναι αδύνατο ή αόριστο.

40. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

Έστω ότι οι εξισώσεις του συστήματος $\begin{cases} ax+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$ (Σ) παριστάνουν τις ευθείες ε και ε΄.

i. Αν D≠0, τότε οι ευθείες ε, ε΄ τέμνονται.
ii. Αν οι ευθείες ε, ε΄ είναι παράλληλες, τότε D=0.
iii. Αν D=0, τότε οι ε, ε΄ δεν τέμνονται. iv. Αν D=0, τότε οι ε, ε΄ είναι παράλληλες

41. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

Έστω το σύστημα $\begin{cases} ax+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$ (Σ)

i. Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση, τότε |D|>0
ii. Αν $D^3+D^2-3=0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.
iii. Αν το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση, τότε είναι αδύνατο.
iv. Αν το σύστημα δεν έχει άπειρες λύσεις, τότε είναι αδύνατο.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

42. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

i. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ ii. $\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -4 & \lambda+2 \end{vmatrix}$ iii. $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ iv. $\begin{vmatrix} 3\lambda-2 & -\lambda^2 \\ -9 & 3\lambda+2 \end{vmatrix}$

43. Να λύσετε την εξίσωση $\begin{vmatrix} 3x-1 & -2 \\ -1 & x \end{vmatrix}=0$

44. Να λύσετε τα συστήματα με την μέθοδο των οριζουσών:

i. $\begin{cases} 2x-y=3 \\ -3x+5y=-2 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x-7y=3 \\ 2x-10y=-4 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} 2x+3y-5=0 \\ 16+5x=2y \end{cases}$

45. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \lambda x+y=\lambda \\ x+\lambda y=\lambda+2 \end{cases}$

46. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2x-6y=4 \\ x-3y=\lambda-1 \end{cases}$

47. Έστω το σύστημα $\begin{cases} 2x-y=\lambda-1 \\ 7x-4y=\lambda \end{cases}$

i. Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0,y_0), για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.
ii. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε $2x_0-y_0<1$

48. Να δείξετε ότι οι ευθείες (ε): y=λx-2 και (η): 4x+λy-λ=0 τέμνονται για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

49. Να βρείτε το λ, ώστε οι ευθείες (ε): (λ-1)x+λy=λ και (η): x+λy=2 να είναι παράλληλες.

50. Αν το σύστημα $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda^2 \\ x - \lambda y = 2 - \lambda \end{cases}$ (Σ) έχει άπειρες λύσεις, να δείξετε ότι το σύστημα $\begin{cases} 2\lambda x - y = \lambda \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}$ (Σ΄) έχει μοναδική λύση.

51. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} (2-\sqrt{3})x + y = -1 \\ x + (2+\sqrt{3})y = -2-\sqrt{3} \end{cases}$ ii. $\begin{cases} (2-\sqrt{3})x + y = 1 \\ x + (2+\sqrt{3})y = 2 \end{cases}$

52. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = -1 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} \lambda^2 x - 2y = \lambda \\ \lambda x - y = \lambda - 1 \end{cases}$

53. Για τις διάφορες τιμές του λ, να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} \lambda^2 x + y = \lambda \\ x + 4y = 2 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} (\lambda+1)x - y = \lambda + 1 \\ x + (\lambda-1)y = 2 \end{cases}$

54. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ ώστε το σύστημα $\begin{cases} x + 2y = \lambda \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}$

i. Να έχει άπειρο πλήθος λύσεων.
ii. Να μην έχει καμία λύση.

55. Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε οι ευθείες ε_1: x+αy=2 και ε_2: αx+9y=2 να τέμνονται.

56. Να βρείτε το α, ώστε οι ευθείες ε_1: $2x+\alpha^2 y=4$ και ε_2: x+αy=α+2

i. Να τέμνονται
ii. Να είναι παράλληλες

57. Να διερευνηθεί το σύστημα : $\begin{cases} \lambda x + 2y = \lambda + 2 \\ 2x + \lambda y = 4 \end{cases}$

58. Αν το σύστημα $\begin{cases} (\lambda-1)x + y = 2 \\ 3x + (\lambda+1)y = 4\lambda - 2 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις, να δείξετε ότι το : $\begin{cases} \lambda x + (2\lambda+1)y = 3 \\ 2x - (1-3\lambda)y = \lambda \end{cases}$ είναι αδύνατο.

59. Να λυθεί το σύστημα με ορίζουσες D, D_x, D_y για τις οποίες ισχύει : $D_x^2 + D_y^2 + D^2 - 12D_x + 8D_y - 4D + 56 = 0$.

60. Αν D είναι η ορίζουσα του συστήματος : $(\Sigma): \begin{cases} (9+D)x + (8+D)y = 11 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$, τότε :

i. να δείξετε ότι $D = -7$
ii. να λύσετε το σύστημα (Σ)

iii. να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε η λύση του συστήματος (Σ) να είναι και λύση του συστήματος $\begin{cases}(\alpha+1)x-3\beta=3\\ 2\alpha x-(\beta+1)y=-4\end{cases}$

61. Δίνεται το σύστημα : $\begin{cases}\lambda x+y=\lambda\\ x+\lambda y=2-\lambda\end{cases}$.

i. Να βρείτε τις ορίζουσες : D, D_x, D_y

ii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το σύστημα να είναι αδύνατο

iii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις

iv. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση για την οποία ισχύει : $x_0+y_0>1$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 :</u> ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ 3x3

Για να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα 3x3, δηλαδή ένα σύστημα με 3 εξισώσεις και 3 αγνώστους, χρησιμοποιούμε τις ίδιες μεθόδους με αυτές που χρησιμοποιούμε για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2x2. Πιο συγκεκριμένα λύνουμε μια από τις 3 εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο της επιλογής μας, και στη συνέχεια αντικαθιστούμε την τιμή που βρήκαμε στις 2 άλλες εξισώσεις. Έτσι προκύπτει ένα σύστημα 2x2 το οποίο και λύνουμε όπως έχουμε μάθει. Επειδή η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 3x3 όπως είδαμε ανάγεται στην επίλυση γραμμικού συστήματος 2x2, προκύπτει ότι και ένα γραμμικό σύστημα 3x3 είτε έχει ακριβώς μια λύση, είτε είναι αδύνατο (καμία λύση), είτε είναι αόριστο (άπειρες λύσεις).

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

62. (Άσκηση 8 σελ. 22 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να λύσετε τα παρακάτω σύστημα :

i. $\begin{cases}3x-2y-\omega=11\\ 2x-5y-2\omega=3\\ 5x+y-2\omega=33\end{cases}$ ii. $\begin{cases}5x-y+3\omega=4\\ x-3y+\omega=2\\ 3x-2y+2\omega=2\end{cases}$ iii. $\begin{cases}x+\dfrac{y}{2}-2\omega=3\\ \dfrac{3x}{2}+y+\omega=5\\ 5x+3y-2\omega=16\end{cases}$

<u>Λύση :</u>

i. $\begin{cases}3x-2y-\omega=11,(1)\\ 2x-5y-2\omega=3,(2)\\ 5x+y-2\omega=33,(3)\end{cases}$ διαλέγω την (1) και θα λύσω ως προς ω. Δηλαδή :

$(1): 3x-2y-\omega=11 \Leftrightarrow \omega=3x-2y-11$. Αντικαθιστώ την τιμή του ω στις άλλες 2 και έχω :

$$\begin{cases}2x-5y-2(3x-2y-11)=3\\ 5x+y-2(3x-2y-11)=33\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-5y-6x+4y+22=3\\ 5x+y-6x+4y+22=33\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4x-y=-19\\ -x+5y=11\end{cases}$$

Προέκυψε δηλαδή σύστημα 2x2 άρα : $\begin{cases}-4x-y=-19\\ -x+5y=11\end{cases}\Big|\cdot 5 \Leftrightarrow \begin{cases}-20x-5y=-95\\ -x+5y=11\end{cases}$

Προσθέτω κατά μέλη και έχω : $-21x=-84 \Leftrightarrow x=4$ και αντικαθιστώ στη : $-x+5y=11 \overset{x=4}{\Leftrightarrow} -4+5y=11 \Leftrightarrow 5y=15 \Leftrightarrow y=3$. Τέλος τα x,y που βρήκα τα αντικαθιστώ στην $\omega=3x-2y-11 \overset{x=4,\ y=3}{\Leftrightarrow} \omega=3\cdot4-2\cdot3-11 \Leftrightarrow \omega=-5$. Άρα $(x,y,\omega)=(4,3,-5)$

ii. $\begin{cases} 5x-y+3\omega=4,(1) \\ x-3y+\omega=2,(2) \\ 3x-2y+2\omega=2,(3) \end{cases}$ διαλέγω την (1) και θα λύσω ως προς y. Δηλαδή :

$(1): 5x-y+3\omega=4 \Leftrightarrow y=5x+3\omega-4$. Αντικαθιστώ την τιμή του y στις άλλες 2 και έχω :

$$\begin{cases} x-3(5x+3\omega-4)+\omega=2 \\ 3x-2(5x+3\omega-4)+2\omega=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-15x-9\omega+12+\omega=2 \\ 3x-10x-6\omega+8+2\omega=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14x-8\omega=-10 \\ -7x-4\omega=-6 \end{cases}$$

Προέκυψε δηλαδή σύστημα 2x2 άρα :

$$\begin{cases} -14x-8\omega=-10 \\ -7x-4\omega=-6 \quad \Big|\cdot(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14x-8\omega=-10 \\ 14x+8\omega=12 \end{cases}$$

Προσθέτω κατά μέλη και έχω : $0=2$. Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

iii. $$\begin{cases} x+\dfrac{y}{2}-2\omega=3 \\ \dfrac{3x}{2}+y+\omega=5 \\ 5x+3y-2\omega=16 \end{cases} \xLeftrightarrow[\pi\alpha\rho\alpha\nu o\mu\alpha\sigma\acute{\omega}\nu]{\text{Απαλειφή}} \begin{cases} 2x+2\dfrac{y}{2}-2\cdot2\omega=2\cdot3 \\ 2\dfrac{3x}{2}+2y+2\omega=2\cdot5 \\ 5x+3y-2\omega=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-4\omega=6,(1) \\ 3x+2y+2\omega=10,(2) \\ 5x+3y-2\omega=16,(3) \end{cases}$$

διαλέγω την (1) και θα λύσω ως προς y. Δηλαδή :

$(1): 2x+y-4\omega=6 \Leftrightarrow y=-2x+4\omega+6$. Αντικαθιστώ την τιμή του y στις άλλες 2 και έχω :

$$\begin{cases} 3x+2(-2x+4\omega+6)+2\omega=10 \\ 5x+3(-2x+4\omega+6)-2\omega=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4x+8\omega+12+2\omega=10 \\ 5x-6x+12\omega+18-2\omega=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+10\omega=-2 \\ -x+10\omega=-2 \end{cases}$$

Προέκυψε δηλαδή σύστημα 2x2 άρα : $\begin{cases} -x+10\omega=-2 \\ -x+10\omega=-2 \quad \Big|\cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+10\omega=-2 \\ x+10\omega=2 \end{cases}$

Προσθέτω κατά μέλη και έχω : $0=0$. Άρα το σύστημα είναι αόριστο, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις. Έχω $\begin{cases} 2x+y-4\omega=6,(1) \\ -x+10\omega=-2,(2) \\ -x+10\omega=-2,(3) \end{cases}$, παρατηρώ δηλαδή ότι οι (2) και (3) ταυτίζονται άρα : $\begin{cases} 2x+y-4\omega=6 \\ -x+10\omega=-2 \end{cases}$. Από τη (2) έχω : $x=10\omega+2$, αντικαθιστούμε το x στην (1) και έχω : $2x+y-4\omega=6 \Leftrightarrow 2(10\omega+2)+y-4\omega=6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 20\omega+4+y-4\omega=6 \Leftrightarrow y=2-16\omega$. Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής : $(x,y,z)=(10\kappa+2,2-16\kappa,\kappa)$ όπου $\kappa\in\Re$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

63. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2x-y+w=-5 \\ y+3w=7 \\ w=2 \end{cases}$

64. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2x-y+3\omega=4 \\ 3x+2y-\omega=-7 \\ x-3y+2\omega=1 \end{cases}$

65. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2x+3y-7\omega=0 \\ 3x-y-5\omega=0 \\ 5x+2y-12\omega=0 \end{cases}$

66. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x-2y+\omega=1 \\ 2x-y-3\omega=2 \\ 3x-3y-2\omega=4 \end{cases}$

67. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x-y-2\omega=4 \\ 2x-3y+\omega=2 \\ x-2y+3\omega=-2 \end{cases}$

68. Θεωρούμε το $2x2$ γραμμικό σύστημα (Σ) με αγνώστους x,y. Για τις ορίζουσες D, D_x, D_y ισχύουν τα εξής : $\begin{cases} 2D_x-3D+D_y=-1 \\ D_x+2D-2D_y=8 \\ 3D_x-8D+3D_y=-8 \end{cases}$. Να βρείτε τα x,y.

69. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=3 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 3x+y+2z=1 \\ 4x-y+3z=1 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} 2x-y-3z=2 \\ x+y+2z=1 \\ 3x-z=4 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x-y-2z=-2 \\ 3x-3y-z=0 \end{cases}$

70. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-y-z=-2 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ x+2y-z=0 \\ x-3y+2z=-2 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$

71. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ x-3y+2z=0 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+2z=0 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 :</u> ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΤΕΧΝΑΣΜΑΤΑ

Ορισμένα συστήματα, αν και δεν είναι γραμμικά, μπορούν με κατάλληλο τέχνασμα να μετατραπούν σε γραμμικά. Ένα τέτοιο τέχνασμα συνήθως είναι η αντικατάσταση. Αντικαθιστούμε κάποιον ή κάποιους όρους του συστήματος που βρίσκονται και στις δυο εξισώσεις, με έναν νέο άγνωστο και έτσι οδηγούμαστε σε ένα νέο σύστημα που είναι όμως γραμμικό. Λύνουμε το νέο σύστημα και στη συνέχεια, επιστρέφοντας στις αρχικές σχέσεις, βρίσκουμε τις λύσεις του αρχικού συστήματος. Σε άλλες περιπτώσεις μπορούμε να προσθέσουμε όλες ή μερικές από τις εξισώσεις του συστήματος και με αντικατάσταση να βρούμε ευκολότερα τη λύση του δοσμένου συστήματος.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

72. Να λύσετε τα συστήματα : i. $(\Sigma):\begin{cases} x+y=4 \\ y+w=-1 \\ w+x=1 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x+y=1 \\ y+\omega=0 \\ \omega+x=5 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} x+y=5 \\ y+\omega=2 \\ x+\omega=-1 \end{cases}$

73. Να λύσετε τα συστήματα : i. $\begin{cases} \frac{5}{x}+\frac{7}{y}=-2 \\ \frac{8}{x}-\frac{9}{y}=17 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} \frac{4}{x}+\frac{2}{y}=-2 \\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=9 \end{cases}$

74. Να λύσετε τα συστήματα : i. $\begin{cases} \frac{3}{x-2y}-\frac{5}{2x-y}=2 \\ \frac{4}{x-2y}+\frac{15}{2x-y}=7 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} \frac{3}{2x-y+1}-\frac{2}{x-3y+4}=\frac{13}{6} \\ \frac{2}{2x-y+1}-\frac{4}{x-3y+4}=\frac{7}{6} \end{cases}$

75. Να λύσετε τα συστήματα : i. $\begin{cases} 3|x|-4|y|=-6 \\ 4|x|+|y|=11 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 3|x|+4|y-2|=5 \\ 5|x|+9|y-2|=13 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} 4|x-1|-3|y+1|=3 \\ 5|x-1|-4|y+1|=-1 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} |2x-1|-|3y-2|=2 \\ |1-2x|-|6y-4|=1 \end{cases}$ v. $\begin{cases} |x+y|=2 \\ \sqrt{4x^2-4xy+y^2}=1 \end{cases}$

vi. $\begin{cases} |x-y| = |2x-y-1| \\ x^2 - 2xy + 1 = 0 \end{cases}$ vii. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{\omega} = 4 \\ \frac{1}{\omega} + \frac{1}{x} = 8 \end{cases}$ viii. $\begin{cases} \frac{1}{x+2y-3} + \frac{1}{3x-2y+1} = \frac{5}{12} \\ \frac{1}{x+2y-3} - \frac{1}{3x-2y+1} = \frac{1}{12} \end{cases}$

76. Δίνονται οι αριθμοί α,β και γ με : $3\alpha - \beta - \gamma = 0$ και $\alpha - 2\beta + 3\gamma = 0$. Να εκφράσετε τα α,β ως συνάρτηση του γ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι : $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\gamma - \beta + 6\gamma \geq -1$.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 :</u> ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Για τη λύση προβλημάτων, που ανάγονται σε συστήματα με δυο ή περισσότερους αγνώστους, αρχικά σχηματίζουμε τις εξισώσεις από τα δεδομένα του προβλήματος και σχηματίζουμε το σύστημα που προκύπτει. Θέτουμε περιορισμούς για τους αγνώστους εφόσον είναι απαραίτητο και στη συνέχεια λύνουμε το παραπάνω σύστημα. Τέλος επαληθεύουμε τις λύσεις που έχουμε βρει με τους περιορισμούς που έχουμε θέσει.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

77. Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθαινε 9 χρόνια αργότερα, θα βασίλευε το μισό της ζωής του, ενώ αν πέθαινε 9 χρόνια νωρίτερα, θα βασίλευε το $\frac{1}{8}$ της ζωής του. Να βρεθεί πόσα χρόνια έζησε και πόσα χρόνια βασίλευε ο Μέγας Αλέξανδρος.

78. Ένας μαθητής απάντησε σε ένα τεστ με 20 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση έπαιρνε 4 μονάδες, ενώ για κάθε λανθασμένη του αφαιρούνταν δυο μονάδες. Αν συνολικά συγκέντρωσε 50 μονάδες, σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά και σε πόσες λανθασμένα;

79. Ένα ξενοδοχείο έχει 30 δωμάτια, δίκλινα και τρίκλινα, και μπορεί να φιλοξενήσει μέχρι και 80 άτομα. Πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα δωμάτια;

80. Σε μια εκδήλωση ο αριθμός των γυναικών που συμμετέχουν είναι διπλάσιος από τον αριθμό των ανδρών. Μια ώρα μετά την έναρξη της εκδήλωσης αποχωρούν δέκα ζευγάρια. Ο αριθμός των ανδρών που απομένουν είναι ισος με τα $\frac{4}{9}$ του αριθμού των γυναικών που απομένουν. Να βρείτε τον αριθμό των ανδρών και των γυναικών που συμμετείχαν αρχικά στην εκδήλωση.

81. Ο Δημήτρης, ο Γιώργος και ο Ανέστης θέλουν να αγοράσουν με τα χρήματα τους ένα δώρο για τη Μαριάννα. Τα χρήματα του Δημήτρη και του Γιώργου μαζί είναι κατά 20€ περισσότερα από τα χρήματα του Ανέστη. Τα χρήματα του Γιώργου και του Ανέστη είναι κατά 60€ περισσότερα από τα χρήματα του Δημήτρη και τέλος τα χρήματα του Δημήτρη και του Ανέστη είναι κατά 40€ περισσότερα από τα χρήματα του Γιώργου. Πόσα χρήματα έχει ο καθένας; Πόσο κοστίζει το δώρο της Μαριάννας;

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

81. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (4\lambda + \mu)x + \lambda + 2\mu$ με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο με τεταγμένη 3. Επίσης η κορυφή της C_f έχει τετμημένη 1.

i. Να δείξετε ότι : $\lambda = -1,\ \mu = 2$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) + f(x-2) \le 8$.

82. Δίνεται το σύστημα : $\begin{cases} 2x - y = 3\lambda - 3 \\ x + y = -\lambda^2 + 2\lambda \end{cases}$.

i. Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii. Αν (x_0, y_0) είναι η μοναδική λύση του συστήματος, να βρείτε για ποια τιμή του λ η παράσταση $5x_0 - y_0$ γίνεται μέγιστη.

83. Δίνεται το σύστημα : $\begin{cases} (\lambda - 1)x + \lambda y = -2 \\ \lambda x + (\lambda - 1)y = \lambda - 1 \end{cases}$ το οποίο έχει ορίζουσα D. Επίσης η εξίσωση : $x^2 - (D+5)x + 4(D+1) = 0$ έχει διπλή ρίζα.

i. Να βρείτε την ορίζουσα D και τη διπλή ρίζα της εξίσωσης.

ii. Να λύσετε το σύστημα.

84. Η εξίσωση $x^2 + (\lambda + \mu)x + \mu - \nu = 0$ έχει ρίζες τις x_1, x_2. Ισχύουν οι σχέσεις : $x_1 + x_2 = -3$, $x_1 x_2 = -2$ και $x_1^2 + x_2^2 = -3\lambda + \mu + \nu$. Να βρείτε τους αριθμούς λ, μ, ν.

85. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα $\begin{cases} (\lambda + 1)x - y = -\lambda \\ -4x + (\lambda + 1)y = \lambda + 1 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση το ζεύγος (x_0, y_0) για το οποίο ισχύει $y_0^2 - 2x_0 = 1$.

86. Ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων, με αγνώστους x και y, έχει μοναδική λύση και ισχύει : $5D_x + 4D_y = 7D$ και $4D_x + 5D_y = 2D$ όπου D_x, D_y, D οι αντίστοιχες ορίζουσες του συστήματος. Να βρείτε τη μοναδική λύση του συστήματος.

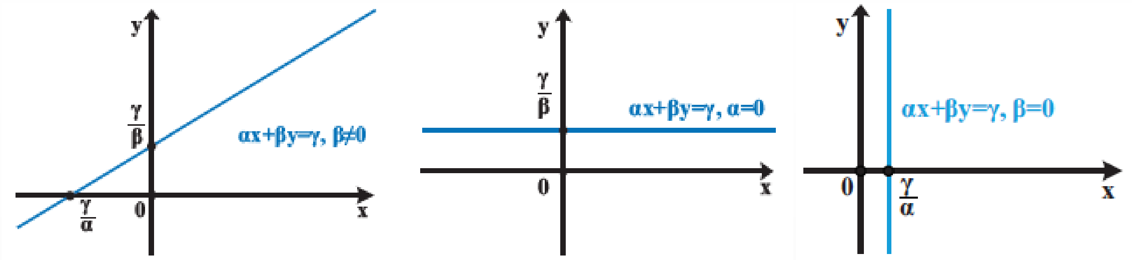
1.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

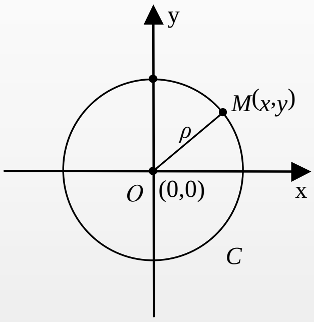
Για την επίλυση των μη γραμμικών συστημάτων συνήθως χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αντικατάστασης. Λύνουμε δηλαδή τη φαινομενικά πιο «εύκολη» από τις δυο εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο, και αντικαθιστούμε την τιμή που βρήκαμε στην άλλη.

Προσοχή : επειδή το σχολικό βιβλίο αναφέρεται σε γεωμετρική ερμηνεία των εξισώσεων καλό θα είναι να γνωρίζουμε ότι εξισώσεις της μορφής :

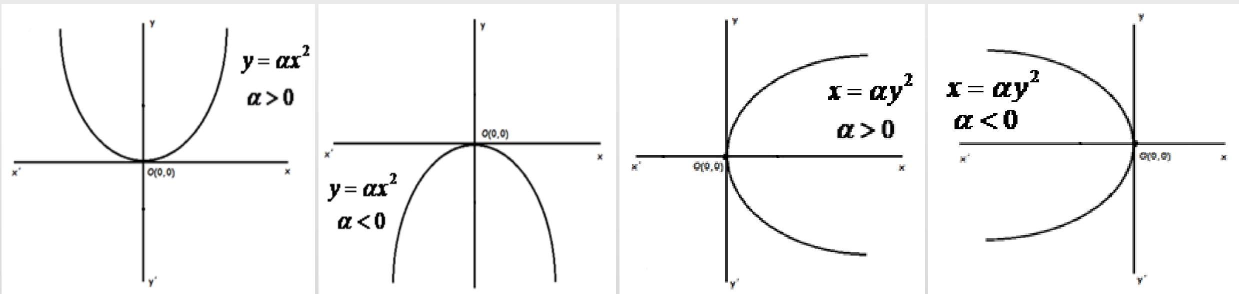
- $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ παριστάνουν ευθεία



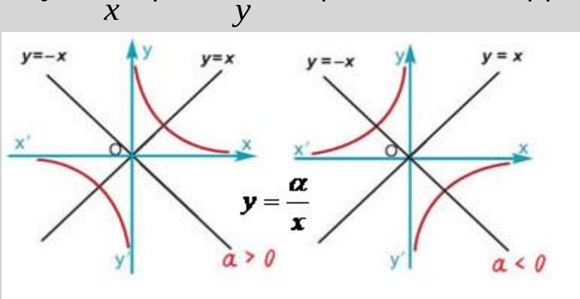
- $x^2+y^2=\rho^2$ παριστάνουν κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ



- $y=\alpha x^2$ ή $x=\alpha y^2$ παριστάνουν παραβολή



- $y=\dfrac{\alpha}{x}$ ή $x=\dfrac{\alpha}{y}$ παριστάνουν υπερβολή.



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 27 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

   Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2+y^2+xy=3 \\ x+y=1 \end{cases}$

   Λύση :

   $\begin{cases} x^2+y^2+xy=3,(1) \\ x+y=1,(2) \end{cases}$ διαλέγω τη φαινομενικά πιο «εύκολη» $(2): x+y=1 \Leftrightarrow y=1-x$

   και λύνω ως προς y. Στη συνέχεια αντικαθιστώ στην (1) την τιμή του x που βρήκα και έχω: $(1): x^2+y^2+xy=3 \overset{y=1-x}{\Longleftrightarrow} x^2+(1-x)^2+x(1-x)=3 \Leftrightarrow x^2+1-2x+x^2+x-x^2=3 \Leftrightarrow$

   $x^2-x-2=0 \qquad \alpha=1, \beta=-1, \gamma=-2 \qquad \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9$

   $$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \acute{\eta} \\ x=-1 \end{cases}$$

   - Αν $x=2$ τότε λόγω της $(2): y=1-x \overset{x=2}{\Leftrightarrow} y=-1$ άρα $(x,y)=(2,-1)$
   - Αν $x=-1$ τότε λόγω της $(2): y=1-x \overset{x=-1}{\Leftrightarrow} y=2$ άρα $(x,y)=(-1,2)$

2. (Άσκηση 2 σελ. 27 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

   Να λύσετε τα συστήματα :

   i. $\begin{cases} y=3x^2 \\ 12x-3y=4 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x-y=0 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases}$

   και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.

   Λύση :

   i. $\begin{cases} y=3x^2,(1) \\ 12x-3y=4,(2) \end{cases}$, Η (2) λόγω της (1) γίνεται : $(2): 12x-3y=4 \overset{y=3x^2}{\Longleftrightarrow} 12x-3\cdot 3x^2=4 \Leftrightarrow$

   $12x-9x^2=4 \Leftrightarrow 9x^2-12x+4=0 \qquad \Delta=0 \quad x=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$

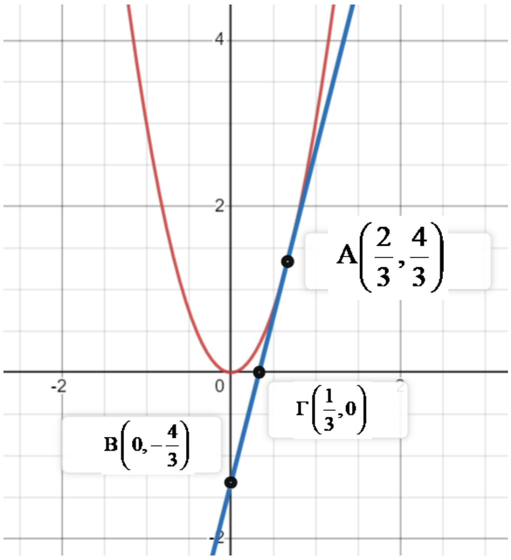
   - Αν $x=\frac{2}{3}$ τότε λόγω της $(1): y=3x^2 \overset{x=\frac{2}{3}}{\Leftrightarrow} y=3\frac{4}{9} \Leftrightarrow y=\frac{4}{3}$ άρα $(x,y)=\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$

   Γεωμετρικά η $(1): y=3x^2$ παριστάνει παραβολή, ενώ η $(2): 12x-3y=4$ παριστάνει ευθεία. Το σύστημα τους έχει μόνο μια λύση, αυτό σημαίνει ότι η παραβολή και η ευθεία έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το $A\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$, δηλαδή η ευθεία εφάπτεται στην παραβολή στο σημείο $A\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

   Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $(2): 12x-3y=4$, θα πρέπει να βρούμε δύο σημεία.

   Για $x=0$ η (2) δίνει $y=-\frac{4}{3}$, δηλαδή το σημείο $B\left(0,-\frac{4}{3}\right)$

   Για $y=0$ η (2) δίνει $x=\frac{1}{3}$, δηλαδή το σημείο $\Gamma\left(\frac{1}{3},0\right)$



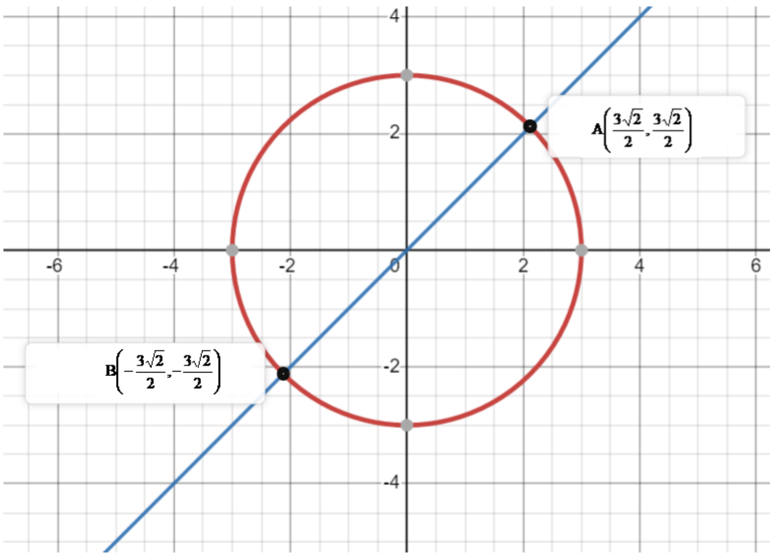
ii. $\begin{cases} x^2+y^2=9, & (1) \\ x-y=0, & (2) \end{cases}$, Έχω $(2): x-y=0 \Leftrightarrow y=x$. Άρα η (1) λόγω της (2) γίνεται :

$$(1): x^2+y^2=9 \overset{y=x}{\Leftrightarrow} x^2+x^2=9 \Leftrightarrow 2x^2=9 \Leftrightarrow x^2=\frac{9}{2} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{9}{2}} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

- Αν $x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ τότε λόγω της $(2): y=x \Leftrightarrow y=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ άρα $(x,y)=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$
- Αν $x=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ τότε λόγω της $(2): y=x \Leftrightarrow y=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ άρα $(x,y)=\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

Γεωμετρικά η $(1): x^2+y^2=9$ παριστάνει κύκλο με κέντρο O(0,0) και ακτίνα ρ=3, ενώ η $(2): x-y=0$ παριστάνει ευθεία. Το σύστημα τους έχει 2 λύσεις, αυτό σημαίνει ότι ο κύκλος και η ευθεία έχουν δυο κοινά σημεία $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ και $B\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ δηλαδή η ευθεία τέμνει τον κύκλο στα σημεία $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ και $B\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.



iii. $\begin{cases} x^2+y^2=5, & (1) \\ xy=2, & (2) \end{cases}$ Έχω $(2): xy=2 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} y=\dfrac{2}{x}$. Άρα η (1) λόγω της (2) γίνεται :

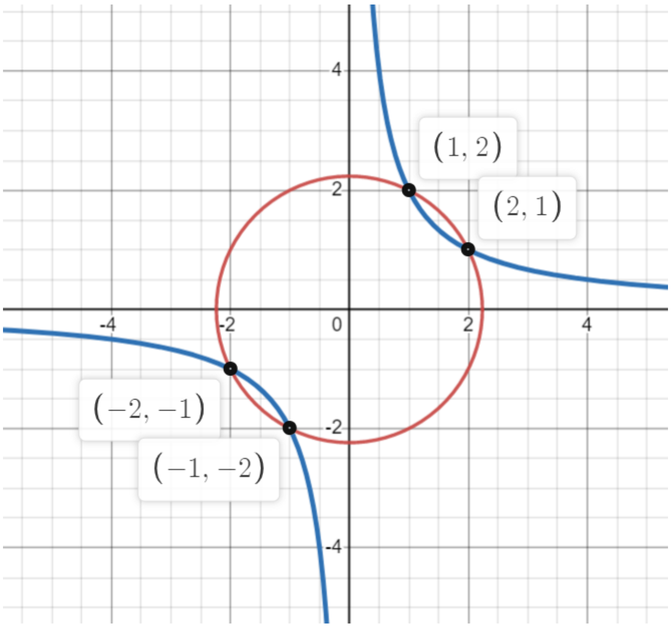
$$(1): x^2+y^2=5 \overset{y=\frac{2}{x}}{\Leftrightarrow} x^2+\left(\frac{2}{x}\right)^2=5 \Leftrightarrow x^2+\frac{4}{x^2}=5 \overset{\cdot x^2}{\Leftrightarrow} x^4+4=5x^2 \Leftrightarrow x^4-5x^2+4=0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι «διτετράγωνη» οπότε θέτω $x^2=\omega\geq 0$ άρα γίνεται :

$\omega^2-5\omega+4=0 \Leftrightarrow \omega=1 \quad ή \quad \omega=4$ δεκτές.

- Αν $\omega=1 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$
  - Αν $x=1$ τότε λόγω της $(2): y=\dfrac{2}{x} \overset{x=1}{\Leftrightarrow} y=2$ άρα $(x,y)=(1,2)$
  - Αν $x=-1$ τότε λόγω της $(2): y=\dfrac{2}{x} \overset{x=-1}{\Leftrightarrow} y=-2$ άρα $(x,y)=(-1,-2)$
- Αν $\omega=4 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$
  - Αν $x=2$ τότε λόγω της $(2): y=\dfrac{2}{x} \overset{x=2}{\Leftrightarrow} y=1$ άρα $(x,y)=(2,1)$
  - Αν $x=-2$ τότε λόγω της $(2): y=\dfrac{2}{x} \overset{x=-2}{\Leftrightarrow} y=-1$ άρα $(x,y)=(-2,-1)$

Γεωμετρικά η $(1): x^2+y^2=5$ παριστάνει κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$, ενώ η $(2): y=\dfrac{2}{x}$ παριστάνει υπερβολή. Το σύστημα τους έχει 4 λύσεις, αυτό σημαίνει ότι ο κύκλος και η υπερβολή έχουν 4 κοινά σημεία $\mathrm{A}(1,2)$, $\mathrm{B}(-1,-2)$, $\Gamma(2,1)$ και $\Delta(-2,-1)$ δηλαδή ο κύκλος και η υπερβολή τέμνονται στα σημεία $\mathrm{A}(1,2)$, $\mathrm{B}(-1,-2)$, $\Gamma(2,1)$και $\Delta(-2,-1)$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

3. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

i. $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x^2-2xy-y^2=7 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x+3y+1=0 \\ xy=-2 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} x^2+y^2-2x+2y=3 \\ x^2+y^2-x=3 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} x^2+y^2-xy=3 \\ x-y=-1 \end{cases}$

4. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$

i. Αλγεβρικά ii. Γραφικά

5. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} x-y=-2 \\ 4x-y^2+5=0 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+xy=60 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} 2x+y=-3 \\ x^2-xy=6 \end{cases}$

6. Να λύσετε αλγεβρικά και γραφικά τα συστήματα:

i. $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ xy=-4 \end{cases}$

7. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} y=2x^2 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.

8. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} y=2x^2 \\ x+y=3 \end{cases}$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα.

9. Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής $(C): y=3x^2$ και της ευθείας $(\varepsilon): y=2x+1$. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε την παραβολή και την ευθεία στο ίδιο σύστημα αξόνων.

10. Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής $(C_1): y=2x^2$ και της υπερβολής $(C_2): y=\frac{27}{4x}$. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε την παραβολή και την υπερβολή στο ίδιο σύστημα αξόνων.

11. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ xy-1=0 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 5x^2-y^2=19 \\ xy=2 \end{cases}$

12. Να λύσετε το σύστημα**:** $\begin{cases} x^2+y^2+2x-2y=-1 \\ 2x^2+2y^2+3x-3y=1 \end{cases}$

13. Να λύσετε τα συστήματα:

i. $\begin{cases} 5\sqrt{x}-3\sqrt{y}=3 \\ 25x-9y=81 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{13}{6} \\ xy=5 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} x+xy+y=5 \\ x^2y+xy^2=6 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} \sqrt{\frac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\frac{2x}{3x-2y}}=2 \\ x^2-4xy+12y=8 \end{cases}$

14. Να λύσετε τα συστήματα : **(Μετατροπή μη γραμμικού συστήματος σε γραμμικό με αντικατάσταση)**

i. $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=-2 \\ \frac{4}{x}-\frac{3}{y}=11 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} \frac{3}{x}-\frac{4}{y}=-5 \\ \frac{2}{x}+\frac{6}{y}=1 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} \frac{4}{x-2}+\frac{6}{2y-5}=1 \\ \frac{8}{2-x}-\frac{3}{5-2y}=3 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} \frac{3}{x}-\frac{8}{y}=-1 \\ \frac{3y+2x}{xy}=\frac{3}{2} \end{cases}$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

15. Να λύσετε τα συστήματα :

i. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x + y = 1 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 19 \\ x - y = 1 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} \sqrt{2x-y} - \sqrt{x+y} = 1 \\ x + y + \sqrt{2x-y} = 3 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} 5\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 3 \\ 25x - 9y = 81 \end{cases}$

v. $\begin{cases} x^2 - 9x = y^2 - 9y \\ xy = 18 \end{cases}$ vi. $\begin{cases} \sqrt{2x+1} + \sqrt{y-3} = 5 \\ \sqrt{2x+1} - \sqrt{4y-12} = -1 \end{cases}$ vii. $\begin{cases} xy = -8 \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$

16. Η παραβολή με εξίσωση : $y = x^2 + (\lambda - \mu)x - 3\mu - 5\lambda$ έχει κορυφή το σημείο Κ(2,8).

i. Να δείξετε ότι $\lambda = -3,\ \mu = 1$.
ii. Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραπάνω παραβολής και της ευθείας $(\varepsilon): -x + y = 8$.

17. Δίνεται η ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): y = \lambda x - 2$ και η παραβολή $(C): y = 2x^2$. Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \Re$, ώστε η ευθεία να έχει με την παραβολή :

i. Ένα κοινό σημείο,
ii. δύο κοινά σημεία,
iii. κανένα κοινό σημείο.

18. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση : $(C): x^2 + y^2 = 1$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x + \lambda$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ο κύκλος και η ευθεία :
- έχουν δύο κοινά σημεία,
- έχουν ένα κοινό σημείο,
- δεν έχουν κοινά σημεία.

ii. Για $\lambda = \sqrt{5}$ να βρείτε :
- τις συντεταγμένες του κοινού σημείου ,
- το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζει η ευθεία (ε) με τους άξονες x΄x και y΄y.
- το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από την ευθεία (ε), τον κύκλος (C) και τους άξονες x΄x και y΄y.

19. Δίνεται υπερβολή με εξίσωση : $(C): y = \dfrac{\alpha}{x},\ \alpha \neq 0$ η οποία διέρχεται από το σημείο : $\mathrm{M}\left(\alpha - 4,\ 2\alpha - \dfrac{\alpha^2}{4}\right)$. Θεωρούμε επίσης ευθεία (ε), η οποία διέρχεται από το σημείο Ν(1,-2) και σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία ω για την οποία ισχύει : $|\varepsilon\varphi\omega - 3| = 3\varepsilon\varphi\omega - 5$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 6$.
ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) έχει εξίσωση $(\varepsilon): 2x - y = 4$.
iii. Να βρείτε τα κοινά σημεία της υπερβολής C και της ευθείας ε.
iv. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε και την υπερβολή C στο ίδιο σύστημα αξόνων.

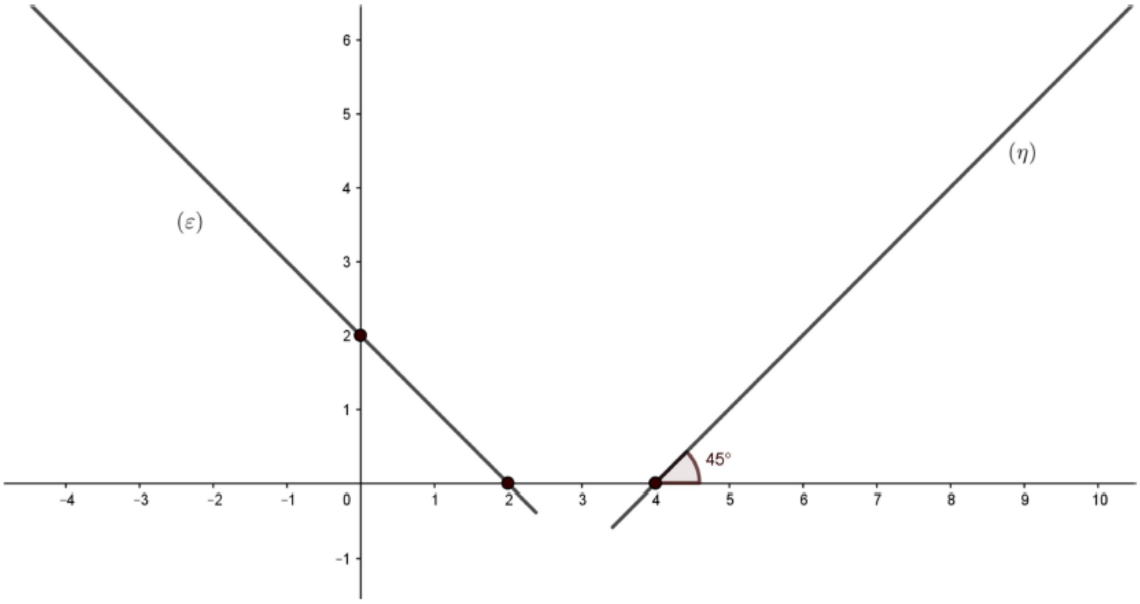
ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΟ 1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 1 14235

α) Με βάση τα δεδομένα του παρακάτω σχήματος, να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (*ε*) και (*η*).



(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (*ε*) και (*η*). (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2 14321

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: 2x+y=6$, $\varepsilon_2: x-2y=-2$

α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο Μ. (Μονάδες 13)

β) Να δειχθεί ότι η ευθεία $\varepsilon_3: 3x+y=8$ διέρχεται από το Μ. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3 15006

α) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2x-4y=-2 \\ 5x-10y=3 \end{cases}$ (Μονάδες 13)

β) Τι συμπεραίνετε για τη σχετική θέση των ευθειών $\varepsilon_1: 2x-4y=-2$ και $\varepsilon_2: 5x-10y=3$;

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4 15011

Ο Κώστας καταθέτει σε μια τράπεζα 15 χαρτονομίσματα των 20€ και 50€. Συμβολίζουμε με x και y το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 20€ και 50€ αντίστοιχα.

α) **i.** Δίνονται οι εξισώσεις:

1. $y = 15 - x$ 2. $y - x = 15$.

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την σχέση των x και y. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ii. Η συνολική αξία των χρημάτων είναι 480€. Δίνονται, ακόμα, οι εξισώσεις:

3. $50y - 20x = 480$ 4. $20x + 50y = 480$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την συνολική αξία των χρημάτων σε σχέση με τα x και y . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

β) Επιλύοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων που επιλέξατε στα ερωτήματα αi) και αii) να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 20€ και 50€ κατάθεσε ο Κώστας. (Μονάδες 11)

ΘΕΜΑ 5 15016

Δίνεται το γραμμικό σύστημα: $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το ζεύγος (0,4) δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος. (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1): 3x + 2y = 8$ και $(\varepsilon_2): 2x - y = 3$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 6 15195

α) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 5x - y = -1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ (Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες $(\varepsilon_1): 5x - y = -1$ και $(\varepsilon_2): 3x + y = 2$.και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 7 15849

Σε μια συνεστίαση μεταξύ συγγενών παρευρίσκονται οι γονείς με τα παιδιά τους. Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς. Κάθε γονιός πλήρωσε 12€ και κάθε παιδί τα μισά. Ο συνολικός λογαριασμός ήταν 300€.

α) Αν x το πλήθος των γονιών και y το πλήθος των παιδιών, να διαλέξετε από τις παρακάτω επιλογές, ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που εκφράζει τα δεδομένα του παραπάνω προβλήματος.

Α. $\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$ Β. $\begin{cases} x - y = 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$

Γ. $\begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$ Δ. $\begin{cases} y = x + 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$

(Μονάδες 10)

β) Από τη λύση του συστήματος που επιλέξατε στο α) ερώτημα να βρείτε πόσοι γονείς και πόσα παιδιά υπήρχαν στο τραπέζι. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 8 15147

Μια παρέα τεσσάρων φίλων παραγγέλνει σάντουιτς. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η παραγγελία τους. Τα συστατικά των σάντουιτς είναι βιολογικά και το ψωμί είναι ολικής άλεσης (βιολογικό). Το ψωμί για κάθε σάντουιτς έχει κόστος 0,3 ευρώ. Το πρώτο σάντουιτς έχει 2 φέτες ζαμπόν, 4 φέτες τυρί, δεν έχει γαλοπούλα και κοστίζει 3,8 ευρώ. Το δεύτερο έχει 1 φέτα ζαμπόν, 2 φέτες τυρί, 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 3,55 ευρώ. Το τρίτο έχει 3 φέτες ζαμπόν, δεν έχει τυρί, έχει 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 4,05 ευρώ. Ο σερβιτόρος δεν έχει προλάβει να συμπληρώσει το κόστος του τελευταίου σάντουιτς.

σάντουιτς	φέτες ζαμπόν	φέτες τυρί	φέτες γαλοπούλα	ψωμί	κόστος
1^o	2	4	0	0,3 €	3,8 €
2^o	1	2	3	0,3 €	3,55 €
3^o	3	0	3	0,3 €	4,05 €
4^o	2	2	1	0,3 €	
				Σύνολο	

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε πόσο κοστίζει η μια φέτα τυρί, η μια φέτα γαλοπούλα και η μια φέτα ζαμπόν. (Μονάδες 10)

γ) Πόσα χρήματα θα πληρώσουν συνολικά οι τέσσερις φίλοι για την παραγγελία τους; (Μονάδες 6

1.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 9 14979

Δίνεται το σύστημα $(\Sigma):\begin{cases} y=-x+2 \\ y=\dfrac{1}{x} \end{cases}$

α) Να λύσετε το σύστημα (Σ). (Μονάδες 12)

β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά, σε κατάλληλο σχήμα, τις λύσεις του συστήματος (Σ) που βρήκατε στο ερώτημα α. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 10 14237

Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:
Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού. Ο λόγος της ηλικίας το πατέρα προς την ηλικία του παιδιού ισούται με $\frac{11}{3}$ και επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115 χρόνια.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ηλικία του καθενός. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 11 14289

Ο Κώστας έχει τρία παιδιά. Δύο δίδυμα κορίτσια και ένα αγόρι. Στην ερώτηση πόσων χρονών είναι τα παιδιά του απάντησε ως εξής.

1. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14
2. Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιου μου είναι 24
3. Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία 1. και 2. που έδωσε ο Κώστας. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 12 15118

α) Να λύσετε το σύστημα $(\Sigma_1): \begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$ (Μονάδες 8)

β) Είναι όλες οι λύσεις του συστήματος (Σ_1), λύσεις και του $(\Sigma_2): \begin{cases} |xy| = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

γ) Η γεωμετρική αναπαράσταση του συστήματος (Σ_2) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Με βάση το σχήμα,

i. να βρείτε τις λύσεις του (Σ_2). (Μονάδες 4)

ii. να παραστήσετε γεωμετρικά το σύστημα (Σ_1) σημειώνοντας τις λύσεις του. (Μονάδες 8)

2.1 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ – ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας), με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ακριβώς ένα στοιχείο του συνόλου Β.
Το σύνολο Α λέγεται πεδίο ορισμού της συνάρτησης και περιέχει τις δυνατές τιμές που μπορούμε να δώσουμε στη μεταβλητή x. (το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f το συμβολίζουμε συνήθως D_f ή A_f). Το σύνολο Β λέγεται σύνολο τιμών της f και περιέχει όλες τις τιμές της $f(x)$ για τα αντίστοιχα $x \in A$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΥΡΕΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ
$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x)\neq 0$
$f(x)=\sqrt[v]{P(x)}$	$P(x)\geq 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=x^2-3x+12$

ii. $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-2}$

iii. $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$

iv. $f(x)=2x+\sqrt{6-x}$

v. $f(x)=\dfrac{3x+5}{x-3}+\sqrt{x-2}$

vi. $f(x)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{2-x}$

vii. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

viii. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x-6}}{\sqrt{5-|x|}}+\dfrac{|x-1|-5}{x^3+27}$

Λύση :

i. Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f=\mathbb{R}$

ii. Πρέπει : $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$. Άρα $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

iii. Πρέπει : $x^2-3x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \,\&\, x\neq 2$. Άρα $D_f=\mathbb{R}-\{1,2\}$

iv. Πρέπει : $6-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 6$. Άρα $D_f=(-\infty,6]$

v. Πρέπει : $x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$ και $x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$. Άρα $D_f=[2,3)\cup(3,+\infty)$

vi. Πρέπει : $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 2-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x\leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[1,2]$. Άρα $D_f=[1,2]$

vii. Πρέπει : $x\neq 0$ (1) και $1-x^2\geq 0$ (2)

Έχω $1-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-1,1]$ (2)

Από (1) & (2) $D_f=[-1,0)\cup(0,1]$.

viii. Πρέπει

- $x^2+x-6\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-3]\cup[2,+\infty)$ καθώς :

x	$-\infty$	-3		2	$+\infty$
x^2+x-6	+	0	-	0	+

- $5-|x|>0 \Leftrightarrow |x|<5 \Leftrightarrow -5<x<5$
- $x^3+27\neq 0 \Leftrightarrow x^3\neq -27 \Leftrightarrow x\neq -3$

Τελικά : $D_f=(-5,-3)\cup[2,5)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i) $f(x)=2x^2-7x+15$ ii) $f(x)=\dfrac{x-x^2}{12+3x}$ iii) $f(x)=\dfrac{x^2-7}{2x-8}$ iv) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-5x+6}$

v) $f(x)=2x^2+\sqrt{14-2x}$ vi) $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$ vii) $f(x)=\sqrt{-x^2-2x+8}$

3. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{x}{x+5}$ ii) $f(x)=\dfrac{4x}{x-3}+\dfrac{2x-7}{x^2+3x-4}$ iii) $f(x)=\dfrac{6-4x}{x^2-9}+\dfrac{2x}{x^2+4x+3}+\dfrac{5}{2}$

iv) $f(x)=\dfrac{2x+6}{|2x-1|-5}$ v) $f(x)=\dfrac{x+1}{5-|1-3x|}$ vi) $f(x)=\dfrac{2x+7}{5+|1-3x|}$ vii) $f(x)=\dfrac{x+3}{|x-2|-|2x-1|}$

4. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^3+8}$ ii) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^3-9x}$ iii) $g(x)=\dfrac{2x+7}{x^3-4x^2+4x}$

iv) $g(x)=\dfrac{5x-12}{x^3+x^2+x}$ v) $h(x)=\dfrac{x-5}{x^4-27x}$ vi) $h(x)=\dfrac{x+2}{16x^6-x^2}$

5. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των επόμενων συναρτήσεων:

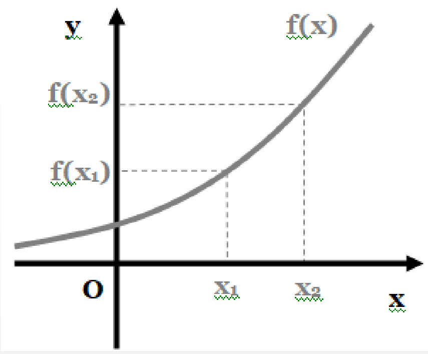
i) $f(x)=\dfrac{1}{2x-6}+\sqrt{x+2}$ ii) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{4-x}}$ iii) $g(x)=\dfrac{\sqrt{3-|x|}}{x-1}$

iv) $g(x)=\dfrac{\sqrt{10-2|x|}}{x^2+3x}$ v) $h(x)=\dfrac{\sqrt{7-|2x-3|}}{|x-1|-2}$ vii) $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x-1|}}+\sqrt{2-|x|}$

<u>ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ</u> : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (ΟΡΙΣΜΟΣ)

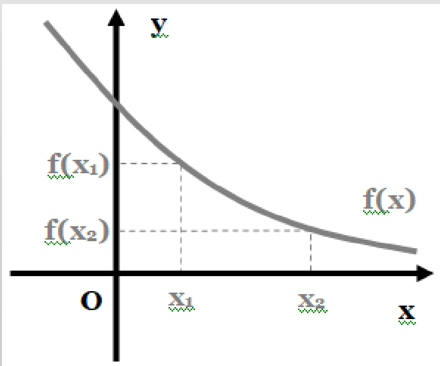
- Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$, ισχύει : $f(x_1) < f(x_2)$

  (Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε ισχύει η ισοδυναμία $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$)



- Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$, ισχύει : $f(x_1) > f(x_2)$

  (Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα τότε ισχύει η ισοδυναμία $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$)

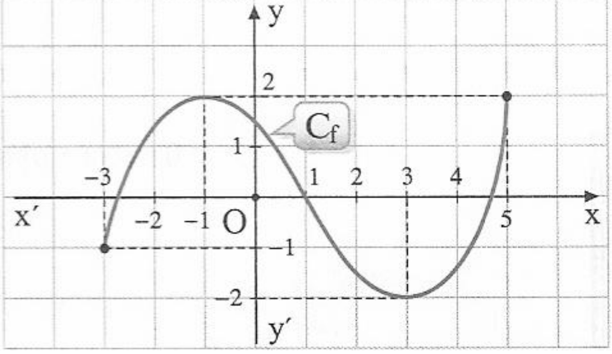


<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2Α</u> : ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΑΠΟ ΣΧΗΜΑ

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

6. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, τη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στη συνέχεια να συγκρίνετε τους αριθμούς :

i) $f(\pi)$ και $f(4)$ ii) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$



Λύση :

Όπως προκύπτει από το παραπάνω σχήμα, η συνάρτηση f είναι :

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-3,-1]$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,3]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3,5]$

i) $\pi, 4 \in [3,5]$ όπου η $f \uparrow [3,5]$, έτσι : $\pi < 4 \overset{f\uparrow[3,5]}{\Rightarrow} f(\pi) < f(4)$

ii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \in [-1,3]$ όπου η $f \downarrow [-1,3]$, έτσι : $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} \overset{f\downarrow[-1,3]}{\Rightarrow} f\left(\frac{1}{3}\right) > f\left(\frac{1}{2}\right)$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2Β</u> : ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΜΕ ΟΡΙΣΜΟ

Για να βρούμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ακολουθούμε τα εξής βήματα :

- Θεωρούμε δύο οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.
- Με κατάλληλες πράξεις κατασκευάζουμε την ανισότητα μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$.
- Αν καταλήξουμε στην ανισότητα $f(x_1) < f(x_2)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
- Αν καταλήξουμε στην ανισότητα $f(x_1) > f(x_2)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Χρήσιμες είναι οι παρακάτω **ιδιότητες της διάταξης** :

i. $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$

ii. Αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$

iii. Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$

iv. Αν $\alpha > \beta$ (1) και $\gamma > \delta$ (2), τότε προσθέτω κατά μέλη της (1) και (2) και έχω : $\alpha + \gamma > \beta + \delta$ (Προσοχή : δεν γίνεται να προσθέσω κατά μέλη ανισότητες που έχουν διαφορετική φορά.)

v. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί αριθμοί τότε αν $\alpha > \beta$ (1) και $\gamma > \delta$ (2), τότε πολλαπλασιάζω κατά μέλη της (1) και (2) και έχω : $\alpha\gamma > \beta\delta$ (Προσοχή : δεν γίνεται να πολλαπλασιάσω κατά μέλη ανισότητες που έχουν διαφορετική φορά.)

Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί και ν φυσικός διαφορετικός του μηδέν, τότε ισχύει :

vi. $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu < \beta^\nu$

(Προσοχή : αν α, β αρνητικοί τότε : $\alpha < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^\nu < \beta^\nu, & \alpha\nu\ \nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \\ \alpha^\nu > \beta^\nu, & \alpha\nu\ \nu\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota\omicron\varsigma \end{cases}$)

vii. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta}$

viii. Αν οι αριθμοί α και β είναι **ομόσημοι**, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

7. Να βρείτε τη μονοτονία των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = 4x - 7$ ii. $f(x) = -4x - 7$ iii. $f(x) = \sqrt{1-x}$ iv. $f(x) = (x-1)^2 - 1, \quad x \leq 1$.

Λύση :

i. $f(x) = 4x - 7$, Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = \mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε έχουμε :

$x_1 < x_2 \Rightarrow 4x_1 < 4x_2 \Rightarrow 4x_1 - 7 < 4x_2 - 7 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f = \mathbb{R}$

ii. $f(x) = -4x - 7$, Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = \mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε έχουμε :

$x_1 < x_2 \Rightarrow -4x_1 > -4x_2 \Rightarrow -4x_1 - 7 > -4x_2 - 7 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f = \mathbb{R}$

(**Γενικά** γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι μια ευθεία. Για τη μονοτονία της συνάρτησης αυτής ισχύει ότι :

- Αν $\alpha > 0$ η $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
- Αν $\alpha < 0$ η $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
- Αν $\alpha = 0$ η $f(x) = 0x + \beta \Leftrightarrow f(x) = \beta$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$)

iii. Πρέπει : $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. Άρα $D_f = (-\infty, 1]$

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = (-\infty, 1]$, με

$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Rightarrow \sqrt{1 - x_1} > \sqrt{1 - x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f = (-\infty, 1]$.

iv. $D_f = (-\infty, 1]$, Έστω $x_1, x_2 \in D_f = (-\infty, 1]$, με

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \xrightarrow[x_1 - 1 \leq 0, \& \ x_2 - 1 \leq 0]{\text{Επειδή}, x \leq 1} (x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2 \Rightarrow$ (Όταν υψώνω στο τετράγωνο αρνητικούς αριθμούς, αλλάζει η φορά της ανίσωσης)

$\Rightarrow (x_1 - 1)^2 - 1 > (x_2 - 1)^2 - 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f = (-\infty, 1]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x) = 6 - 2x$

ii. $f(x) = 3 + 5x$

iii. $f(x) = 2x^3 - 1$

iv. $f(x) = \sqrt{6 - 2x} + 3$

v. $f(x) = x^2 - \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

vi. $f(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x}$

vii. $f(x) = x^3 + 2x + 1$

viii. $f(x) = \sqrt{3 - \sqrt{3 - x}}$

9. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x) = \dfrac{3}{x} - 6x^4 - \sqrt{x}$

ii. $f(x) = x^3 - \sqrt{3 - 2x}$

iii. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

iv. $f(x)=\sqrt{6-2x}+3$

v. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

vi. $f(x)=1-2x^3-3x$

vii. $f(x)=x^3-\sqrt{2-x}+5x$

10. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x)=x^2-3x+\dfrac{1}{x}$ στο διάστημα $\Delta=(-\infty,0)$

11. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση :

i. $f(x)=(2\lambda-8)x+3$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii. $f(x)=(6-3\lambda)x-25$ είναι γνησίως φθίνουσα.

iii. $f(x)=(7-|3-2\lambda|)x-9$ είναι γνησίως αύξουσα.

iv. $f(x)=(\lambda^2-4\lambda+5)x+72$ είναι γνησίως αύξουσα.

v. $f(x)=(-2\lambda^2+6\lambda-9)x+3$ είναι γνησίως φθίνουσα.

12. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση : $f(x)=(\lambda^2-2\lambda-15)x-2018$ είναι γνησίως φθίνουσα και η συνάρτηση $g(x)=(|2\lambda-1|-|\lambda+2|)x+2019$ είναι γνησίως αύξουσα.

13.Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$, στο $(-\infty,1)$

14. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=2x+3f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

15. Έστω δυο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα , να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $g(x)=f(-2x+3)$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2-\sqrt{x}+\dfrac{\alpha+6}{x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(4,-33)$ να δείξετε ότι $\alpha=-2$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ & ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε η C_f τέμνει τον άξονα x΄x το πολύ μια φορά. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x)=0$, αλλά και κάθε εξίσωση της μορφής $f(x)=\alpha$ με $\alpha \in \Re$, έχει το πολύ μια ρίζα.

Για να επιλύσουμε μια εξίσωση η οποία δεν λύνεται με κάποια γνωστή μέθοδο δουλεύουμε ως εξής :

1) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος
2) θέτουμε το 1ο μέλος ως συνάρτηση $f(x)$ οπότε η εξίσωση έχει τη μορφή $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$
3) βρίσκουμε με δοκιμές μια ρίζα (προφανής) της εξίσωσης $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$
4) αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$ έχει το πολύ μια ρίζα που είναι η προφανής.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

17. Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{10-x}=x^3+2$.

Λύση : Έχω : $\sqrt{10-x}-x^3-2=0$, έστω $f(x)=\sqrt{10-x}-x^3-2$. Πρέπει $10-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 10$, δηλ. $D_f=(-\infty,10]$. Έχω να λύσω την εξίσωση $\sqrt{10-x}-x^3-2=0 \Leftrightarrow f(x)=0$. Με δοκιμές παρατηρώ ότι για $x=1$ έχω : $\sqrt{10-1}-1^3-2=0 \Leftrightarrow 3-3=0 \Leftrightarrow f(1)=0$. Άρα η $x=1$ είναι ρίζα (προφανής) της εξίσωσης $f(x)=0$. Για να δείξω ότι είναι και μοναδική, αρκεί να δείξω ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Έστω $x_1,x_2\in D_f=(-\infty,10]$, με : $x_1<x_2 \Rightarrow -x_1>-x_2 \Rightarrow 10-x_1>10-x_2 \Rightarrow \sqrt{10-x_1}>\sqrt{10-x_2}$ (1) Επίσης : $x_1<x_2 \Rightarrow x_1^3<x_2^3 \Rightarrow -x_1^3>-x_2^3 \Rightarrow -x_1^3-2>-x_2^3-2$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $\sqrt{10-x_1}-x_1^3-2>\sqrt{10-x_2}-x_2^3-2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f=(-\infty,10]$, άρα η ρίζα $x=1$ της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι και μοναδική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

18. Να λυθεί η εξίσωση : $2\sqrt{x-1}=1+\dfrac{8}{x^3}$

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-2}+\dfrac{\alpha}{x}$, με $\alpha\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(6,1)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι $\alpha=-6$.
ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
iii. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x-2}=\dfrac{6}{x}-1$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{8}{x^3}-3\sqrt{x-1}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $8+2x^3=3x^3\sqrt{x-1}$

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}-\sqrt{x}$, με $\alpha\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1)+f(4)=12$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι $\alpha=12$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{12}{|2x-1|+1}-\dfrac{12}{|x+4|+1}=\sqrt{|2x-1|+1}-\sqrt{|x+4|+1}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ & ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΗΣ – ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Για να επιλύσουμε μια ανίσωση η οποία δεν λύνεται με κάποια γνωστή μέθοδο δουλεύουμε ως εξής :

1) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1^{ο} μέλος
2) θέτουμε το 1^{ο} μέλος ως συνάρτηση $f(x)$ οπότε η ανίσωση έχει τη μορφή $f(x)<0$ ή $f(x)>0$
3) αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη
4) βρίσκουμε με δοκιμές μια ρίζα (προφανής) της εξίσωσης $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$ έτσι η ανίσωση γίνεται $f(x)<0\Leftrightarrow f(x)<f(\rho)$
5) εκμεταλλευόμαστε τη μονοτονία της f για να λύσουμε την ανίσωση που προέκυψε.

ΠΡΟΣΟΧΗ :

- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε : $\alpha<\beta\Leftrightarrow f(\alpha)<f(\beta)$ και $\alpha\le\beta\Leftrightarrow f(\alpha)\le f(\beta)$
- Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα τότε : $\alpha<\beta\Leftrightarrow f(\alpha)>f(\beta)$ και $\alpha\le\beta\Leftrightarrow f(\alpha)\ge f(\beta)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

22. Να λυθεί η ανίσωση : $x^3+\sqrt{x}<2$.

Λύση : Έχω : $x^3+\sqrt{x}-2<0$ η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x\in[0,+\infty)$

Έστω $h(x)=x^3+\sqrt{x}-2$, με $A_h=[0,+\infty)$, έχω να λύσω την ανίσωση : $h(x)<0$ (1)

Παρατηρώ ότι $h(1)=0$ άρα η $x=1$ άρα η ανίσωση (1) γίνεται : $h(x)<h(1)$.

Αρκεί τώρα να βρω τη μονοτονία της h :

Έστω $x_1,x_2\in A_h$ με :

$x_1<x_2\Rightarrow x_1^3<x_2^3$ (2)

$x_1<x_2\Rightarrow\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}\Rightarrow\sqrt{x_1}-2<\sqrt{x_2}-2$ (3)

Προσθέτω κατά μέλη τις (2),(3) και (4) και έχω :

$x_1^3+\sqrt{x_1}-2<x_2^3+\sqrt{x_2}-2\Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$

Άρα η $h\uparrow$ για κάθε $x\in A_h=[0,+\infty)$, οπότε $h(x)<h(1)\Leftrightarrow x<1$ δηλ. $x\in[0,1)$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+3x$, αφού βρείτε τη μονοτονία της, να λύσετε την ανίσωση $f(2x^2-x+3)<f(3x+x^2)$.

<u>Λύση :</u> Έχω : $D_f=\mathbb{R}$, Έστω $x_1,x_2\in D_f=\mathbb{R}$, με $x_1<x_2\Rightarrow x_1^3<x_2^3$ (1)

Επίσης : $x_1<x_2\Rightarrow 3x_1<3x_2$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $x_1^3+3x_1<x_2^3+3x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Οπότε $f(2x^2-x+3)<f(3x+x^2)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}2x^2-x+3<3x+x^2\Leftrightarrow$ $x^2-4x+3<0$. Έχω $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left\langle\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

x	-∞	1		3	+∞
x^2-4x+3	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2-4x+3<0\Leftrightarrow x\in(1,3)$.

24. Αν η συνάρτηση $f(x)=2x+\sqrt{x^2+1}$ είναι γνησίως αύξουσα τότε να λυθεί η εξίσωση : $2\left(x^2-3x+2\right)>\sqrt{(3x-2)^2+1}-\sqrt{x^4+1}$.

<u>Λύση :</u>

$2\left(x^2-3x+2\right)>\sqrt{(3x-2)^2+1}-\sqrt{x^4+1}\Leftrightarrow 2x^2-6x+4>\sqrt{(3x-2)^2+1}-\sqrt{x^4+1}$

$\Leftrightarrow 2x^2+\sqrt{x^4+1}>6x-4+\sqrt{(3x-2)^2+1}\Leftrightarrow 2x^2+\sqrt{x^4+1}>2(3x-2)+\sqrt{(3x-2)^2+1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x^2)>f(3x-2)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}x^2>3x-2\Leftrightarrow x^2-3x+2>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

25. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(-1,6)$ και $\mathrm{B}(2,3)$.

i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $f\left(f(x^2-17)-4\right)<3$.

<u>Λύση :</u>

i. Η C_f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(-1,6)$, άρα ισχύει $f(-1)=6$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(2,3)$, άρα ισχύει $f(2)=3$. Αν $x_1=-1$ και $x_2=2$ τότε $-1<2\Rightarrow x_1<x_2$. Επίσης $f(-1)=6\Leftrightarrow f(x_1)=6$ και $f(2)=3\Leftrightarrow f(x_2)=3$.
Έχουμε δηλ. $x_1<x_2$ με $f(x_1)>f(x_2)$, επομένως η f αποκλείεται να είναι γνησίως αύξουσα και επειδή είναι γνησίως μονότονη, θα είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. $f\left(f(x^2-17)-4\right)<3\overset{f(2)=3}{\Leftrightarrow}f\left(f(x^2-17)-4\right)<f(2)\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(x^2-17)-4>2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x^2-17)>6\overset{f(-1)=6}{\Leftrightarrow}f(x^2-17)>f(-1)\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}x^2-17<-1\Leftrightarrow x^2-16<0\Leftrightarrow x\in(-4,4)$.

26. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι : $f(x)+f(x+5)>f(x+3)+f(x+7)$.

<u>Λύση :</u>

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι :

- $x<x+3\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(x+3)$ (1)
- $x+5<x+7\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(x+5)>f(x+7)$ (1)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε : $f(x)+f(x+5)>f(x+3)+f(x+7)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

27. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{4}{x}-\sqrt{x}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}-x<4$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση : $\dfrac{4}{x^2+1}-\dfrac{4}{x^2+2x+5}<\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2x+5}$.

28. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\sqrt{x}+x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $\sqrt{|x|+5}-\sqrt{3|x|+1}<2|x|-4$.

29. Έστω η συνάρτηση $f(x)=3x^3+x$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να λυθεί η ανίσωση : $(x^2-3)^3-(2x+1)^3<\dfrac{-x^2+2x+4}{3}$.

30. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=-2x^3-3x+5$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε τις ανισώσεις : α) $f(x-4)<f(3x)$ β) $f(|x|)>0$ γ) $f(x^2-5)-f(3-2x)>0$.

31. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να λυθούν οι ανισώσεις :

i. $f(2x+3)<f(4x-1)$

ii. $f(x^2-2x)<f(x-2)$

32. Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη με $f(2008)<f(2004)$.

i. Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f.

ii. Να λυθεί η ανίσωση $f(5-3x)\le f(x^2+x)$.

33. Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη με $f(2007)<f(2000)$.

i. Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f.

ii. Να λυθεί η ανίσωση $f(3x-2)\ge f(x^2)$.

34. Έστω ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα y΄y στο 2. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2-1)<2$,

i. αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

35. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι:

i. $f(x)+f(5x)<f(3x)+f(6x)$, για κάθε $x>0$

ii. $f(x)+f(x^3)>f(x^2)+f(x^5)$, για κάθε $x\in(0,1)$.

36. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(\alpha^2+1)\le f(2\alpha)$.

37. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γνησίως μονότονη, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,2) και Β(3,5)

i. Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f .

ii. Να λυθεί η ανίσωση : $f(|x|-3)\geq 2$

38. Δίνεται γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,5) και Β(-2,7).

i. Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f.

ii. Να λυθεί η ανίσωση $f\left(f(|x|-4)-6\right)-5<0$.

39. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=3x^{2019}+2x^{2017}+1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $f\left(f(x)\right)<6$.

iii. Να αποδείξετε ότι : $f(13)-f(12)<f(14)-f(11)$.

40. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{\alpha x+\beta}{x+1}$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{M}(-2,5)$ και $\mathrm{N}(-4,3)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να δείξετε ότι $\alpha=2$, $\beta=-1$.

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

iv. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f παίρνει τη μορφή $f(x)=2-\dfrac{3}{x+1}$.

v. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $\Delta=(-1,+\infty)$.

vi. Να αποδείξετε ότι : $f(3)-f(2)<f(4)-f(1)$.

<u>ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ</u> : ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (ΟΡΙΣΜΟΣ)

- Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in \mathrm{A}$ **(ολικό) μέγιστο** όταν : $f(x)\leq f(x_0)$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$

- Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in \mathrm{A}$ **(ολικό) ελάχιστο** όταν : $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$

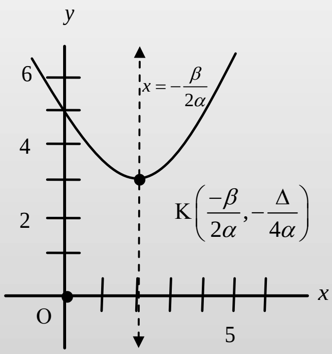
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Γενικά για να αποδείξω ότι η f παρουσιάζει μέγιστο, προσπαθούμε να βρούμε ένα $x_0 \in \mathrm{A}$ τέτοιο ώστε : $f(x) \leq f(x_0)$, αντίστοιχα ελάχιστο $f(x) \geq f(x_0)$.

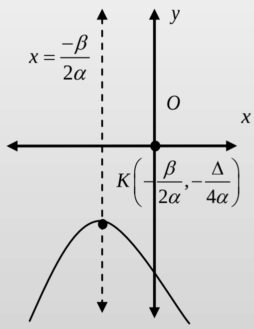
Για να βρω τα ακρότατα μιας συνάρτησης, είναι χρήσιμες οι παρακάτω διαδικασίες :

- Ακρότατα της συνάρτησης : $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$
  Η γραφική παράσταση της f είναι μια παραβολή με κορυφή το σημείο $\mathrm{K}\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$.
  - Αν $\alpha > 0$ τότε : $f \downarrow \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και $f \uparrow \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ και παρουσιάζει **ελάχιστο** στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ το $f(x_0) = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$
  - Αν $\alpha < 0$ τότε : $f \uparrow \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και $f \downarrow \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ και παρουσιάζει **μέγιστο** στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ το $f(x_0) = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$

Αν $\alpha > 0$



Αν $\alpha < 0$



- Αν γνωρίζουμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης σε κλειστό διάστημα τότε μπορούμε να βρούμε τα ακρότατα της π.χ
  - αν $f \uparrow [\alpha, \beta]$ τότε παρουσιάζει στο α ελάχιστο το $f(\alpha)$ και στο β μέγιστο το $f(\beta)$
  - αν $f \downarrow [\alpha, \beta]$ τότε παρουσιάζει στο α μέγιστο το $f(\alpha)$ και στο β ελάχιστο το $f(\beta)$

- Κατασκευάζω ανισοισότητες της μορφής $f(x) \geq m$ ή $f(x) \leq \mathrm{M}$ ή $m \leq f(x) \leq \mathrm{M}$ και βρίσκω τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει το ¨=¨ λύνοντας την εξίσωση : $f(x) = m$ ή $f(x) = \mathrm{M}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

41. (Άσκηση 3 σελ. 38 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να δείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση $f(x)=x^2-6x+10$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x=3$

ii. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x=1$

Λύση :

i. $f(x)=x^2-6x+10$ Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f=\mathbb{R}$

Για να παρουσιάζει η $f(x)$ ελάχιστο για $x=3$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x)\geq f(3)$ για κάθε $x\in D_f=\mathbb{R}$. Έχω :

$f(x)\geq f(3)\Leftrightarrow x^2-6x+10\geq 3^2-6\cdot 3+10\Leftrightarrow x^2-6x+10\geq 9-18+10\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-6x+10\geq 1\Leftrightarrow \Leftrightarrow x^2-6x+9\geq\Leftrightarrow (x-3)^2\geq 0$ που ισχύει.

ii. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, πρέπει $x^2+1\neq 0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f=\mathbb{R}$

Για να παρουσιάζει η $f(x)$ μέγιστο για $x=1$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x)\leq f(1)$ για κάθε $x\in D_f=\mathbb{R}$. Έχω :

$f(x)\leq f(1)\Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2+1}\leq\dfrac{2\cdot 1}{1^2+1}\Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2+1}\leq 1 \overset{x^2+1>0}{<===>} 2x\leq x^2+1\Leftrightarrow 0\leq x^2-2x+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0\Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0$ που ισχύει.

42. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=2x^4+1$

ii. $f(x)=-2x^4+1$

iii. $f(x)=(x-3)^2-5$

iv. $f(x)=x^2-4x+7$

v. $f(x)=-x^2+2x+3$

vi. $f(x)=5-4|x-1|$

vii. $f(x)=-\dfrac{10}{2+\sqrt{4-x}}$

viii. $f(x)=x^2-2|x|+3$

ix. $f(x)=\sqrt{4-2x}$

x. $f(x)=3-5x$, $x\in[-2,5)$

Λύση :

i. $f(x)=2x^4+1$, είναι $A_f=\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $x^4\geq 0\Leftrightarrow 2x^4\geq 0\Leftrightarrow 2x^4+1\geq 1\Leftrightarrow f(x)\geq 1$ (1)

Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=1\Leftrightarrow 2x^4+1=1\Leftrightarrow x=0$, δηλ. $f(0)=1$

άρα η (1) γίνεται $f(x)\geq 1\Leftrightarrow f(x)\geq f(0)$.

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$ το $f(0)=1$.

ii. $f(x)=-2x^4+1$, είναι $A_f=\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $x^4\geq 0\Leftrightarrow -2x^4\leq 0\Leftrightarrow -2x^4+1\leq 1\Leftrightarrow f(x)\leq 1$ (1)

Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=1\Leftrightarrow 2x^4+1=1\Leftrightarrow x=0$, δηλ. $f(0)=1$

άρα η (1) γίνεται $f(x)\leq 1\Leftrightarrow f(x)\leq f(0)$.

Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=0$ το $f(0)=1$.

iii. $f(x)=(x-3)^2-5$, είναι $A_f=\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $(x-3)^2\geq 0\Leftrightarrow (x-3)^2-5\geq -5\Leftrightarrow f(x)\geq -5$ (1)

Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=-5\Leftrightarrow (x-3)^2-5=-5\Leftrightarrow x=3$, δηλ. $f(3)=-5$

άρα η (1) γίνεται $f(x)\geq -5\Leftrightarrow f(x)\geq f(3)$.

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=3$ το $f(3)=-5$.

iv. $f(x)=x^2-4x+7$, είναι $A_f=\mathbb{R}$.

Επειδή $\alpha=1>0$ άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=-\dfrac{-4}{2}=2$

το $f(x_0)=f(2)=3$, άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)\geq f(2)\Leftrightarrow f(x)\geq 3$.

Επίσης η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$.

v. $f(x)=-x^2+2x+3$, είναι $A_f=\mathbb{R}$.

Επειδή $\alpha=-1<0$ άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=-\dfrac{2}{2\cdot(-1)}=1$

το $f(x_0)=f(1)=4$, άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)\leq f(1)\Leftrightarrow f(x)\leq 4$.

Επίσης η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

vi. $f(x)=5-4|x-1|$, είναι $A_f=\mathbb{R}$. Έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $|x-1|\geq 0\Leftrightarrow -4|x-1|\leq 0\Leftrightarrow 5-4|x-1|\leq 5\Leftrightarrow f(x)\leq 5$ (1)

Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=5\Leftrightarrow 5-4|x-1|=5\Leftrightarrow -4|x-1|=0\Leftrightarrow x=1$, δηλ. $f(1)=5$ άρα η (1) γίνεται $f(x)\leq 5\Leftrightarrow f(x)\leq f(1)$. Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=1$ το $f(1)=5$.

vii. $f(x)=-\dfrac{10}{2+\sqrt{4-x}}$, πρέπει

- $4-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 4$
- $2+\sqrt{4-x}\neq 0$, που ισχύει άρα,

είναι $A_f=(-\infty,4]$. Έχουμε για κάθε $x\in(-\infty,4]$ έχουμε $\sqrt{4-x}\geq 0\Leftrightarrow 2+\sqrt{4-x}\geq 2\Leftrightarrow \dfrac{1}{2+\sqrt{4-x}}\leq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow -\dfrac{10}{2+\sqrt{4-x}}\geq -\dfrac{10}{2}\Leftrightarrow f(x)\geq -5$ (1)

Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=-5\Leftrightarrow -\dfrac{10}{2+\sqrt{4-x}}=-5\Leftrightarrow 2+\sqrt{4-x}=2\Leftrightarrow x=4$, δηλ. $f(4)=-5$ άρα η (1) γίνεται $f(x)\geq -5\Leftrightarrow f(x)\geq f(4)$. Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=4$ το $f(4)=-5$.

viii. $f(x)=x^2-2|x|+3$, είναι $A_f=\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι : $f(x)=x^2-2|x|+3 \Leftrightarrow f(x)=x^2-2|x|+1+2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x)=|x|^2-2|x|+1+2 \Leftrightarrow f(x)=(|x|-1)^2+2$. Έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $(|x|-1)^2\geq 0 \Leftrightarrow (|x|-1)^2+2\geq 2 \Leftrightarrow f(x)\geq 2$ (1)

Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=2 \Leftrightarrow (|x|-1)^2+2=2 \Leftrightarrow (|x|-1)^2=0 \Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$, δηλ. $f(1)=2$ και $f(-1)=2$ άρα η (1) γίνεται :

$f(x)\geq 2 \Leftrightarrow \left(f(x)\geq f(1)\ \kappa\alpha\iota\ f(x)\geq f(-1)\right)$.

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1=-1$ και στο $x_2=1$ το $f(-1)=f(1)=2$.

ix. $f(x)=\sqrt{4-2x}$, είναι $A_f=(-\infty,2]$.

Με ¨χτίσιμο¨ δείχνω ότι $f\downarrow(-\infty,2]$ άρα η f παρουσιάζει :

- ελάχιστο στο $x_0=2$ το $f(2)=\sqrt{4-2\cdot 2}=0$ δηλ. για κάθε $x\in(-\infty,2]$ ισχύει ότι $f(x)\geq f(0) \Leftrightarrow f(x)\geq 0$. Η f δεν παρουσιάζει μέγιστο.

x. $f(x)=3-5x$, είναι $A_f=[-2,5)$.

Με ¨χτίσιμο¨ δείχνω ότι $f\downarrow[-2,5)$ άρα η f παρουσιάζει :

- Μέγιστο στο $x_0=-2$ το $f(-2)=3-5\cdot(-2)=13$ δηλ. για κάθε $x\in[-2,5)$ ισχύει ότι $f(x)\leq f(-2) \Leftrightarrow f(x)\leq 13$. Η f δεν παρουσιάζει ελάχιστο.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

43. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.
Έστω μια συνάρτηση $f: A\rightarrow\mathbb{R}$.

i. Αν για κάθε $x\in A$, ισχύει $f(x)\geq f(x_0)$, τότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0.
ii. Αν A = (α, β), $x_0\in A$, η f είναι γν. φθίνουσα στο (α ,x_0], και γν. αύξουσα στο [x_0 ,β), τότε η f έχει ελάχιστη τιμή το f(x_0).
iii. Αν A = [α, β] και η f είναι γν. φθίνουσα, τότε η f έχει μέγιστο το f(α) και ελάχιστο το f(β).
iv. Αν f(A)=[κ, λ), τότε η μέγιστη τιμή της f είναι το κ.
v. Αν $A=(\alpha,+\infty)$ και η f είναι γν. μονότονη, τότε η f έχει ολικό ακρότατο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

44. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$, με πεδίο ορισμού $A_f=(0,+\infty)$, παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=2$.

45. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x_1=1$ και ελάχιστο για $x_2=-1$.

46. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=3-|x-2|$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=2$.

47. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^4-2x^2+2$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$. Ποιο είναι το ελάχιστο της f ;

48. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^6-2x^3+3$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$. Ποιο είναι το ελάχιστο της f ;

49. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$ έχει ελάχιστη τιμή -1 και μέγιστη 1.

50. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

i. $f(x)=x^6+5$

ii. $f(x)=3|x-1|-2$

iii. $f(x)=2-3|x-1|$

iv. $f(x)=5-(x+2)^4$

v. $f(x)=7-\dfrac{4}{|x+3|+2}$

vi. $f(x)=\sqrt{6-2x}-3x$

vii. $f(x)=\sqrt{7-x}-\sqrt{x+2}$

viii. $f(x)=-x^2+4|x|-1$

ix. $f(x)=x-6\sqrt{x}+12$

51. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα των συναρτήσεων :

i. $f(x)=2x^2-4x+7$

ii. $f(x)=-3x^2+18x-5$

iii. $f(x)=x^2+6x$

iv. $f(x)=-x^2+2x$

52. Να βρείτε :

i. το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x}$ με πεδίο ορισμού $A_f=(0,+\infty)$.

ii. το μέγιστο της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x}$ με πεδίο ορισμού $A_g=(-\infty,0)$.

(<u>Υπόδειξη</u> : Χρήσιμες είναι οι ανισώσεις

- $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\geq 2$ για $\alpha>0$, με το «=» να ισχύει μόνο για $\alpha=1$
- $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\leq -2$ για $\alpha<0$, με το «=» να ισχύει μόνο για $\alpha=-1$)

53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.

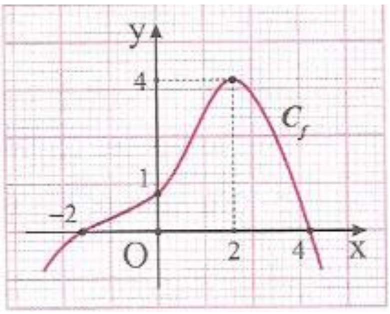
iii. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f .

iv. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

54. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=\sqrt{x^2+1}+4$ και $g(x)=\dfrac{6}{\sqrt{x^2+4}}$.

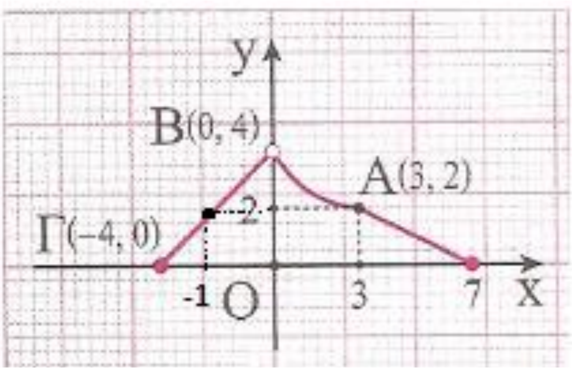
i. Να βρείτε το ελάχιστο της f.
ii. Να βρείτε το μέγιστο της g.
iii. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε $\alpha,\beta\in\Re$ ισχύει ότι : $7f(\alpha)-5g(\beta)\geq 20$

55. Για τη συνάρτηση f του παρακάτω σχήματος, να βρείτε :



i. τα ακρότατα
ii. τα διαστήματα μονοτονίας
iii. τις λύσεις της ανίσωσης $f(x)\geq 0$
iv. τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$
v. την τιμή $f(0)$
vi. Να συγκριθούν οι αριθμοί $f(3)$ και $f(\pi)$

56. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f :



i. να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii. να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
iii. να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Β και Γ.
iv. να βρείτε για ποια τιμή του x η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της.
v. να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x)=2$.
vi. να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΑΡΤΙΑ – ΠΕΡΙΤΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

- Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει : $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y.

- Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **περιττή**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει : $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$. Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Για να είναι μια συνάρτηση f άρτια ή περιττή, πρέπει το πεδίο ορισμού της να είναι σύνολο συμμετρικό ως προς το 0, δηλ. να ισχύει $x, -x \in A$ για κάθε $x \in A$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

57. (Άσκηση 4 σελ. 38 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές.

i. $f_1(x) = 3x^2 + 5x^4$ ii. $f_2(x) = 3|x| + 1$ iii. $f_3(x) = |x+1|$

iv. $f_4(x) = x^3 - 3x^5$ v. $f_5(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$ vi. $f_6(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

Λύση :

i. $D_{f_1} = \mathbb{R}$, για κάθε $x \in D_{f_1}$ είναι και $-x \in D_{f_1}$. Επίσης :
$f_1(-x) = 3(-x)^2 + 5(-x)^4 = 3x^2 + 5x^4 = f_1(x)$ για κάθε $x \in D_{f_1}$. Άρα η f είναι άρτια.

ii. $D_{f_2} = \mathbb{R}$, για κάθε $x \in D_{f_2}$ είναι και $-x \in D_{f_2}$. Επίσης :
$f_2(-x) = 3|-x| + 1 = 3|x| + 1 = f_2(x)$ για κάθε $x \in D_{f_1}$. Άρα η f είναι άρτια.

iii. $D_{f_3} = \mathbb{R}$, για κάθε $x \in D_{f_3}$ είναι και $-x \in D_{f_3}$. Επίσης :
$f_3(-x) = |-x+1| = |-(x-1)| = |x-1|$ δεν βγαίνει ούτε $f(x)$ ούτε $-f(x)$. Άρα η f δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

iv. $D_{f_4} = \mathbb{R}$, για κάθε $x \in D_{f_4}$ είναι και $-x \in D_{f_4}$. Επίσης :
$f_4(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^5 = -x^3 + 3x^5 = -(x^3 - 3x^5) = -f_4(x)$ για κάθε $x \in D_{f_4}$. Άρα η f είναι περιττή.

v. Πρέπει $1 + x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ άρα $D_{f_5} = \mathbb{R} - \{-1\}$, για κάθε $x \in D_{f_5}$ δεν είναι και $-x \in D_{f_5}$ καθώς αν $x = 1 \in D_{f_5}$, το $x = -1 \notin D_{f_5}$. Άρα η f δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή καθώς το πεδίο ορισμού της δεν είναι συμμετρικό ως προς το 0.

vi. Πρέπει $x^2 + 1 \neq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \Re$, άρα $D_{f_6} = \mathbb{R}$, για κάθε $x \in D_{f_6}$ είναι και $-x \in D_{f_6}$. Επίσης : $f_6(-x) = \dfrac{2(-x)}{(-x)^2+1} = \dfrac{-2x}{x^2+1} = -\dfrac{2x}{x^2+1} = -f_6(x)$. Άρα η f είναι περιττή.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

58. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.
Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$

i. Αν η f είναι άρτια, τότε για κάθε x∈A, είναι f(-x)=……………………
ii. Αν η f είναι περιττή, τότε για κάθε x∈A, είναι f(-x)=……………………
iii. Αν η f είναι περιττή και 0∈A, τότε f(0)=……….
iv. Αν η f είναι άρτια, τότε η C_f έχει ………………… συμμετρίας …………..
v. Αν η f είναι περιττή, τότε η C_f έχει ……………… συμμετρίας ……………

59. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

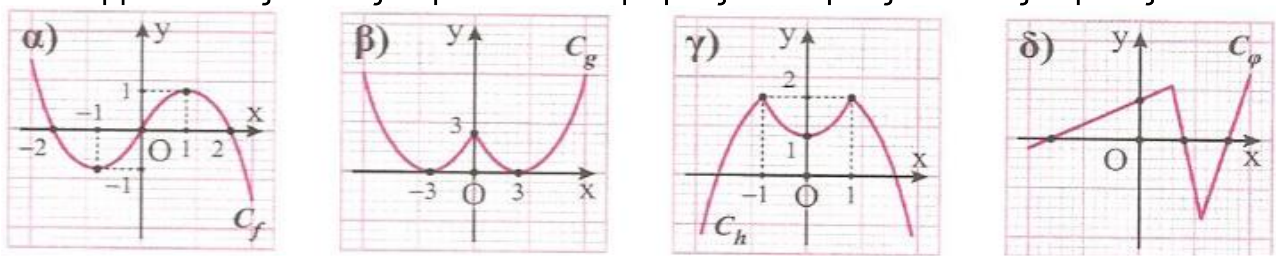
i. Αν μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι περιττή, τότε f(x)+f(-x)=0, για κάθε x∈A.
ii. Αν για μια συνάρτηση f: R→R ισχύει, f(x)-f(-x)=0, για κάθε x∈R, τότε η f είναι άρτια.
iii. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y, τότε είναι περιττή.
iv. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η f δεν είναι άρτια.

60. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

i. Η συνάρτηση $f : (-1,1] \to \mathbb{R}$ με f(x)=x^2 είναι άρτια.
ii. Η συνάρτηση f(x) = x^3 είναι περιττή.
iii. Αν μια συνάρτηση $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ είναι περιττή, τότε α+β=0
iv. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=|x| έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

61. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές.



62. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές.

i. $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5$ ii. $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 2x$

iii. $f(x) = |2x-1| - |2x+1|$ iv. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

63. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}+3}{x}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και στη συνέχεια να δείξετε ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας το Ο(0,0).

64. Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι άρτιες ούτε περιττές.

i. $f : (-3, 4) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ ii. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ iii. $f(x) = x^2 + x$

65. Δίνεται η περιττή συνάρτηση : $f(x)=\alpha x^2+(\alpha-2)x^3+(\alpha-1)x$.

i. Να δείξετε ότι $\alpha=0$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f(x)<3$.

iv. Να βρείτε τα $\kappa,\lambda\in\Re$, ώστε τα σημεία $\mathrm{A}(-\kappa,\lambda)$ και $\mathrm{B}(\kappa,\,36-3\lambda)$ να ανήκουν στη γραφική παράσταση της f.

67. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

iii. Να δείξετε ότι η f έχει ελάχιστο στο $x_0=1$.

68. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^3-3x}{x^2+\alpha|x|}$ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(-1,-2)$.

i. Να δείξετε ότι $\alpha=-2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

iii. Να λύσετε την ανίσωση : $x^2\le\dfrac{f(999)}{f(-999)}x$.

66. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε την τιμή $f(0)$ ii. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

2.2 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ – ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

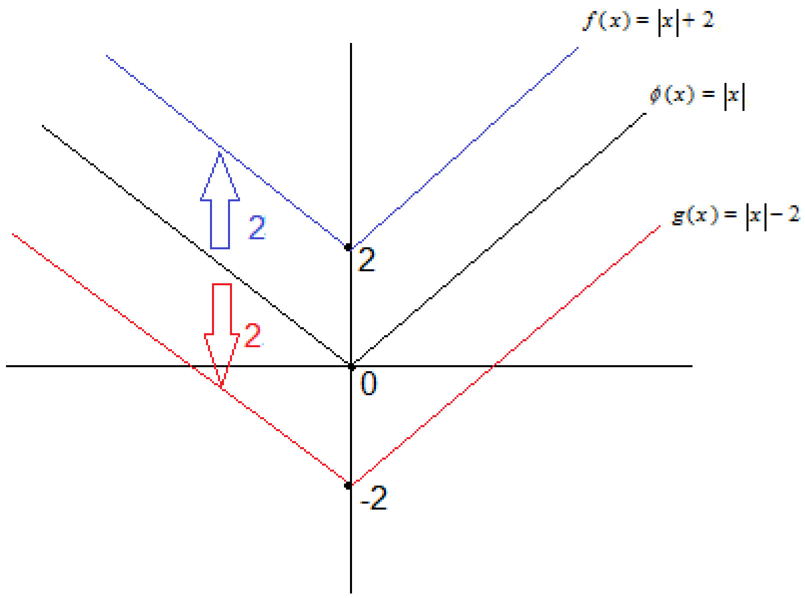
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με $f(x)=\phi(x)+c$, όπου $c>0$, προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα πάνω.

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με $f(x)=\phi(x)-c$, όπου $c>0$, προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα κάτω.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 45 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :
$\phi(x)=|x|$, $f(x)=|x|+2$, $g(x)=|x|-2$

Λύση :
Οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Τονίζουμε ότι : η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=|x|+2$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x)=|x|$, κατά 2 μονάδες προς τα πάνω. Ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=|x|-2$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x)=|x|$, κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.



ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με $f(x)=\phi(x-c)$, όπου $c>0$, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα δεξιά.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με $f(x)=\phi(x+c)$, όπου $c>0$, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα αριστερά.

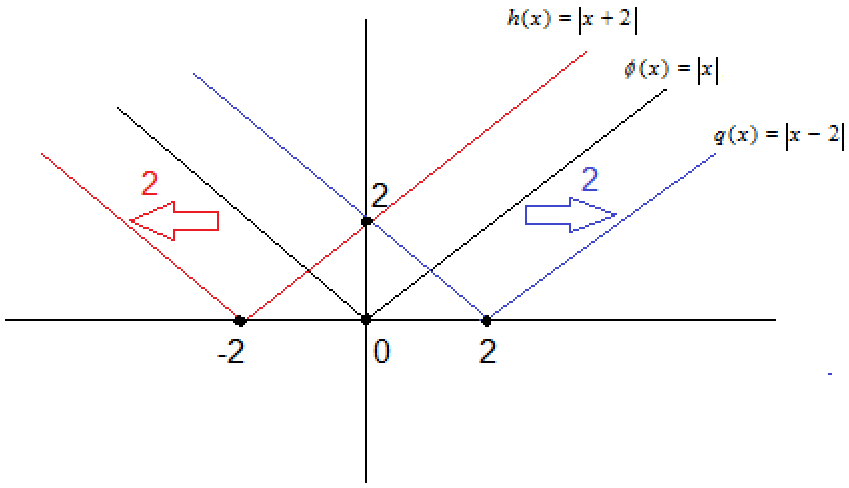
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

2. (Άσκηση 2 σελ. 45 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

$\phi(x)=|x|$, $h(x)=|x+2|$, $q(x)=|x-2|$

Λύση :

Οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Τονίζουμε ότι : η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=|x+2|$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x)=|x|$, κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά. Ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $q(x)=|x-2|$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x)=|x|$, κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.



ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΣΥΝΔΙΑΣΜΟΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

- Αν έχω $f(x)=\phi(x-c)+\kappa$, μετατοπίζω τη γραφική παράσταση της φ κατά c μονάδες προς τα δεξιά και κ μονάδες πάνω
- Αν έχω $f(x)=\phi(x-c)-\kappa$, μετατοπίζω τη γραφική παράσταση της φ κατά c μονάδες προς τα δεξιά και κ μονάδες κάτω
- Αν έχω $f(x)=\phi(x+c)+\kappa$, μετατοπίζω τη γραφική παράσταση της φ κατά c μονάδες προς τα αριστερά και κ μονάδες πάνω
- Αν έχω $f(x)=\phi(x+c)-\kappa$, μετατοπίζω τη γραφική παράσταση της φ κατά c μονάδες προς τα αριστερά και κ μονάδες κάτω

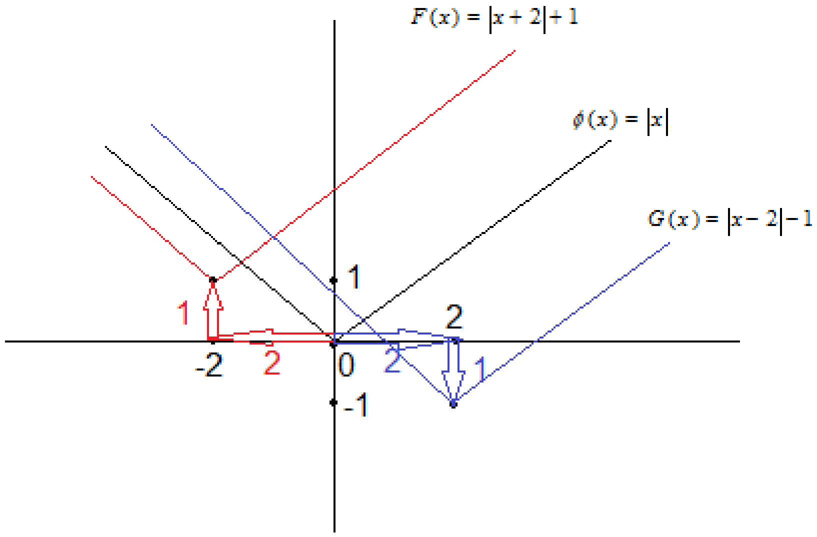
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3. (Άσκηση 3 σελ. 45 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

$\phi(x)=|x|$, $F(x)=|x+2|+1$, $G(x)=|x-2|-1$

Λύση :

Οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Τονίζουμε ότι : η γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=|x+2|+1$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x)=|x|$, κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και 1 μονάδα προς τα πάνω. Ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $G(x)=|x-2|-1$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x)=|x|$, κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και 1 μονάδα προς τα κάτω.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:
f(x)=|x| g(x)=|x|+3 h(x)=|x|-3

5. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:
f(x)=|x| g(x)=|x-2| h(x)=|x+3|

6. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:
φ(x)=|x| f(x)=|x-2|+1 g(x)=|x+3|-2

7. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:
f(x)=|x| g(x)=|x-1|+2 h(x)=|x+3|-4 φ(x)= -|x-1|+3

8. Να βρείτε ποιες μεταφορές έχουν γίνει στη συνάρτηση f ώστε να προκύψει η συνάρτηση g στις παρακάτω περιπτώσεις :
i. $g(x) = f(x-1)+2$ ii. $g(x) = f(x+2)+3$ iii. $g(x) = f(x+3)-5$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4x$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δυο διαφορετικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της f :

i. κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και 3 μονάδες προς τα πάνω
ii. κατά 4 μονάδες προς τα δεξιά και 2 μονάδες προς τα κάτω
iii. κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και 1 μονάδα προς τα πάνω
iv. κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και 5 μονάδα προς τα κάτω

10. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} |x+2|-1 & x\in[-4,-1) \\ x^2-1 & x\in[-1,2] \\ \dfrac{6}{x} & x\in(2,+\infty) \end{cases}$

i. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.
ii. Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f.
iii. Να βρείτε τα ακρότατα της f.

11. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:
f(x)=|x|-1 και g(x)=1-|x| και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και C_g.

12. i. Να λύσετε την εξίσωση |x-2|=|x+1|
ii. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: f(x)=|x-2| και g(x)=|x+1|
iii. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση |x-2|<|x+1| και να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα προηγούμενα συμπεράσματα.

13. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=3x^2-4x+5$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δυο διαδοχικές μετατοπίσεις της C_φ :

i. κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά,
ii. κατά 3 μονάδες προς τα κάτω,
iii. διαδοχικά κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και 3 μονάδες προς τα πάνω,
iv. διαδοχικά κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και 7 μονάδες προς τα κάτω.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΟ 2$^{\text{Ο}}$ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

2.1 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ - ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 1 14971

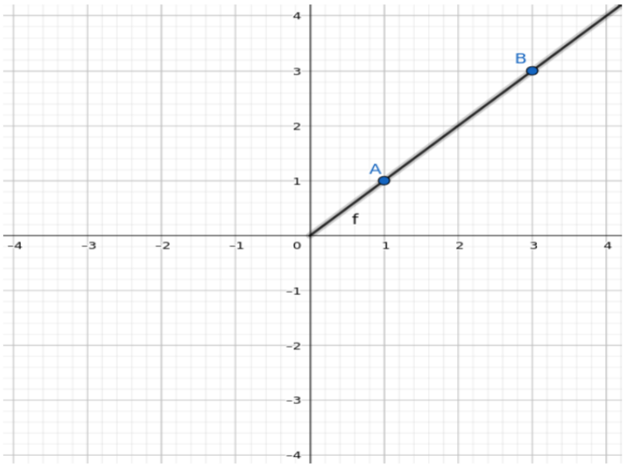
Δίνονται τα σημεία Α(1,1), Β(3,3).

α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις επόμενες ιδιότητες θα μπορούσε και ποιες δε θα μπορούσε να έχει μια συνάρτηση f, που ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα Α και Β.

i) είναι σταθερή συνάρτηση **ii)** είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

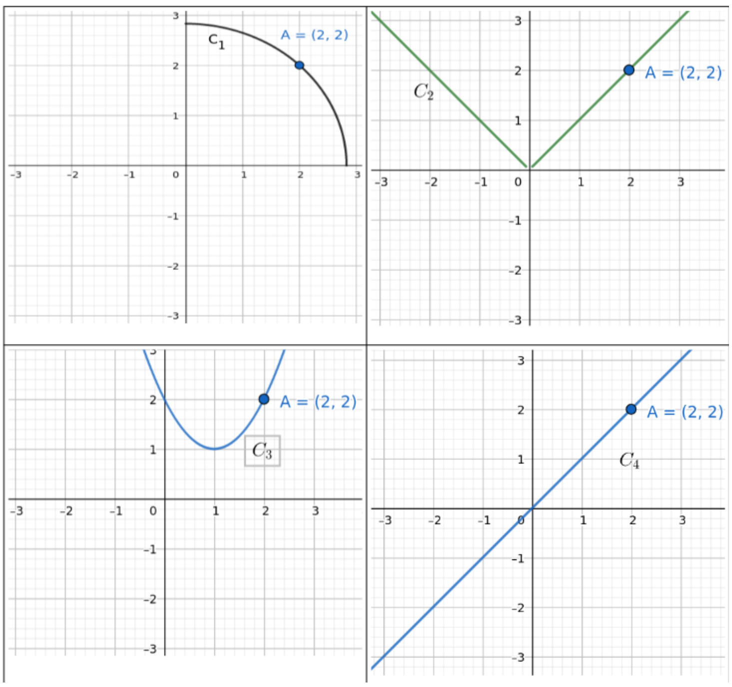
(Μονάδες 12)

β) Να συμπληρώσετε την παρακάτω γραφική παράσταση μιας συνάρτηση f, η οποία διέρχεται από τα Α, Β και είναι περιττή. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2 14976

Δίνονται τα παρακάτω σχήματα



α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις C_1,C_2,C_3,C_4 αναπαριστούν άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, ποιες όχι και γιατί. Δίνεται ότι τουλάχιστον μια είναι άρτια και τουλάχιστον μια είναι περιττή. (Μονάδες 12)

β) Για τις συναρτήσεις C_2,C_4 να βρείτε την τεταγμένη του σημείου τους Β(–2,κ), αιτιολογώντας την τιμή που βρήκατε από την ιδιότητα συμμετρίας καθεμίας συνάρτησης. (Μονάδες 13)

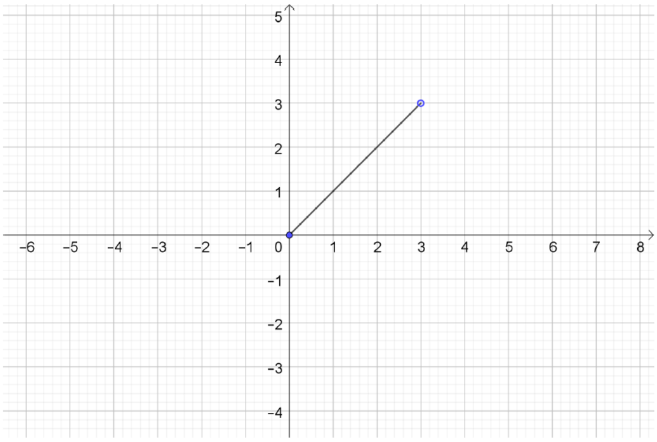
ΘΕΜΑ 3 15017

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα (α,3) είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο (2,2).

α) Να βρείτε την τιμή του α. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $f(-2)$. (Μονάδες 8)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα [0,3). Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 10)



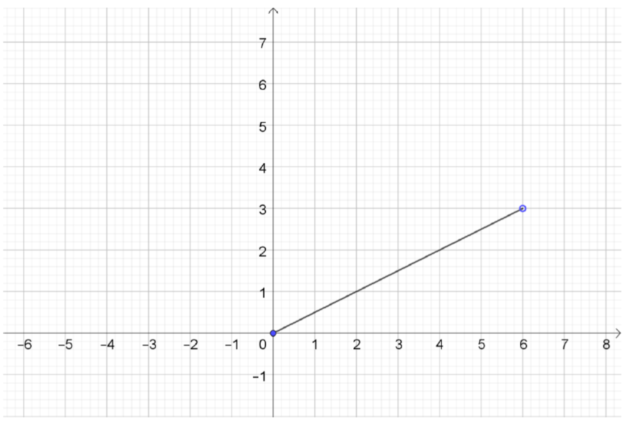
ΘΕΜΑ 4 15018

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα (α,6) είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο (4,2).

α) Να βρείτε την τιμή του α. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $f(-4)$. (Μονάδες 8)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα [0,6). Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 5 15019

Δίνεται μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(-1)=2$ και $f(1)=0$. Να αιτιολογήσετε (αλγεβρικά ή γραφικά)

α) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι άρτια. (Μονάδες 8)

β) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι περιττή. (Μονάδες 8)

γ) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 9)

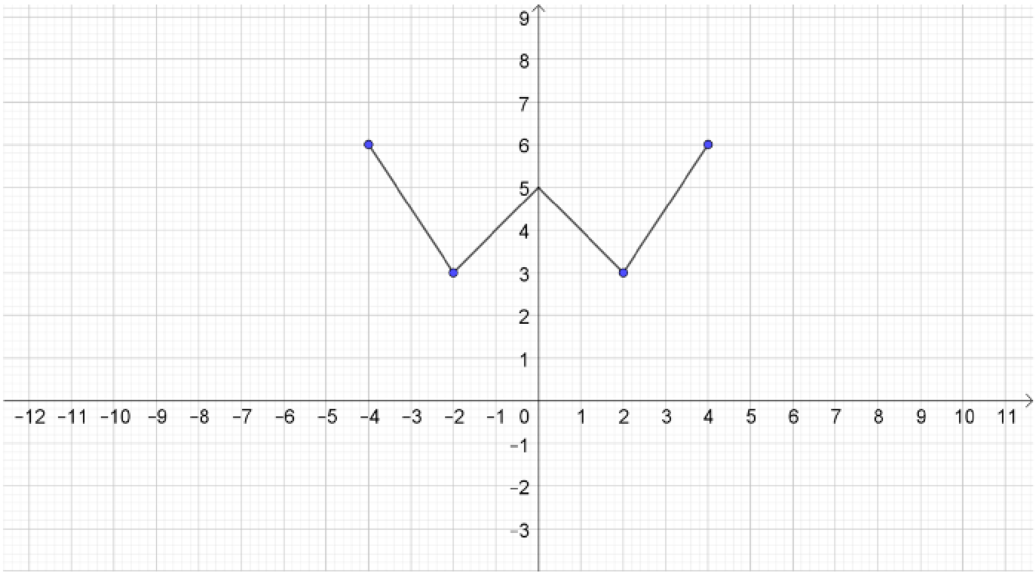
ΘΕΜΑ 6 15024

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το [–4,4] φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια. (Μονάδες 8)

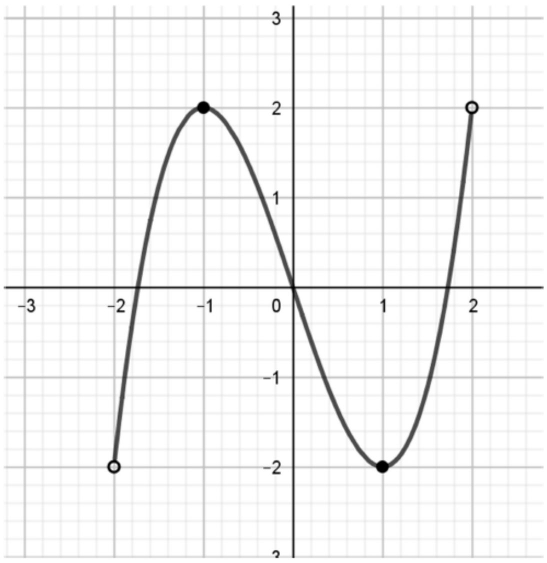
β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και για ποιες τιμές του x τις παρουσιάζει. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 7 15112

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το (–2,2).



α) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

β) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών. (Μονάδες 10)

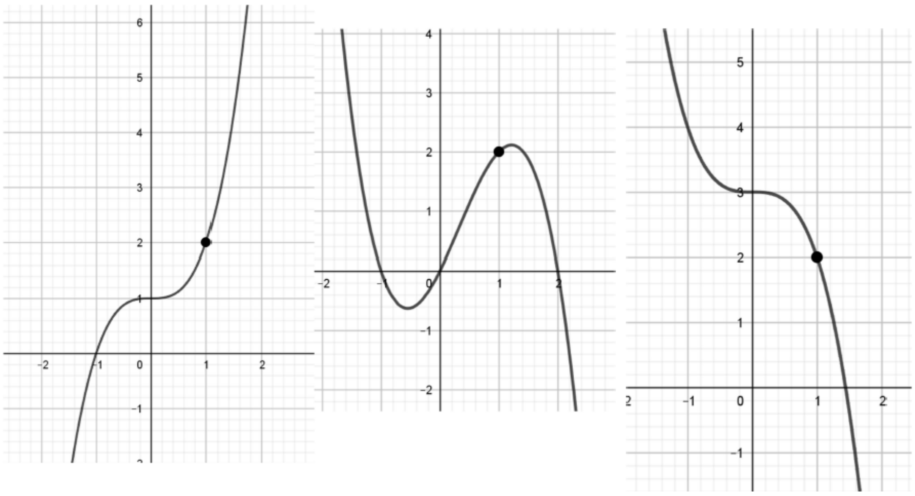
ΘΕΜΑ 8 15114

Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο IR με σύνολο τιμών το IR της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,2).

α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο Β(2,9); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

i. ii. iii.



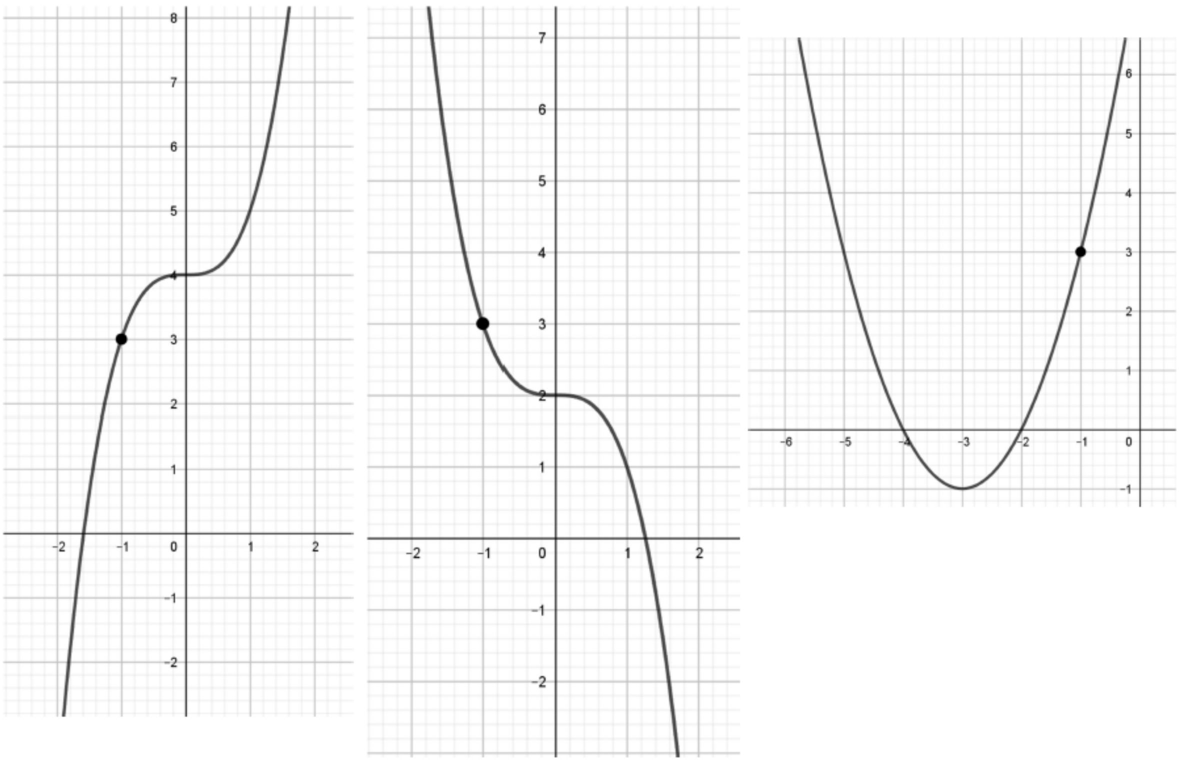
ΘΕΜΑ 9 15115

Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(–1,3).

α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο Β(2,5); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

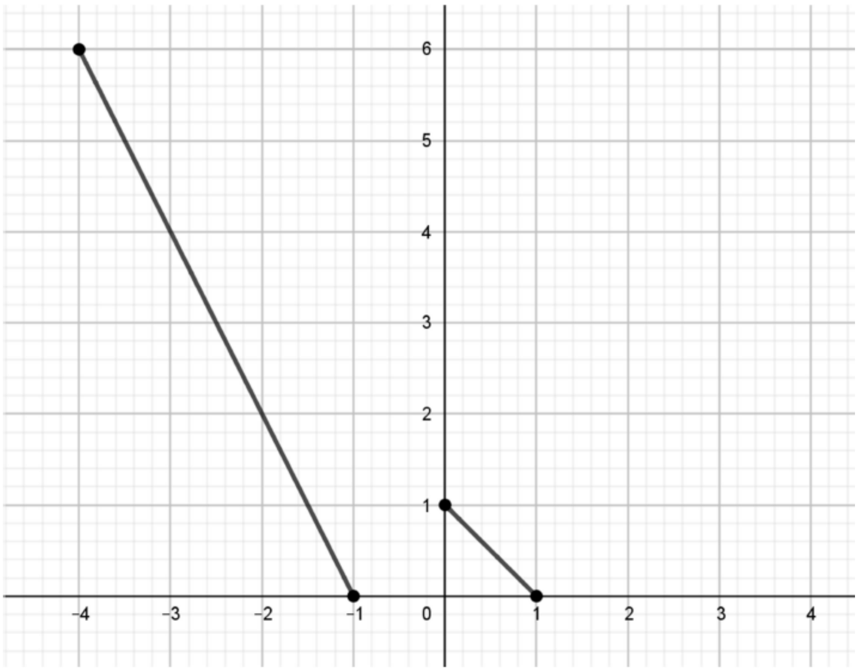
β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

i. ii. iii.



ΘΕΜΑ 10 15116

Στο διπλανό σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f με πεδίου ορισμού το διάστημα [–4,4].



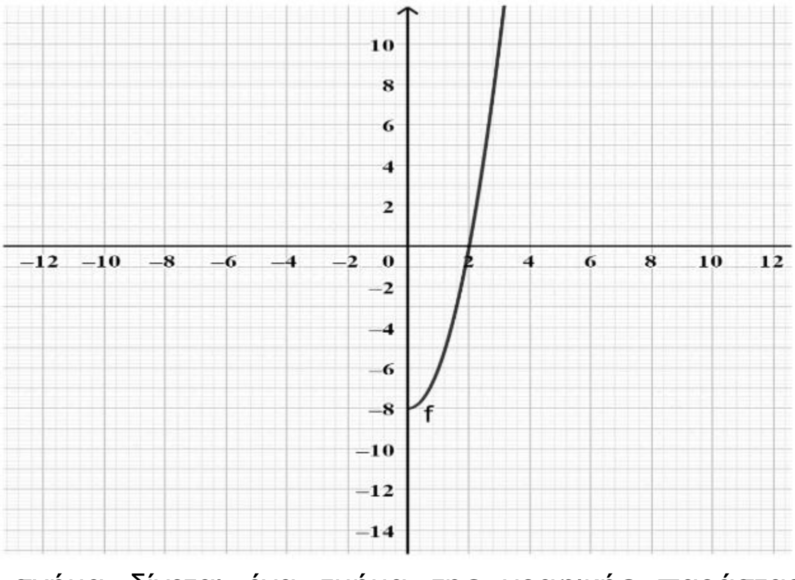
α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της f. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε

i) τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ii) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 11 15372



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται ένα τμήμα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ l.

α) Να μεταφέρεται το σχήμα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση με το κομμάτι της καμπύλης που λείπει. Να αιτιολογήσετε την απάντησής σας. (Μονάδες 10)

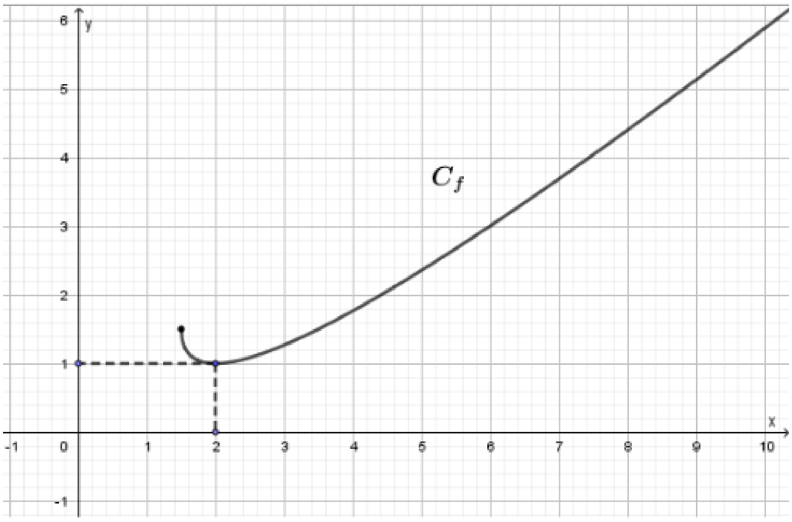
β) Να βρείτε:

i. Τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f. (Μονάδες 8)

ii. Το είδος του ακροτάτου και τη θέση που το παρουσιάζει. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 12 15437

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \sqrt{2x-3}$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης, καθώς και τη θέση αυτού. (Μονάδες 8)

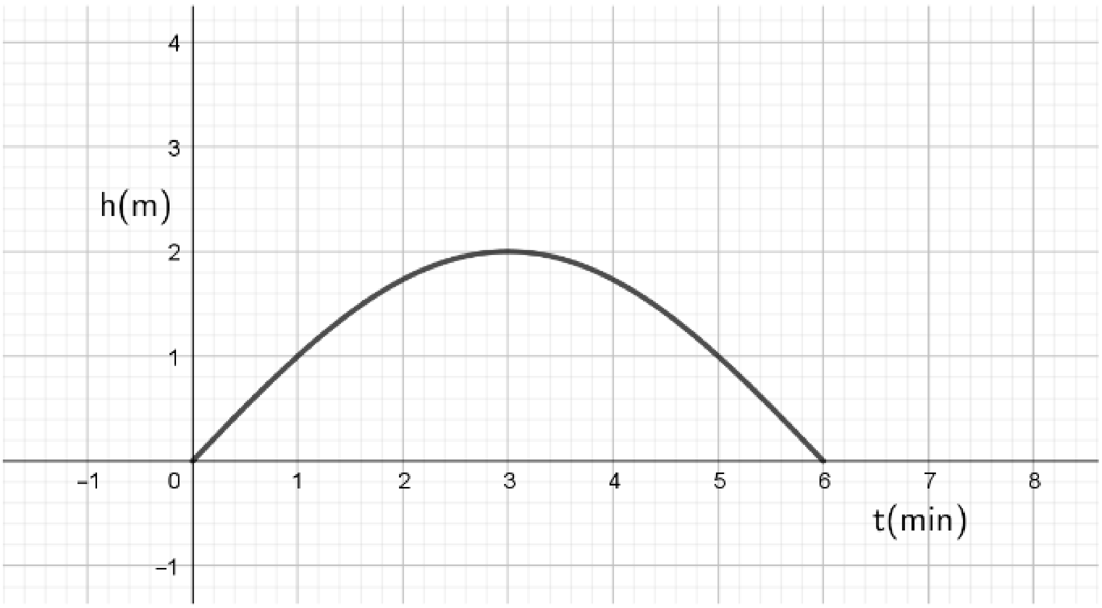
γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι

I. γνησίως φθίνουσα (Μονάδες 5)

II. γνησίως αύξουσα (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 13 15645

Αντικείμενο κινείται κατακόρυφα. Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά το ύψος h του αντικειμένου από το έδαφος για κάθε χρονική στιγμή t. Να βρείτε:



α) Ποιες χρονικές στιγμές το αντικείμενο απέχει 1m από το έδαφος. (Μονάδες 5)

β) Ποια είναι η μέγιστη απόσταση του αντικειμένου από το έδαφος και ποια χρονική στιγμή την επιτυγχάνει. (Μονάδες 10)

γ) Ποιο χρονικό διάστημα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 14 16129

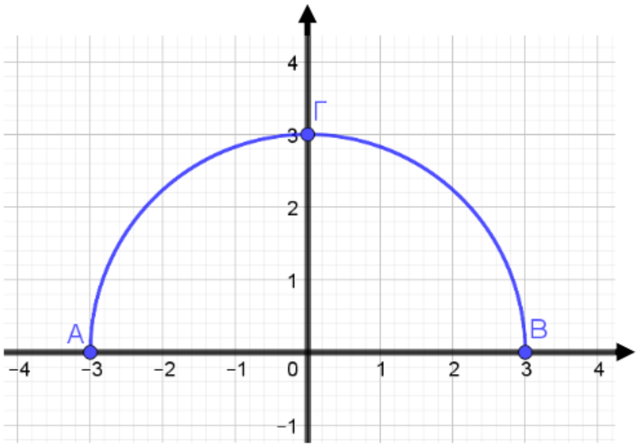
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f(x).

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f και τις θέσεις των ακροτάτων.

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 15 15022

Θεωρούμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα [–3,3]. Η συνάρτηση f είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [–3,0] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0,3].

α) Να αποδείξετε ότι $f(-1)<f(2)$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(3)\ge f(x)\ge f(0)$ για κάθε $x\in[-3,3]$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο και να βρείτε τις θέσεις μεγίστου και ελαχίστου.. (Μονάδες 6)

δ) Παρακάτω δίνονται 4 τύποι, από τους οποίους ένας μόνο μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f. Να επιλέξετε το σωτό τύπο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ **β.** $f(x)=-\sqrt{9-x^2}$ **γ.** $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ **δ.** $f(x)=-\sqrt{x^2-9}$

(Μονάδες 6)

2.2 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ – ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

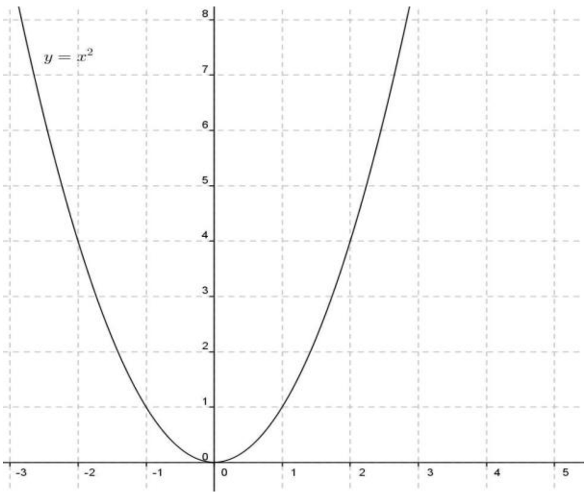
ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 16 14230

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+5$, $x\in\mathbb{R}$.

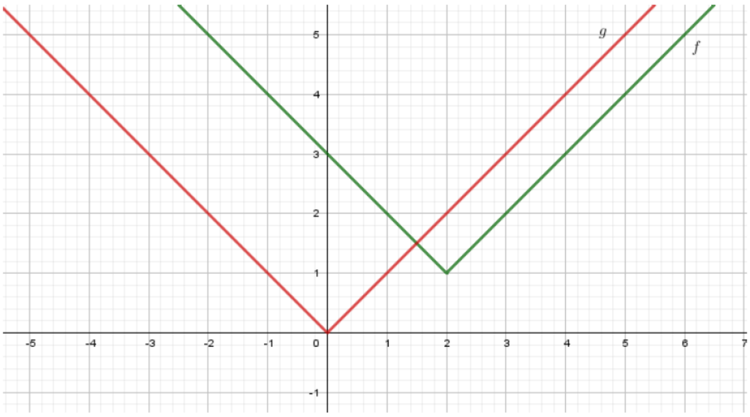
α) Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x)=\left(x-2\right)^2+1$ (Μονάδες 10)

β) Να αναφέρετε τις μετατοπίσεις της $y=x^2$ ώστε να προκύψει η γραφική παράσταση της συνάρτηση f, την οποία και να χαράξετε στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί. (Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 17 14325

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g, που ορίζονται στους πραγματικούς αριθμούς. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση.



Από τις γραφικές παραστάσεις να βρείτε:

α) Τα διαστήματα μονοτονίας της f, το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του. (Μονάδες 15)

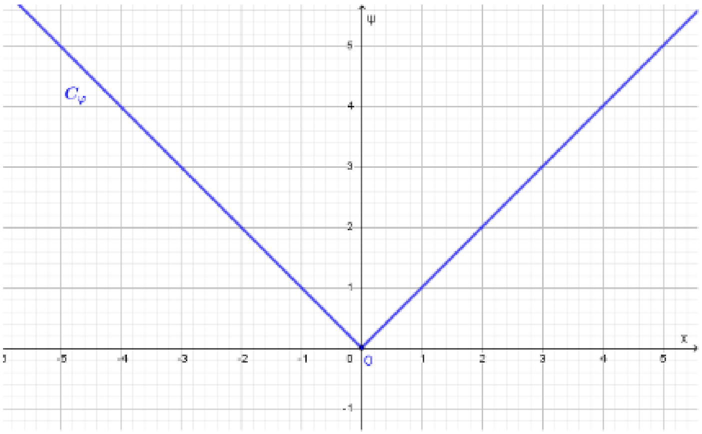
β) Αν $g(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$ να επιλέξετε ποιος από τους παρακάτω είναι ο τύπος της συνάρτησης f. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

$f(x)=|x+2|+1$ $\quad$ $f(x)=|x-2|-1$ $\quad$ $f(x)=|x+2|-1$ $\quad$ $f(x)=|x-2|+1$

(Μονάδες 10)

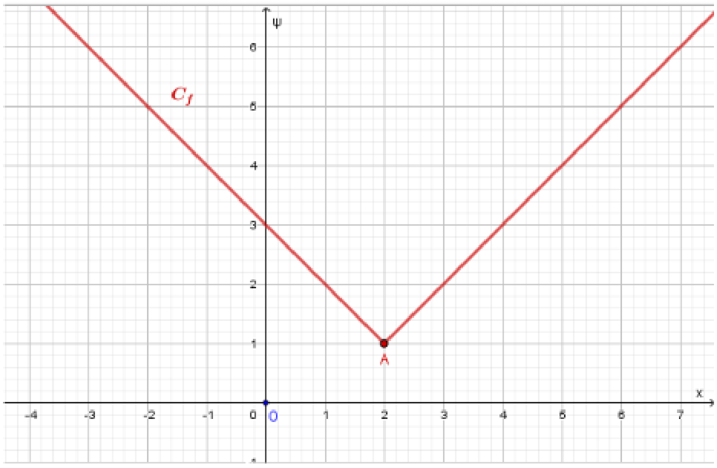
ΘΕΜΑ 18 14972

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$ με γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα. Επιπλέον οι συναρτήσεις $g(x)=|x-2|$, $x\in\mathbb{R}$ και $f(x)=|x-2|+1$, $x\in\mathbb{R}$.



α) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις g, f και να εξηγήσετε πως προκύπτουν μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της φ. (Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f, η οποία δίνεται παρακάτω, να βρείτε:



i. Τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια αύξουσα και γνήσια φθίνουσα. (Μονάδες 6)

ii. Το ολικό ακρότατο της f και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι; (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 19 14983

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{1}{3}x^2$, $x\in\mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) η οποία προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της g(x) κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μετά κατά μια μονάδα προς τα πάνω.

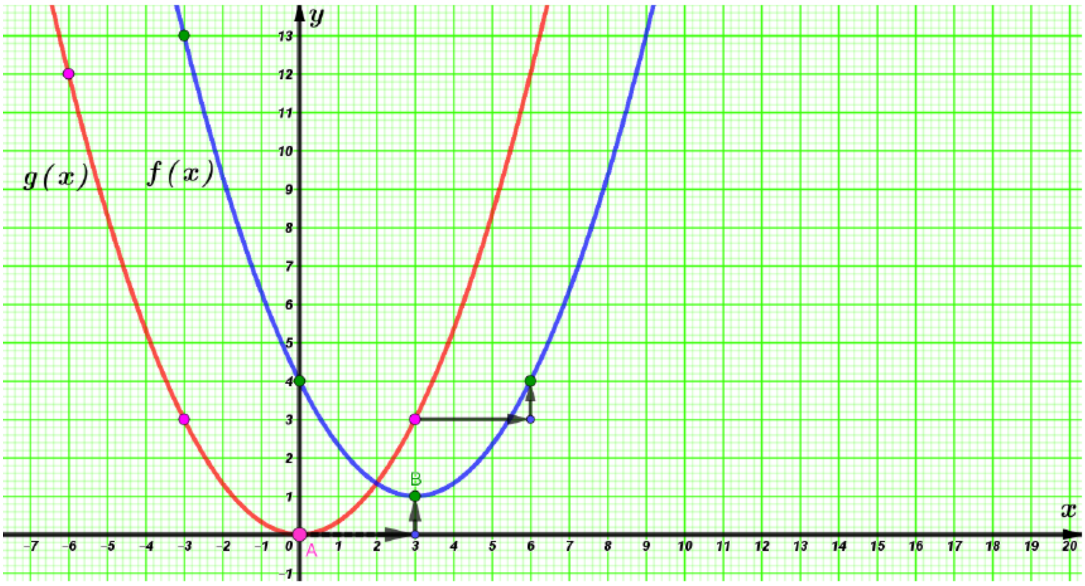
α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση όσον αφορά τον τύπο της f(x).

i) $f(x)=g(x+3)+1$ **ii)** $f(x)=g(x+3)-1$

iii) $f(x)=g(x-3)+1$ **iv)** $f(x)=g(x-3)-1$ (Μονάδες 9)

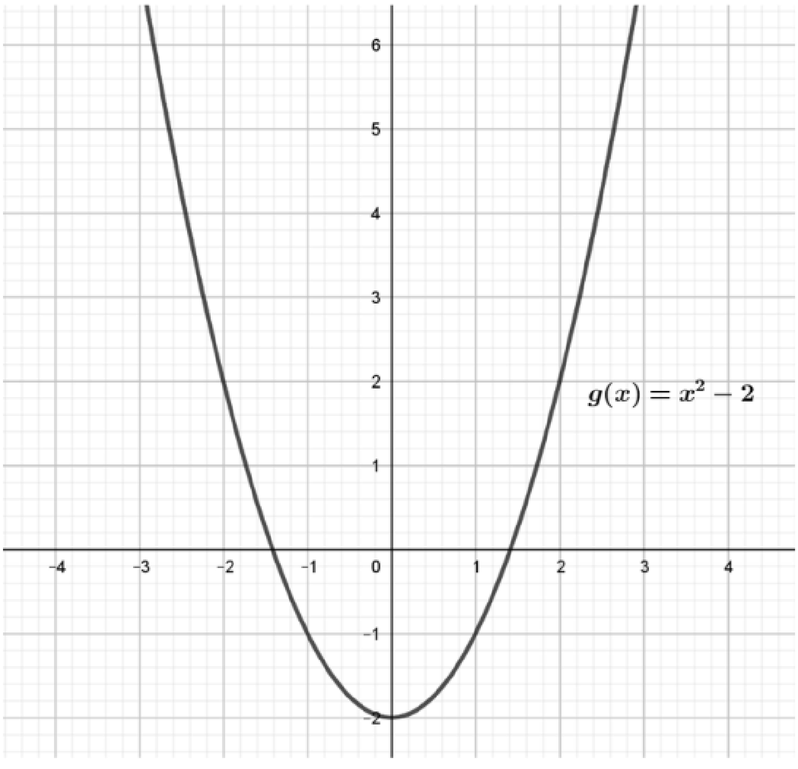
β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f(x) και την θέση ελαχίστου. (Μονάδες 8)

γ) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 20 15811

Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$.



α) Με βάση τη γραφική της παράσταση,

- **i)** να αιτιολογήσετε γιατί η g είναι άρτια. (Μονάδες 9)
- **ii)** να βρείτε το ελάχιστο της g και τη θέση αυτού. (Μονάδες 7)

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 21 14293

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

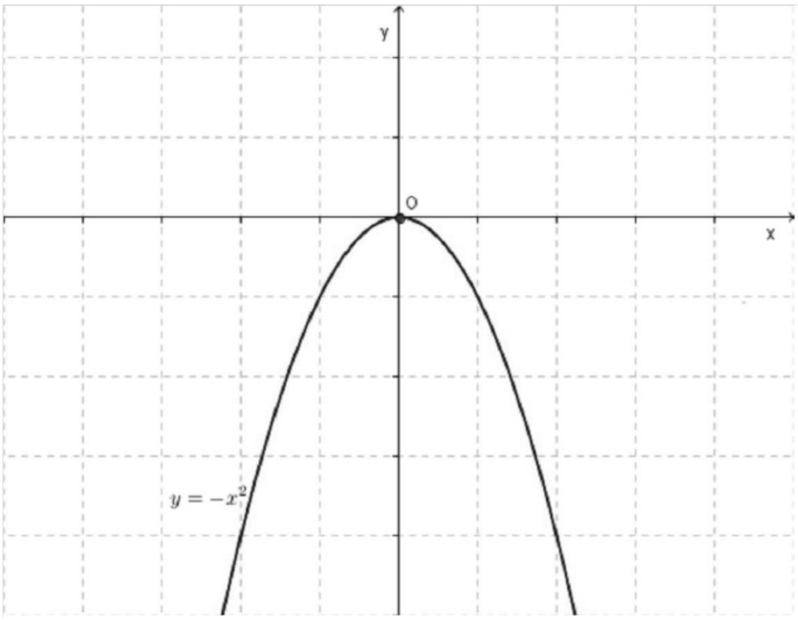
α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f. (Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. (Μονάδες 5)

ii. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του. (Μονάδες 5)

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa < 2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 22 14973

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να ελέγξετε αν η συνάρτηση φ είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση. (Μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3(x-1)^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης f. (Μονάδες 6)

ii. Το ολικό ακρότατο της f και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι; (Μονάδες 4)

iii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας με εξίσωση $y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ. (Μονάδες 7)

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2ΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1Ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+4x^3+3x$.

i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.
ii. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f(x^2)>f(1)$.
iv. Να λύσετε την ανίσωση : $f(x)<8$.
v. Να λύσετε την ανίσωση : $f\left(f(x)-8\right)>0$.
vi. Να λύσετε την ανίσωση : $x^5+3x<8-4x^3$.

ΘΕΜΑ 2Ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-8x^2+17$.

i. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
ii. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο το 1. Στη συνέχεια να βρείτε ποια είναι η θέση ελαχίστου;

ΘΕΜΑ 3Ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\lambda}{x}-\sqrt{x}$. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(4,1)$.

i. Να δείξετε ότι $\lambda=12$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
iii. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

ΘΕΜΑ 4Ο

Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(1,5)$ και $\mathrm{B}(3,2)$.

i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.
ii. Να λύσετε την ανίσωση : $2<f\left(|x-2|\right)<5$.
iii. Να λύσετε την ανίσωση : $\left(f(10)-f(7)\right)x<f(7)-f(10)$.
iv. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\Re$ ισχύει ότι : $2f(\alpha)>f(\alpha+1)+f(\alpha+2)$.

ΘΕΜΑ 5Ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\sqrt{\alpha-x}-3x$. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(-5,18)$.

i. Να δείξετε ότι $\alpha=4$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f.
ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
iii. Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο, το οποίο και να βρείτε.
iv. Για οποιαδήποτε $\alpha,\beta\in\mathrm{A}$ να αποδείξτε ότι : $\dfrac{f(\alpha)}{6}+\dfrac{f(\beta)}{4}+5\geq 0$
v. Αν $\kappa<0<\lambda\leq 4$, να αποδείξετε ότι : $f(\kappa)f(\lambda)+4<2\left(f(\kappa)+f(\lambda)\right)$.

ΘΕΜΑ 6ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\sqrt{4-\sqrt{\lambda-x}}+x+16$. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(-7,10)$.

i. Να δείξετε ότι $\lambda=2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

iii. Να βρείτε τα ακρότατα της f.

iv. Για οποιαδήποτε $\alpha,\beta\in \mathrm{A}$ να αποδείξτε ότι : $|3f(\alpha)-2f(\beta)-11|\leq 45$

ΘΕΜΑ 7ο

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι γνησίως μονότονη, ισχύει : $f\left(\sqrt{2}-1\right)<f\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(2,-3)$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Αν ισχύει $f\left(\alpha^2\right)<f(8\alpha)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2+(\alpha-2)x+\alpha+1=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

iii. Για κάθε $\kappa,\lambda\in(2,+\infty)$, να αποδείξετε ότι : $f(\kappa)+f(\lambda)+6<0$.

iv. Δίνεται η εξίσωση : $x^2-(\lambda+2)x+\lambda=0$ (1). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

v. Έστω x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1). Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει : $f\left(x_1^2+x_2^2-10\right)>x_1x_2-x_1-x_2-1$.

ΘΕΜΑ 8ο

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, γνησίως μονότονη, για την οποία ισχύει : $f\left(\frac{2017}{2016}\right)<f\left(\frac{2018}{2019}\right)$.

i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

ii. Να αποδείξετε ότι : $f(x)+f(5x)>f(3x)+f(7x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

iii. Να αποδείξετε ότι : $f(x)+f(x^5)<f(x^3)+f(x^7)$ για κάθε $x\in(0,1)$.

ΘΕΜΑ 9ο

Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη, περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(-2,\lambda)$ και $\mathrm{B}(2,8-3\lambda)$.

i. Να αποδείξετε ότι $\lambda=4$.

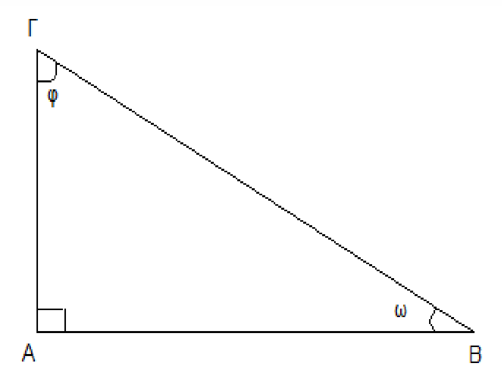
ii. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f\left(x^2-x\right)>-4$.

iv. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $g(x)=f\left(|2x-5|-3\right)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

3.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ



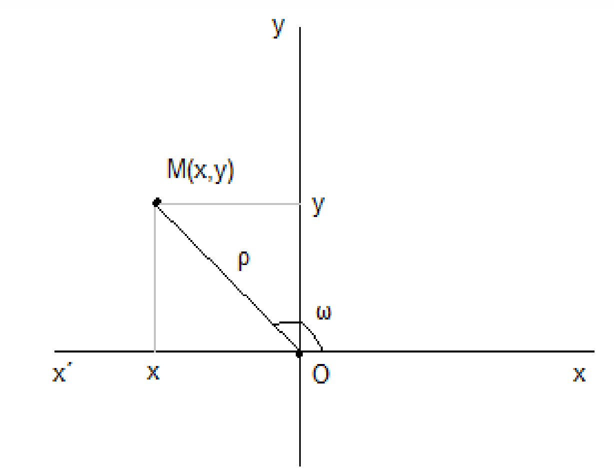
$$\eta\mu\omega = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{A\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\_\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta}{\Upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Pi\rho o\sigma\kappa\acute{\alpha}\mu\varepsilon\nu\eta\_\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta}{\Upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}$$

$$\varepsilon\phi\omega = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{A\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\_\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta}{\Pi\rho o\sigma\kappa\acute{\alpha}\mu\varepsilon\nu\eta\_\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta}$$

$$\sigma\phi\omega = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\Pi\rho o\sigma\kappa\acute{\alpha}\mu\varepsilon\nu\eta\_\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta}{A\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\_\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΥΧΑΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ



$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$$ όπου $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\varepsilon\phi\omega = \frac{y}{x}$$ η απόσταση του Μ από

$$\sigma\phi\omega = \frac{x}{y}$$ την αρχή των αξόνων Ο

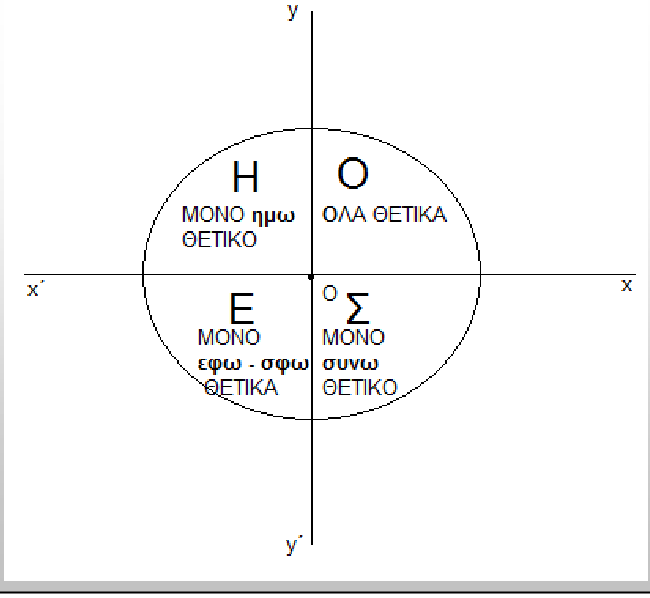
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Για έναν σύντομο κατά προσέγγιση υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών χρησιμοποιούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο, ο κύκλος δηλ. που έχει κέντρο Ο και ρ=1. Σύμφωνα με τα παραπάνω θα ισχύει :

- $\eta\mu\omega = y$
- $\sigma\upsilon\nu\omega = x$
- $-1 \le \eta\mu\omega \le 1$ (ή $|\eta\mu\omega| \le 1$)
- $-1 \le \sigma\upsilon\nu\omega \le 1$ (ή $|\sigma\upsilon\nu\omega| \le 1$).

ΤΑ ΠΡΟΣΗΜΑ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Από τον τριγωνομετρικό κύκλο προκύπτουν και τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

Οι γωνίες εκτός από μοίρες, μετριούνται και με ακτίνια (rad). Ένας κύκλος είναι 2π rad, οπότε προκύπτει ο τύπος που μετατρέπει τις μοίρες σε ακτίνια και αντίστροφα για μια γωνίας ω : $\frac{\mu}{180}=\frac{\alpha}{\pi}$ όπου η γωνία ω είναι μ° και α rad. π.χ. η γωνία $\omega=30^\circ$ είναι $\frac{30}{180}=\frac{\alpha}{\pi}\Leftrightarrow\frac{1}{6}=\frac{\alpha}{\pi}\Leftrightarrow 6\alpha=\pi\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{6}rad$

Έτσι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών του 1° τεταρτημορίου δίνονται από τον παρακάτω πίνακα :

Γωνία ω	$\omega=0^\circ$ ή $\omega=0rad$	$\omega=30^\circ$ ή $\omega=\frac{\pi}{6}rad$	$\omega=45^\circ$ ή $\omega=\frac{\pi}{4}rad$	$\omega=60^\circ$ ή $\omega=\frac{\pi}{3}rad$	$\omega=90^\circ$ ή $\omega=\frac{\pi}{2}rad$
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται
σφω	Δεν ορίζεται	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ΕΝΑΣ ΜΝΗΜΟΝΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ ΤΟΥ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΠΙΝΑΚΑ

1ο ΒΗΜΑ : Αρχικά γραφούμε :

Γωνία ω	$\omega = 0°$ ή $\omega = 0rad$	$\omega = 30°$ ή $\omega = \frac{\pi}{6}rad$	$\omega = 45°$ ή $\omega = \frac{\pi}{4}rad$	$\omega = 60°$ ή $\omega = \frac{\pi}{3}rad$	$\omega = 90°$ ή $\omega = \frac{\pi}{2}rad$
ημω	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$	$\frac{\sqrt{\ }}{2}$
συνω					
εφω					
σφω					

2ο ΒΗΜΑ : Συμπληρώνουμε κάτω από τις ρίζες κατά σειρά τους αριθμούς 0, 1, 2, 3, 4 και υπολογίζουμε το κάθε αποτέλεσμα.

Γωνία ω	$\omega = 0°$ ή $\omega = 0rad$	$\omega = 30°$ ή $\omega = \frac{\pi}{6}rad$	$\omega = 45°$ ή $\omega = \frac{\pi}{4}rad$	$\omega = 60°$ ή $\omega = \frac{\pi}{3}rad$	$\omega = 90°$ ή $\omega = \frac{\pi}{2}rad$
ημω	$\frac{\sqrt{0}}{2} = \frac{0}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$
συνω					
εφω					
σφω					

3ο ΒΗΜΑ : Οι τιμές του συνω είναι «ανάποδες» από τις τιμές του ημω

Γωνία ω	$\omega = 0°$ ή $\omega = 0rad$	$\omega = 30°$ ή $\omega = \frac{\pi}{6}rad$	$\omega = 45°$ ή $\omega = \frac{\pi}{4}rad$	$\omega = 60°$ ή $\omega = \frac{\pi}{3}rad$	$\omega = 90°$ ή $\omega = \frac{\pi}{2}rad$
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφω					
σφω					

4ο ΒΗΜΑ : Για την εφω ισχύει : $\varepsilon\phi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ άρα :

Γωνία ω	$\omega = 0°$ ή $\omega = 0 rad$	$\omega = 30°$ ή $\omega = \frac{\pi}{6} rad$	$\omega = 45°$ ή $\omega = \frac{\pi}{4} rad$	$\omega = 60°$ ή $\omega = \frac{\pi}{3} rad$	$\omega = 90°$ ή $\omega = \frac{\pi}{2} rad$
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφω	$\frac{0}{1} = 0$	$\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$	$\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$	$\frac{1}{0} = -$ δεν ορίζεται
σφω					

5ο ΒΗΜΑ : Οι τιμές της εφω είναι «ανάποδες» από τις τιμές της σφω

Γωνία ω	$\omega = 0°$ ή $\omega = 0 rad$	$\omega = 30°$ ή $\omega = \frac{\pi}{6} rad$	$\omega = 45°$ ή $\omega = \frac{\pi}{4} rad$	$\omega = 60°$ ή $\omega = \frac{\pi}{3} rad$	$\omega = 90°$ ή $\omega = \frac{\pi}{2} rad$
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	δεν ορίζεται
σφω	δεν ορίζεται	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ $0°, 90°, 180°, 270°$ ή $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

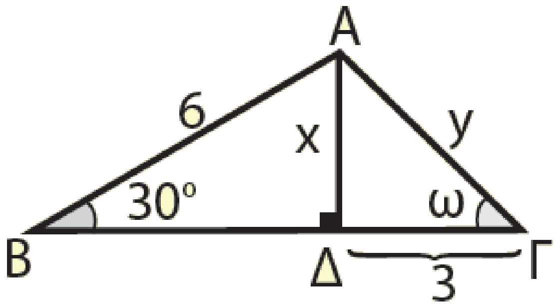
- $\eta\mu 0° = 0$, $\eta\mu 90° = 1$, $\eta\mu 180° = 0$, $\eta\mu 270° = -1$
- $\sigma\upsilon\nu 0° = 1$, $\sigma\upsilon\nu 90° = 0$, $\sigma\upsilon\nu 180° = -1$, $\sigma\upsilon\nu 270° = 0$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ «ΜΕΓΑΛΩΝ» ΓΩΝΙΩΝ

- $\eta\mu(\kappa \cdot 360° + \theta) = \eta\mu\theta$ ή σε ακτίνια $\eta\mu(2\kappa\pi + \theta) = \eta\mu\theta$
- $\sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot 360° + \theta) = \sigma\upsilon\nu\theta$ ή σε ακτίνια $\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + \theta) = \sigma\upsilon\nu\theta$
- $\varepsilon\phi(\kappa \cdot 360° + \theta) = \varepsilon\phi\theta$ ή σε ακτίνια $\varepsilon\phi(2\kappa\pi + \theta) = \varepsilon\phi\theta$
- $\sigma\phi(\kappa \cdot 360° + \theta) = \sigma\phi\theta$ ή σε ακτίνια $\sigma\phi(2\kappa\pi + \theta) = \sigma\phi\theta$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 58 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τα μήκη x,y και τη γωνία ω.



Λύση :

Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο άρα : $\eta\mu B = \frac{A\Delta}{AB} \Leftrightarrow \eta\mu 30° = \frac{x}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$

Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο άρα : $\varepsilon\varphi\Gamma = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \frac{x}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1$

άρα $\omega = 45°$. Επίσης $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 45° = \frac{3}{y} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{y} \Leftrightarrow \sqrt{2}y = 6 \Leftrightarrow y = \frac{6}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{6\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} \Leftrightarrow y = \frac{6\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y = 3\sqrt{2}$

2. (Άσκηση 4 σελ. 58 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να εκφράσετε σε rad γωνία :
i. $30°$ ii. $120°$ iii. $1260°$ iv. $-1485°$

Λύση :

i. Χρησιμοποιούμε τον τύπο $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ για $\mu = 30°$ και έχω :
$\frac{30}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow 6\alpha = \pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} rad$. Άρα $\mu = 30° = \frac{\pi}{6} rad$

ii. Χρησιμοποιούμε τον τύπο $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ για $\mu = 120°$ και έχω :
$\frac{120}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow 3\alpha = 2\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} rad$. Άρα $\mu = 120° = \frac{2\pi}{3} rad$

iii. Χρησιμοποιούμε τον τύπο $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ για $\mu = 1260°$ και έχω :
$\frac{1260}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow 7 = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow \alpha = 7\pi\ rad$. Άρα $\mu = 1260° = 7\pi\ rad$

iv. Χρησιμοποιούμε τον τύπο $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ για $\mu = -1485°$ και έχω :
$\frac{-1485}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow -\frac{33}{4} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow 4\alpha = -33\pi \Leftrightarrow \alpha = -\frac{33\pi}{4}\ rad$. Άρα $\mu = -1485° = -\frac{33\pi}{4}\ rad$

3. (Άσκηση 5 σελ. 58 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να μετατρέψετε σε μοίρες γωνία :

i. $\frac{\pi}{10}rad$ ii. $\frac{5\pi}{6}rad$ iii. $\frac{91\pi}{3}rad$ iv. $100\,rad$

Λύση :

i. Γνωρίζουμε ότι $2\pi rad = 360° \Leftrightarrow \pi\ rad = 180°$

$$\frac{\pi}{10}rad = \frac{180°}{10} = 18°$$

ii. $\frac{5\pi}{6}rad = \frac{5\cdot 180}{6} = 150°$

iii. $\frac{91\pi}{3}rad = \frac{91\cdot 180}{3} = 91\cdot 60° = 5460°$

iv. Από τον τύπο $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$, για $\alpha = 100$, έχουμε :

$\frac{\mu}{180} = \frac{100}{\pi} \Leftrightarrow \mu\cdot\pi = 18000 \Leftrightarrow \mu = \frac{18000}{\pi}$ μοίρες.

4. (Άσκηση 6 σελ. 58 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας :

i. $1830°$ ii. $2940°$ iii. $1980°$ iv. $3600°$

Λύση :

i. Θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους $\eta\mu(\kappa\cdot 360° + \theta) = \eta\mu\theta$, $\sigma\upsilon\nu(\kappa\cdot 360° + \theta) = \sigma\upsilon\nu\theta$, $\varepsilon\phi(\kappa\cdot 360° + \theta) = \varepsilon\phi\theta$ και $\sigma\phi(\kappa\cdot 360° + \theta) = \sigma\phi\theta$

Αν κάνουμε τη διαίρεση $1830 : 360$ θα βρούμε πηλίκο 5 και υπόλοιπο 30.
Άρα ισχύει : $1830° = 5\cdot 360° + 30°$ οπότε έχουμε :

$$\eta\mu 1830° = \eta\mu(5\cdot 360° + 30°) = \eta\mu 30° = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 1830° = \sigma\upsilon\nu(5\cdot 360° + 30°) = \sigma\upsilon\nu 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\phi 1830° = \varepsilon\phi(5\cdot 360° + 30°) = \varepsilon\phi 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\phi 1830° = \sigma\phi(5\cdot 360° + 30°) = \sigma\phi 30° = \sqrt{3}$$

ii. Αν κάνουμε τη διαίρεση $2940 : 360$ θα βρούμε πηλίκο 8 και υπόλοιπο 60.
Άρα ισχύει : $2940° = 8\cdot 360° + 60°$ οπότε έχουμε :

$$\eta\mu 2940° = \eta\mu(8\cdot 360° + 60°) = \eta\mu 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2940° = \sigma\upsilon\nu(8\cdot 360° + 60°) = \sigma\upsilon\nu 60° = \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon\phi 2940° = \varepsilon\phi(8\cdot 360° + 60°) = \varepsilon\phi 60° = \sqrt{3}$$

$$\sigma\phi 2940° = \sigma\phi(8\cdot 360° + 60°) = \sigma\phi 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

iii. Αν κάνουμε τη διαίρεση $1980 : 360$ θα βρούμε πηλίκο 5 και υπόλοιπο 180.
Άρα ισχύει : $1980° = 5\cdot 360° + 180°$ οπότε έχουμε :

$\eta\mu 1980° = \eta\mu(5 \cdot 360° + 180°) = \eta\mu 180° = 0$

$\sigma\upsilon\nu 1980° = \sigma\upsilon\nu(5 \cdot 360° + 180°) = \sigma\upsilon\nu 180° = -1$

$\varepsilon\phi 1980° = \varepsilon\phi(5 \cdot 360° + 180°) = \varepsilon\phi 180° = 0$

$\sigma\phi 1980° = \sigma\phi(5 \cdot 360° + 180°) = \sigma\phi 180° = -$ (δεν ορίζεται)

iv. Αν κάνουμε τη διαίρεση $3600 : 360$ θα βρούμε πηλίκο 10 και υπόλοιπο 0. Άρα ισχύει : $3600° = 10 \cdot 360° + 0°$ οπότε έχουμε :

$\eta\mu 3600° = \eta\mu(10 \cdot 360° + 0°) = \eta\mu 0° = 0$

$\sigma\upsilon\nu 3600° = \sigma\upsilon\nu(10 \cdot 360° + 0°) = \sigma\upsilon\nu 0° = 1$

$\varepsilon\phi 3600° = \varepsilon\phi(10 \cdot 360° + 0°) = \varepsilon\phi 0° = 0$

$\sigma\phi 3600° = \sigma\phi(10 \cdot 360° + 0°) = \sigma\phi 0° = -$ (δεν ορίζεται)

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

5. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της γραμμής Α με τα ίσα τους στη γραμμή Β.

Γραμμή Α **Γωνία ω σε μοίρες**	Α. 30^0	Β. 45^0	Γ. 60^0	Δ. 120^0	Ε. 135^0	ΣΤ. 150^0	
Γραμμή Β **Γωνία ω σε rad**	1. $\frac{\pi}{3}$	2. $\frac{\pi}{4}$	3. $\frac{6\pi}{5}$	4. $\frac{3\pi}{4}$	5. $\frac{5\pi}{6}$	6. $\frac{2\pi}{3}$	7. $\frac{\pi}{6}$

6. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

Γωνία ω	Πρόσημο			
	ημω	συνω	εφω	σφω
130^0				
-100^0				
87^0				
-80^0				

7. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

i. $\eta\mu 200° > 0$ ii. $\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3} < 0$

iii. $\eta\mu 30° > 0$ iv. $\sigma\upsilon\nu 300° < 0$

v. $\varepsilon\varphi 200° > 0$ vi. $\sigma\varphi\frac{7\pi}{6} > 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

8. Μια επίκεντρη γωνία ω βαίνει σε τόξο μήκους 20cm. Να εκφράσετε τη γωνία ω σε ακτίνια, αν η ακτίνα του κύκλου είναι ρ=5cm.

9. Να εκφράσετε τη γωνία

i. 120^0 σε rad ii. $\frac{3\pi}{4}$ rad σε μοίρες

10. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

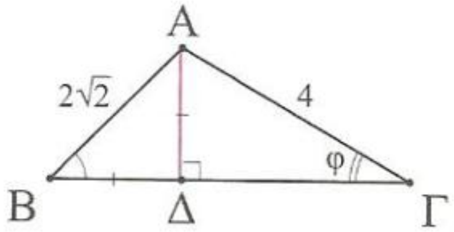
i. 765^0 ii. $\frac{49\pi}{6}$ rad

11. Να δείξετε ότι : |2ημx+3συνy|≤5.

12. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων :
i. $A = 3\eta\mu x - 4\sigma\upsilon\nu\, y$ ii. $B = 2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu\, y$ iii. $\Gamma = 5 - 3\eta\mu^2 x$

13. Αν $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ και $\frac{\pi}{3} < y < \frac{\pi}{2}$, να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:
i. A=συν(x+y) ii. B=εφ3y iii. Γ=ημ(x-y)

14. Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος να υπολογίσετε :



i. το ύψος ΑΔ ii. τη γωνία φ iii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

15. Να μετατρέψετε σε μοίρες τα τόξα :
i. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ ii. $\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, 2\pi$ iii. $\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{18}$

16. Να μετατρέψετε σε ακτίνια (rad) τις γωνίες :
i. $120°,\quad 150°,\quad 135°,\quad 270°$ ii. $10°,\quad 15°,\quad 12°$

17. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

i. $A = \dfrac{2\eta\mu 30° + 2\varepsilon\phi 30° \cdot \eta\mu 60° + \varepsilon\phi 45°}{2\sigma\upsilon\nu 60° - 2\sigma\phi 30° \cdot \sigma\upsilon\nu 30° + \sigma\phi 45°}$ ii. $B = \dfrac{2\eta\mu\frac{\pi}{6} + \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} + 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}{\varepsilon\phi\frac{\pi}{4} + \sqrt{3}\sigma\phi\frac{\pi}{3} + \sigma\phi\frac{\pi}{4}}$

iii. $\Gamma = \dfrac{3\varepsilon\phi\frac{\pi}{3} + 2\eta\mu\frac{\pi}{3} - 3\sigma\phi\frac{\pi}{6} + 6\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}{2\sigma\phi\frac{\pi}{6} + 2\varepsilon\phi\frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} + 6\eta\mu\frac{\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}$

18. Να βρείτε του τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών :
i. $\omega = \frac{41\pi}{4}$ ii. $\omega = \frac{601\pi}{6}$ iii. $\omega = \frac{901\pi}{3}$
iv. $\omega = \frac{61\pi}{6}$ v. $\omega = \frac{49\pi}{4}$ vi. $\omega = \frac{301\pi}{3}$

19. Να υπολογίσουμε τις τιμές των παραστάσεων :

i. $A = \dfrac{6\eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2\sigma\upsilon\nu\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}\varepsilon\phi\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \sigma\phi\left(8\pi + \frac{\pi}{4}\right)}$ ii. $B = \dfrac{2\eta\mu\frac{13\pi}{6} + \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{4} + 2\sigma\upsilon\nu\frac{61\pi}{3}}{\varepsilon\phi\frac{17\pi}{4} + \sqrt{3}\sigma\phi\frac{25\pi}{3} + \sigma\phi\frac{33\pi}{4}}$

3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. $\boxed{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1}$

Απόδειξη :

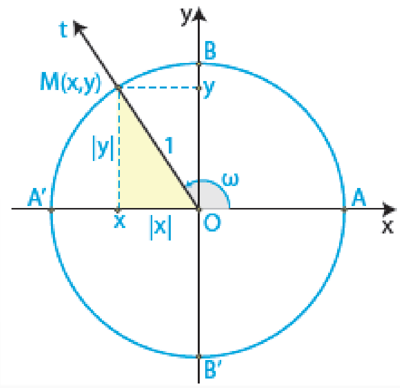
Αν $\mathrm{M}(x, y)$ είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε θα είναι : $x = \sigma\upsilon\nu\omega$ και $y = \eta\mu\omega$

Επειδή όμως, $(\mathrm{OM}) = 1$ και

$(\mathrm{OM})^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$, θα ισχύει :

$x^2 + y^2 = 1$, οπότε θα έχουμε :

$\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$



2. $\boxed{\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}}$ $\boxed{\sigma\varphi\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}}$

Απόδειξη :

Στο ίδιο σχήμα έχουμε : $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ (εφόσον $x = \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$)

$\sigma\varphi\omega = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$ (εφόσον $y = \eta\mu\omega \neq 0$)

3. $\boxed{\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1}$

Απόδειξη :

Είναι :

$\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ και $\sigma\varphi\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$ (εφόσον $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ και $\eta\mu\omega \neq 0$)

Επομένως : $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \cdot \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = 1$

4. $\boxed{\eta\mu^2\omega = \dfrac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}}$ και $\boxed{\sigma\upsilon\nu^2\omega = \dfrac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 63 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $\eta\mu x = \dfrac{3}{5}$ και $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

Λύση :

Έχω $\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2 x=1 \Leftrightarrow \frac{9}{25}+\sigma\upsilon\nu^2 x=1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x=1-\frac{9}{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{25}{25}-\frac{9}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\pm\sqrt{\frac{16}{25}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\pm\frac{4}{5}$

Όμως $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, άρα βρισκόμαστε στο 2^o τεταρτημόριο όπου $\sigma\upsilon\nu x<0$, άρα $\boxed{\sigma\upsilon\nu x=-\frac{4}{5}}$

Επίσης : $\varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon\varphi x=-\frac{3}{4}}$ και

$\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\varphi x=1 \Leftrightarrow \sigma\varphi x=\frac{1}{\varepsilon\varphi x} \Leftrightarrow \boxed{\sigma\varphi x=-\frac{4}{3}}$

2. (Άσκηση 2 σελ 63 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{2}{3}$ και $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

<u>Λύση :</u>

Έχω : $\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x+\left(-\frac{2}{3}\right)^2=1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x+\frac{4}{9}=1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x=1-\frac{4}{9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \eta\mu^2 x=\frac{9}{9}-\frac{4}{9} \Leftrightarrow \eta\mu^2 x=\frac{5}{9} \Leftrightarrow \eta\mu x=\pm\sqrt{\frac{5}{9}} \Leftrightarrow \eta\mu x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

Όμως $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$, άρα βρισκόμαστε στο 3^o τεταρτημόριο όπου $\eta\mu x<0$, άρα $\boxed{\eta\mu x=-\frac{\sqrt{5}}{3}}$

Επίσης : $\varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon\varphi x=\frac{\sqrt{5}}{2}}$ και

$\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\varphi x=1 \Leftrightarrow \sigma\varphi x=\frac{1}{\varepsilon\varphi x} \Leftrightarrow \sigma\varphi x=\frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \boxed{\sigma\varphi x=\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

3. (Άσκηση 3 σελ. 63 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $\varepsilon\varphi x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

<u>Λύση :</u>

Έχω : $\varepsilon\varphi x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=-\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 3\eta\mu x=-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x=-\frac{\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x}{3}$

Όμως : $\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1 \Leftrightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x}{3}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2 x=1 \Leftrightarrow \frac{3}{9}\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow} \sigma\upsilon\nu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu^2 x = 3 \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2 x = 3 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, όμως $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, άρα βρισκόμαστε στο 4$^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο όπου $\sigma\upsilon\nu x > 0$, άρα $\boxed{\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Επίσης $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \eta\mu x = \varepsilon\varphi x \cdot \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\eta\mu x = -\frac{1}{2}}$.

Τέλος $\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1 \Leftrightarrow \sigma\varphi x = \frac{1}{\varepsilon\varphi x} \Leftrightarrow \sigma\varphi x = -\frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sigma\varphi x = -\frac{3\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \boxed{\sigma\varphi x = -\sqrt{3}}$

4. (Άσκηση 5 σελ. 63 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $\sigma\varphi x = -2$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$.

<u>Λύση :</u>

Έχω : $\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \frac{1}{\sigma\varphi x} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \frac{1}{-2} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -\frac{1}{2}$.

Από τον τύπο $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{\frac{5}{4}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$, όμως $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

άρα βρισκόμαστε στο 4$^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο άρα $\sigma\upsilon\nu x > 0$, άρα $\boxed{\sigma\upsilon\nu x = \frac{2\sqrt{5}}{5}}$.

Επίσης $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \eta\mu x = \varepsilon\varphi x \cdot \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \boxed{\eta\mu x = -\frac{\sqrt{5}}{5}}$

Τελικά η παράσταση $\frac{2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}}{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{-\frac{4\cdot 5}{5}}{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \frac{-4}{5+2\sqrt{5}}$.

5. (Άσκηση 7 σελ. 63 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι, τα σημεία $\mathrm{M}(x,y)$ του επιπέδου με $x = 3\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y = 3\eta\mu\theta$, είναι σημεία κύκλου Ο(0,0) κέντρου και ακτίνας ρ=3.

<u>Λύση :</u>

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η απόσταση του σημείου $\mathrm{M}(x,y)$ από την αρχή των αξόνων Ο(0,0) είναι ιση με 3. Έχουμε :

$(\mathrm{OM}) = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(3\sigma\upsilon\nu\theta)^2+(3\eta\mu\theta)^2} = \sqrt{9\sigma\upsilon\nu^2\theta+9\eta\mu^2\theta} =$

$= \sqrt{9(\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta)} = \sqrt{9} = 3$

6. (Άσκηση 8 σελ. 63 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν ισχύει $x = 2\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y = 3\eta\mu\theta$, να δείξετε ότι $9x^2 + 4y^2 = 36$.

Λύση :

Έχω : $9x^2 + 4y^2 = 36 \Leftrightarrow 9(2\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + 4(3\eta\mu\theta)^2 = 36 \Leftrightarrow 9 \cdot 4\sigma\upsilon\nu^2\theta + 4 \cdot 9\eta\mu^2\theta = 36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 36\sigma\upsilon\nu^2\theta + 36\eta\mu^2\theta = 36 \Leftrightarrow 36(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta) = 36 \Leftrightarrow 36 \cdot 1 = 36$ που ισχύει.

7. (Άσκηση 10 σελ. 63 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι :

i. $\dfrac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$

ii. $\sigma\upsilon\nu^4\alpha - \eta\mu^4\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$

Λύση :

i. Με τον περιορισμό ότι : $\eta\mu\alpha \neq 0$ και $1+\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha \neq -1$ έχω :

$\dfrac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} \overset{\chi\iota\alpha\sigma\tau\acute{\iota}}{\Leftrightarrow} \eta\mu^2\alpha = (1-\sigma\upsilon\nu\alpha)(1+\sigma\upsilon\nu\alpha) \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$ που ισχύει.

ii. $\sigma\upsilon\nu^4\alpha - \eta\mu^4\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu^2\alpha)^2 - (\eta\mu^2\alpha)^2 = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha)(\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha) = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha) \cdot 1 = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$ που ισχύει.

8. (Άσκηση 11 σελ. 64 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι :

i. $\dfrac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} + \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \dfrac{2}{\eta\mu\theta}$

ii. $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} = \dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$

Λύση :

i. Με τον περιορισμό ότι : $\eta\mu\theta \neq 0$ και $1+\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta \neq -1$ έχω :

$\dfrac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} + \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \dfrac{2}{\eta\mu\theta} \overset{\cdot\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{\Longleftrightarrow} \eta\mu^2\theta + (1+\sigma\upsilon\nu\theta)^2 = 2(1+\sigma\upsilon\nu\theta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \eta\mu^2\theta + 1 + 2\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta + 1 + 2\sigma\upsilon\nu\theta = 2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + 1 + 2\sigma\upsilon\nu\theta = 2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta$ που ισχύει.

ii. Με τον περιορισμό ότι : $1-\eta\mu x \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x \neq 1$, $1+\eta\mu x \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x \neq -1$ και $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$

έχω : $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} = \dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu x} \overset{\cdot(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x}{\Longleftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x(1+\eta\mu x) + \sigma\upsilon\nu^2 x(1-\eta\mu x) = 2(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu x = 2(1-\eta\mu^2 x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 2 - 2\eta\mu^2 x \Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x = 2 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

που ισχύει.

9. (Άσκηση 3 σελ. 64 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Αν $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι : $\sqrt{\dfrac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}} - \sqrt{\dfrac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}} = 2\varepsilon\varphi x$.

Λύση :

Έχω :

$$\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}}-\sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}=2\varepsilon\varphi x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(1+\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}}-\sqrt{\frac{(1-\eta\mu x)(1-\eta\mu x)}{(1+\eta\mu x)(1-\eta\mu x)}}=2\varepsilon\varphi x \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{(1+\eta\mu x)^2}{1-\eta\mu^2 x}}-\sqrt{\dfrac{(1-\eta\mu x)^2}{1-\eta\mu^2 x}}=2\varepsilon\varphi x$ όμως $\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x=1-\eta\mu^2 x$

Άρα $\sqrt{\dfrac{(1+\eta\mu x)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}-\sqrt{\dfrac{(1-\eta\mu x)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}=2\varepsilon\varphi x \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{(1+\eta\mu x)^2}}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x}}-\dfrac{\sqrt{(1-\eta\mu x)^2}}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x}}=2\varepsilon\varphi x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{|1+\eta\mu x|}{|\sigma\upsilon\nu x|}-\dfrac{|1-\eta\mu x|}{|\sigma\upsilon\nu x|}=2\varepsilon\varphi x$. Όμως : $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ άρα βρισκόμαστε στο 1^o και στο 4^o άρα ισχύει $\sigma\upsilon\nu x\geq 0$, οπότε $|\sigma\upsilon\nu x|=\sigma\upsilon\nu x$. Επίσης $-1\leq\eta\mu x\leq 1$ άρα ισχύει $1+\eta\mu x\geq 0$ και $1-\eta\mu x\geq 0$. Άρα

$$\frac{|1+\eta\mu x|}{|\sigma\upsilon\nu x|}-\frac{|1-\eta\mu x|}{|\sigma\upsilon\nu x|}=2\varepsilon\varphi x \Leftrightarrow \frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}-\frac{1-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=2\varepsilon\varphi x \Leftrightarrow \frac{1+\eta\mu x-1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=2\varepsilon\varphi x \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=2\varepsilon\varphi x \Leftrightarrow 2\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=2\varepsilon\varphi x$ που ισχύει.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

10. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα ίσα τους στη στήλη Β, ώστε να ισχύουν οι ταυτότητες.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. ημ^{2}ω	1. $\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$
Β. εφω	2. 1-συν^{2}ω
Γ. σφω	3. $\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$
Δ. συν^{2}ω	4. $\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\omega}$
Ε. 1+εφ^{2}ω	5. $\dfrac{1}{\eta\mu^2\omega}$
	6. $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$

11. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

i. $\eta\mu^2 1+\sigma\upsilon\nu^2 1=2$ ii. $\eta\mu 3=\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 3}$

iii. $\sigma\upsilon\nu 2=-\sqrt{1-\eta\mu^2 2}$ iv. $\sigma\upsilon\nu 3\cdot\varepsilon\varphi 3=\eta\mu 3$

v. $\varepsilon\varphi 2012\cdot\sigma\varphi 2012=1$ vi. $\varepsilon\varphi 10=\dfrac{1}{\sigma\varphi 10}$

vii. $\sigma\upsilon\nu^2 5=\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 5}$ viii. $\eta\mu^2 7=\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 7}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

Α. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

12. Αν $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$ και $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

13. Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

14. Αν $\sigma\varphi\omega = -\frac{5}{12}$ και $270^0<\omega<360^0$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

15. Αν $\varepsilon\phi\omega = -\frac{4}{3}$ και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, να αποδείξετε ότι :

i. $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$ και $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$

ii. $\frac{5\eta\mu\omega - 15\sigma\upsilon\nu\omega}{6\varepsilon\phi\omega - 5\eta\mu 90^\circ} = -1$

16. Για μια γωνία $\omega \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ ισχύει : $5\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega - 6 = 0$

i. Να αποδείξετε ότι : $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$

ii. Να υπολογίσετε τους αριθμούς $\sigma\upsilon\nu\omega, \varepsilon\phi\omega$ και $\sigma\phi\omega$.

17. Αν είναι $3\sigma\upsilon\nu x + 4\eta\mu x = 5$, τότε :

i. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x, \varepsilon\phi x$ και $\sigma\phi x$.

ii. Να βρείτε το τεταρτημόριο στο οποίο καταλήγει το τόξο x.

18. Αν είναι $3\eta\mu x - 4\sigma\upsilon\nu x = 5$, τότε :

i. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x, \varepsilon\phi x$ και $\sigma\phi x$.

ii. Να βρείτε το τεταρτημόριο στο οποίο καταλήγει το τόξο x.

19. Αν για τη γωνία x, ισχύει $3\sigma\upsilon\nu^2x+4\eta\mu x+1=0$, να βρείτε το ημx.

20. Να δείξετε ότι τα σημεία Μ(x,y) του επιπέδου με x=5συνθ και y=5ημθ, είναι σημεία κύκλου κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας ρ=5.

21. Αν x=ημθ και $y=\sigma\upsilon\nu^2\theta$, θ∈ρ, να δείξετε ότι τα σημεία Μ(x,y) ανήκουν σε παραβολή, της οποίας να βρείτε την κορυφή.

22. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x, για τις οποίες να ισχύει συγχρόνως ημx=$\frac{2}{3}$ και $\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{3}$

23. Αν ημx+συνx=α, να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α τις παραστάσεις:
i. ημxσυνx ii. ημ^{4}x+συν^{4}x

24. Αν $\eta\mu x=\frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, να υπολογιστεί η παράσταση : $A=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\varepsilon\phi x+\sigma\phi x}$.

Β. ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

25. Να δείξετε ότι : $\frac{1-\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\eta\mu\alpha}$.

26. Να δείξετε ότι : $\eta\mu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\beta-\eta\mu^2\beta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta$.

27. Να δείξετε ότι : $\frac{1-\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi x}=\frac{\sigma\varphi x-1}{\sigma\varphi x+1}$.

28. Να δείξετε ότι : $\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\varepsilon\varphi\theta}-\frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\varphi\theta}=\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta$.

29. Να δείξετε ότι : $\frac{1+\sigma\varphi^5 x}{1+\varepsilon\varphi^5 x}=(\frac{1+\sigma\varphi x}{1+\varepsilon\varphi x})^5$.

30. Αν 0<x<π, να δείξετε ότι : $\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}}-\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}}=-2\sigma\varphi x$.

31. Να αποδείξετε ότι : $\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\frac{2}{\eta\mu x}$.

32. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $A=\frac{\eta\mu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^4\alpha}{\eta\mu^4\beta+2\sigma\upsilon\nu^2\beta-\sigma\upsilon\nu^4\beta}$.

33. Να αποδειχθεί ότι :
i. $(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2+(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)^2=2$
ii. $\frac{\eta\mu^3\alpha+\sigma\upsilon\nu^3\alpha}{\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha}+\frac{\eta\mu^3\alpha-\sigma\upsilon\nu^3\alpha}{\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha}=2$
iii. $\frac{1}{1-\varepsilon\phi^2\alpha}+\frac{1}{1-\sigma\phi^2\alpha}=1$
iv. $\sigma\upsilon\nu^4\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot\left(\eta\mu^2\alpha+\frac{1}{\sigma\phi^2\alpha}\right)=1$

v. $\eta\mu^2\alpha\cdot\varepsilon\phi\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot\sigma\phi\alpha+2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=\varepsilon\phi\alpha+\sigma\phi\alpha$

vi. $\eta\mu^4x+\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu^2x=\sigma\upsilon\nu^4x$

vii. $(\varepsilon\phi x+\sigma\phi x)^2-(\varepsilon\phi x-\sigma\phi x)^2=4$

34. Να αποδειχθεί ότι :

i. $\sigma\upsilon\nu^4x+\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu^2x+\eta\mu^2x=1$

ii. $\sigma\upsilon\nu^4x+2\eta\mu^2x-\eta\mu^4x=1$

iii. $(\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta)^2+(\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta)^2=1$

iv. $(\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta)^2+(\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta)^2=1$

v. $\dfrac{\eta\mu^3x-\sigma\upsilon\nu^3x}{1+\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}=\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$

vi. $\dfrac{\eta\mu^3x+\sigma\upsilon\nu^3x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}-\dfrac{\eta\mu^3x-\sigma\upsilon\nu^3x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}=2$

vii. $\dfrac{(1+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2}{(1+\eta\mu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}=2$

viii. $\dfrac{\eta\mu^2x}{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}-\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\varepsilon\phi^2x-1}=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$

ix. $\dfrac{1-3\eta\mu x}{1-\eta\mu x}+\dfrac{2\eta\mu x-1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=-3\varepsilon\phi^2x$

x. $\dfrac{\varepsilon\phi x}{1-\sigma\phi x}+\dfrac{\sigma\phi x}{1-\varepsilon\phi x}=\dfrac{1+\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}$

xi. $\dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}+\dfrac{1}{\varepsilon\phi x}=\dfrac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}-\dfrac{1}{\varepsilon\phi x}$

Γ. ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

35. Να αποδειχθεί ότι :

i. $\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta+2\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta\le 2$

ii. $(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)^2\le 2$

iii. $\left(3\sigma\upsilon\nu\alpha+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\right)^2\ge 12$

iv. $-\sqrt{2}\le\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\le\sqrt{2}$

v. $-13\le 5\eta\mu x+12\sigma\upsilon\nu x\le 13$

36. Αν $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι : $\varepsilon\phi x+\sigma\phi x\ge 2$.

37. Αν $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$, να αποδείξετε ότι : $\varepsilon\phi x+\sigma\phi x\le -2$.

3.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1^Ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Μέχρι στιγμής γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του 1^{ου} τεταρτημορίου (δηλαδή γωνιών από $0° \to 90°$ ή αλλιώς από $0 \to \frac{\pi}{2} rad$), όπως δίνονται από τον πίνακα. Θα μάθουμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μεγαλύτερων γωνιών. Αυτή η διαδικασία γίνεται με αναγωγή στο 1^{ο} τεταρτημόριο.

ΑΠΟ ΤΟ 2^{Ο} ΣΤΟ 1^{Ο}

Δυο γωνίες λέγονται παραπληρωματικές αν έχουν άθροισμα $180°$ ή πrad. Δηλαδή οι γωνίες ω και $180° - \omega$ ή ω και $\pi - \omega$ είναι παραπληρωματικές και ισχύει :

- $\eta\mu(180° - \omega) = \eta\mu\omega$ ή $\boxed{\eta\mu(\pi - \omega) = \eta\mu\omega}$
- $\sigma\upsilon\nu(180° - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$ ή $\boxed{\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega}$
- $\varepsilon\phi(180° - \omega) = -\varepsilon\phi\omega$ ή $\boxed{\varepsilon\phi(\pi - \omega) = -\varepsilon\phi\omega}$
- $\sigma\phi(180° - \omega) = -\sigma\phi\omega$ ή $\boxed{\sigma\phi(\pi - \omega) = -\sigma\phi\omega}$

Δηλαδή :
Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς :

i. $\eta\mu 120°$ ii. $\sigma\upsilon\nu 135°$ iii. $\varepsilon\phi 150°$ iv. $\eta\mu\frac{5\pi}{6}$ v. $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$ vi. $\varepsilon\phi\frac{3\pi}{4}$

Λύση :

i. $\eta\mu 120° = \eta\mu(180° - 60°) = \eta\mu 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ii. $\sigma\upsilon\nu 135° = \sigma\upsilon\nu(180° - 45°) = -\sigma\upsilon\nu 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

iii. $\varepsilon\phi 150° = \varepsilon\phi(180° - 30°) = -\varepsilon\phi 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

iv. $\eta\mu\frac{5\pi}{6} = \eta\mu(\pi - \frac{\pi}{6}) = \eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

v. $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

vi. $\varepsilon\phi\frac{3\pi}{4} = \varepsilon\phi(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\varepsilon\phi\frac{\pi}{4} = -1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

2. Να υπολογιστούν οι παρακάτω τριγωνομετρικοί αριθμοί :

i. $\eta\mu 150°$ ii. $\sigma\upsilon\nu 135°$ iii. $\varepsilon\phi 120°$ iv. $\eta\mu\frac{2\pi}{3}$ v. $\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}$ vi. $\varepsilon\phi\frac{3\pi}{4}$

ΑΠΟ ΤΟ 3^{Ο} ΣΤΟ 1^{Ο}

Γωνίες που διαφέρουν κατά $180°$ ή πrad είναι οι ω και $180° + \omega$ ή ω και $\pi + \omega$ για τις οποίες ισχύει :

- $\eta\mu(180° + \omega) = -\eta\mu\omega$ ή $\boxed{\eta\mu(\pi + \omega) = -\eta\mu\omega}$
- $\sigma\upsilon\nu(180° + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$ ή $\boxed{\sigma\upsilon\nu(\pi + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega}$
- $\varepsilon\phi(180° + \omega) = \varepsilon\phi\omega$ ή $\boxed{\varepsilon\phi(\pi + \omega) = \varepsilon\phi\omega}$
- $\sigma\phi(180° + \omega) = \sigma\phi\omega$ ή $\boxed{\sigma\phi(\pi + \omega) = \sigma\phi\omega}$

Δηλαδή :

Οι γωνίες που διαφέρουν κατά $180°$ ή πrad, έχουν ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη, ενώ έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3. Να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς :

i. $\eta\mu 210°$ ii. $\sigma\upsilon\nu 225°$ iii. $\varepsilon\phi 240°$ iv. $\eta\mu\frac{5\pi}{4}$ v. $\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6}$ vi. $\varepsilon\phi\frac{4\pi}{3}$

Λύση :

i. $\eta\mu 210° = \eta\mu(180° + 30°) = -\eta\mu 30° = -\frac{1}{2}$

ii. $\sigma\upsilon\nu 225° = \sigma\upsilon\nu(180° + 45°) = -\sigma\upsilon\nu 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

iii. $\varepsilon\phi 240° = \varepsilon\phi(180° + 60°) = \varepsilon\phi 60° = \sqrt{3}$

iv. $\eta\mu\frac{5\pi}{4} = \eta\mu(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\eta\mu\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

v. $\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

vi. $\varepsilon\phi\frac{4\pi}{3} = \varepsilon\phi(\pi + \frac{\pi}{3}) = \varepsilon\phi\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

4. Να υπολογιστούν οι παρακάτω τριγωνομετρικοί αριθμοί :

i. $\eta\mu 225$ ii. $\sigma\upsilon\nu 240°$ iii. $\varepsilon\phi 210°$ iv. $\eta\mu\frac{7\pi}{6}$ v. $\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3}$ vi. $\varepsilon\phi\frac{5\pi}{4}$

ΑΠΟ ΤΟ 4^{o} ΣΤΟ 1^{o}

Έστω ότι μια γωνία ω βρίσκεται στο 1^{o} τεταρτημόριο. Τότε η αντίθετη της –ω θα βρίσκεται στο 4^{o} τεταρτημόριο και ισχύει :

- $\boxed{\eta\mu(-\omega)=-\eta\mu\omega}$
- $\boxed{\sigma\upsilon\nu(-\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega}$
- $\boxed{\varepsilon\phi(-\omega)=-\varepsilon\phi\omega}$
- $\boxed{\sigma\phi(-\omega)=-\sigma\phi\omega}$

Δηλαδή :
Οι γωνίες ω και –ω έχουν ίδιο συνημίτονο και αντιθέτους τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5. Να υπολογιστούν οι παρακάτω τριγωνομετρικοί αριθμοί :
i. $\eta\mu 330°$ ii. $\sigma\upsilon\nu 300°$ iii. $\varepsilon\phi 315°$

Λύση :

i. $\eta\mu 330° = \eta\mu(360° - 30°) = \eta\mu(-30°) = -\eta\mu 30° = -\frac{1}{2}$

ii. $\sigma\upsilon\nu 300° = \sigma\upsilon\nu(360° - 60°) = \sigma\upsilon\nu(-60°) = \sigma\upsilon\nu 60° = \frac{1}{2}$

iii. $\varepsilon\phi 315° = \varepsilon\phi(360° - 45°) = \varepsilon\phi(-45°) = -\varepsilon\phi 45° = -1$

ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑ $\frac{\pi}{2}$ $(90°)$

Γωνιες με αθροισμα $\frac{\pi}{2}$ (ή $90°$) δηλαδή συμπληρωματικές, είναι οι ω και $\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)$ ή αλλιώς ω και $(90°-\omega)$ και ισχύει :

- $\boxed{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\omega}$ επίσης $\boxed{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-(-\omega)\right)=\sigma\upsilon\nu(-\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega}$
- $\boxed{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\eta\mu\omega}$ επίσης $\boxed{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-(-\omega)\right)=\eta\mu(-\omega)=-\eta\mu\omega}$
- $\boxed{\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\phi\omega}$ επίσης $\boxed{\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)=\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2}-(-\omega)\right)=\sigma\phi(-\omega)=-\sigma\phi\omega}$
- $\boxed{\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\varepsilon\phi\omega}$ επίσης $\boxed{\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2}-(-\omega)\right)=\varepsilon\phi(-\omega)=-\varepsilon\phi\omega}$

Δηλαδή :
Στις συμπληρωματικές γωνίες το ημίτονο καθεμίας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη καθεμίας με τη συνεφαπτομένη της άλλης και αντίστροφα.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

6. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα ίσα τους στοιχεία της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. ημ(π+θ)	1. ημθ
Β. εφ(π-θ)	2. –σφθ
Γ. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	3. –ημθ
Δ. σφ(-θ)	4. σφθ
Ε. σφ(π+θ)	5. –εφθ
ΣΤ. συν(-θ)	6. εφθ
	7. συνθ

7. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα ίσα τους στοιχεία της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. ημ25^0	1. ημ65^0
Β. συν72^0	2. –σφ65^0
Γ. εφ10^0	3. συν65^0
Δ. σφ115^0	4. ημ18^0
	5. σφ80^0

8. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

i. $\eta\mu\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ii. $\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ iii. $\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4}=1$

iv. ημ$120^0=\frac{1}{2}$ v. συν$120^0=-\frac{1}{2}$ vi. συν$150^0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

9. Να απλοποιηθεί η παράσταση : $A=\dfrac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{11\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2}-\theta\right)}$

Λύση :

Θα απλοποιήσουμε κάθε παράγοντα ξεχωριστά και έχουμε :

- $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\theta$
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi+\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\eta\mu\theta$
- $\eta\mu\left(\frac{11\pi}{2}+\theta\right)=\eta\mu\left(\frac{10\pi+\pi}{2}+\theta\right)=\eta\mu\left(5\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\eta\mu\left(4\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)=$

  $\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sigma\upsilon\nu\theta$
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{12\pi+\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(6\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\eta\mu\theta$

Άρα η τιμή της παράστασης είναι :

$$\mathrm{A}=\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{11\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot(-\eta\mu\theta)}{-\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\eta\mu\theta}=1$$

<u>ΓΕΝΙΚΕΣ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ :</u>

10. (Άσκηση 1 σελ. 70 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας :
i. $1200°$ ii. $-2850°$

<u>Λύση :</u>

i. Αν διαιρέσουμε το 1200 με το 360 έχουμε $1200°=3\cdot360°+120°$ Άρα

- $\eta\mu1200°=\eta\mu(3\cdot360°+120°)=\eta\mu120°=\eta\mu(180°-60°)=\eta\mu60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu1200°=\sigma\upsilon\nu(3\cdot360°+120°)=\sigma\upsilon\nu120°=\sigma\upsilon\nu(180°-60°)=-\sigma\upsilon\nu60°=-\frac{1}{2}$
- $\varepsilon\phi1200°=\varepsilon\phi(3\cdot360°+120°)=\varepsilon\phi120°=\varepsilon\phi(180°-60°)=-\varepsilon\phi60°=-\sqrt{3}$
- $\sigma\phi1200°=\sigma\phi(3\cdot360°+120°)=\sigma\phi120°=\sigma\phi(180°-60°)=-\sigma\phi60°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ii. Αν διαιρέσουμε το 2850 με το 360 έχουμε $2850°=7\cdot360°+330°$ άρα :

- $\eta\mu(-2850°)=-\eta\mu2850°=-\eta\mu(7\cdot360°+330°)=-\eta\mu330°=-\eta\mu(360°-30°)=$

  $=-\eta\mu(-30°)=\eta\mu30°=\frac{1}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu(-2850°)=\sigma\upsilon\nu2850°=\sigma\upsilon\nu(7\cdot360°+330°)=\sigma\upsilon\nu330°=\sigma\upsilon\nu(360°-30°)=$

  $=\sigma\upsilon\nu(-30°)=\sigma\upsilon\nu30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\varepsilon\phi(-2850°)=-\varepsilon\phi2850°=-\varepsilon\phi(7\cdot360°+330°)=-\varepsilon\phi330°=-\varepsilon\phi(360°-30°)=$

  $=-\varepsilon\phi(-30°)=\varepsilon\phi30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\sigma\phi(-2850°)=-\sigma\phi2850°=-\sigma\phi(7\cdot360°+330°)=-\sigma\phi330°=-\sigma\phi(360°-30°)=$

  $=-\sigma\phi(-30°)=\sigma\phi30°=\sqrt{3}$

11. (Άσκηση 2 σελ. 70 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας :

i. $\frac{187\pi}{6}rad$ ii. $\frac{21\pi}{4}rad$

Λύση :

i. Αν διαιρέσουμε το 187 με το 6 έχουμε : $187 = 6\cdot 31 + 1 = 186 + 1$ άρα :

- $\eta\mu\frac{187\pi}{6} = \eta\mu\frac{186\pi+\pi}{6} = \eta\mu\left(31\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\left(30\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) =$
  $= -\eta\mu\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu\frac{187\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu\frac{186\pi+\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu\left(31\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(30\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) =$
  $= -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\varepsilon\varphi\frac{187\pi}{6} = \varepsilon\varphi\frac{186\pi+\pi}{6} = \varepsilon\varphi\left(31\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \varepsilon\varphi\left(30\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \varepsilon\varphi\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) =$
  $= \varepsilon\phi\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\sigma\varphi\frac{187\pi}{6} = \sigma\varphi\frac{186\pi+\pi}{6} = \sigma\varphi\left(31\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \sigma\varphi\left(30\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \sigma\varphi\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) =$
  $= \sigma\phi\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

ii. Αν διαιρέσουμε το 21 με το 4 έχουμε : $21 = 4\cdot 5 + 1 = 20 + 1$ άρα :

- $\eta\mu\frac{21\pi}{4} = \eta\mu\frac{20\pi+\pi}{4} = \eta\mu\left(5\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\left(4\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) =$
  $= -\eta\mu\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu\frac{21\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu\frac{20\pi+\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu\left(5\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(4\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) =$
  $= -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\varepsilon\varphi\frac{21\pi}{4} = \varepsilon\varphi\frac{20\pi+\pi}{4} = \varepsilon\varphi\left(5\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \varepsilon\varphi\left(4\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \varepsilon\varphi\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \varepsilon\phi\frac{\pi}{4} = 1$
- $\sigma\varphi\frac{21\pi}{4} = \sigma\varphi\frac{20\pi+\pi}{4} = \sigma\varphi\left(5\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \sigma\varphi\left(4\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \sigma\varphi\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \sigma\phi\frac{\pi}{4} = 1$

12. (Άσκηση 3 σελ. 70 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)
Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι :

i. $\eta\mu\mathrm{A} = \eta\mu(\mathrm{B}+\Gamma)$ ii. $\sigma\upsilon\nu\mathrm{A} + \sigma\upsilon\nu(\mathrm{B}+\Gamma) = 0$

iii. $\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{B}+\Gamma}{2}$ iv. $\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{2} = \eta\mu\frac{\mathrm{B}+\Gamma}{2}$

Λύση :

i. Σε κάθε τρίγωνο ισχύει : $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=\pi \Leftrightarrow \hat{A}=\pi-\hat{B}-\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{A}=\pi-(\hat{B}+\hat{\Gamma})$
Άρα $\eta\mu A=\eta\mu(\pi-(B+\Gamma))=\eta\mu(B+\Gamma)$

ii. Ομοίως : $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)=\sigma\upsilon\nu(\pi-(B+\Gamma))+\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)=$
$=-\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)+\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)=0$

iii. Ισχύει : $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=\pi \Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2}$, άρα :
$\eta\mu\frac{A}{2}=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B+\Gamma}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}$

iv. Ομοίως : $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B+\Gamma}{2}\right)=\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}$

13. (Άσκηση 4 σελ. 70 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να απλοποιήσετε την παράσταση : $\frac{\sigma\upsilon\nu(-\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(180^\circ+\alpha)}{\eta\mu(-\alpha)\cdot\eta\mu(90^\circ+\alpha)}$

Λύση :

- $\sigma\upsilon\nu(-\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha$
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ+\alpha)=-\sigma\upsilon\nu\alpha$
- $\eta\mu(-\alpha)=-\eta\mu\alpha$
- $\eta\mu(90^\circ+\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha$

Επομένως έχουμε : $\frac{\sigma\upsilon\nu(-\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(180^\circ+\alpha)}{\eta\mu(-\alpha)\cdot\eta\mu(90^\circ+\alpha)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot(-\sigma\upsilon\nu\alpha)}{-\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}=\sigma\phi\alpha$

14. (Άσκηση 5 σελ. 70 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι : $\frac{\varepsilon\phi(\pi-x)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2}+x\right)}{\eta\mu(13\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu(-x)\cdot\sigma\phi\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)}=-1$

Λύση :

- $\varepsilon\phi(\pi-x)=-\varepsilon\phi x$
- $\sigma\upsilon\nu(2\pi+x)=\sigma\upsilon\nu x$
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2}+x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{8\pi+\pi}{2}+x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(4\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\eta\mu x$
- $\eta\mu(13\pi+x)=\eta\mu(12\pi+\pi+x)=\eta\mu(\pi+x)=-\eta\mu x$
- $\sigma\upsilon\nu(-x)=\sigma\upsilon\nu x$
- $\sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)=\sigma\varphi\left(\frac{20\pi+\pi}{2}-x\right)=\sigma\varphi\left(10\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\varepsilon\varphi x$

Επομένως έχουμε : $\frac{\varepsilon\phi(\pi-x)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2}+x\right)}{\eta\mu(13\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu(-x)\cdot\sigma\phi\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)}=\frac{-\varepsilon\phi x\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot(-\eta\mu x)}{-\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot\varepsilon\phi x}=-1$

15. (Άσκηση 6 σελ. 70 Α΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι έχει σταθερή τιμή η παράσταση :

$$\eta\mu^2(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(\pi - x)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi - x) + 2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

<u>Λύση :</u>

- $\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$
- $\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$
- $\sigma\upsilon\nu(2\pi - x) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$
- $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$

Επομένως έχουμε : $\eta\mu^2(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(\pi - x)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi - x) + 2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$

$$= \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

16. (Άσκηση 2 σελ. 71 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{\eta\mu(5\pi + \omega)\cdot\sigma\upsilon\nu(7\pi - \omega)\cdot\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)}{\sigma\phi(5\pi + \omega)\cdot\eta\mu(7\pi - \omega)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right)\cdot\sigma\phi\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)} = \eta\mu^2\omega - 1$

<u>Λύση :</u>

- $\eta\mu(5\pi + \omega) = \eta\mu(4\pi + \pi + \omega) = \eta\mu(\pi + \omega) = -\eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(7\pi - \omega) = \sigma\upsilon\nu(6\pi + \pi - \omega) = \sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
- $\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\left(\frac{4\pi + \pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{6\pi + \pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(3\pi + \frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{2} + \omega\right) =$

  $= \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \eta\mu\omega$
- $\sigma\phi(5\pi + \omega) = \sigma\phi(4\pi + \pi + \omega) = \sigma\phi(\pi + \omega) = \sigma\phi\omega$
- $\eta\mu(7\pi - \omega) = \eta\mu(6\pi + \pi - \omega) = \eta\mu(\pi - \omega) = \eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi + \pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\omega$
- $\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\varphi\left(\frac{6\pi + \pi}{2} + \omega\right) = \sigma\varphi\left(3\pi + \frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\varphi\left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{2} + \omega\right) =$

  $= \sigma\phi\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\varepsilon\phi\omega$

Επομένως έχουμε : $\dfrac{\eta\mu(5\pi + \omega)\cdot\sigma\upsilon\nu(7\pi - \omega)\cdot\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)}{\sigma\phi(5\pi + \omega)\cdot\eta\mu(7\pi - \omega)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right)\cdot\sigma\phi\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)} =$

$$= \frac{-\eta\mu\omega\cdot(-\sigma\upsilon\nu\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu\omega\cdot\eta\mu\omega}{\sigma\phi\omega\cdot\eta\mu\omega\cdot\eta\mu\omega\cdot(-\varepsilon\phi\omega)} = -\sigma\upsilon\nu^2\omega \overset{\substack{\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1\Leftrightarrow\\ \sigma\upsilon\nu^2\omega=1-\eta\mu^2\omega}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} -(1 - \eta\mu^2\omega) = \eta\mu^2\omega - 1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

17. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω, όταν :
i. $\omega = 330°$ ii. $\omega = 660°$ iii. $\omega = 405°$ iv. $\omega = 300°$

18. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω, όταν :
i. $\omega = \frac{2\pi}{3}$ ii. $\omega = \frac{3\pi}{4}$ iii. $\omega = \frac{5\pi}{6}$ iv. $\omega = \frac{19\pi}{6}$ v. $\omega = \frac{22\pi}{3}$

19. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω, όταν :
i. $\omega = \frac{23\pi}{4}$ ii. $\omega = \frac{89\pi}{6}$ iii. $\omega = \frac{23\pi}{6}$ iv. $\omega = \frac{43\pi}{2}$ v. $\omega = \frac{29\pi}{3}$

20. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i. $$\mathrm{A} = \frac{\eta\mu\frac{5\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6}\cdot\varepsilon\varphi\frac{4\pi}{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}}{\eta\mu\frac{2\pi}{3}\cdot\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4}\cdot\sigma\varphi\frac{5\pi}{6}\cdot\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$$

ii. $$\mathrm{B} = \frac{\eta\mu(9\pi+\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(19\pi-\theta)\cdot\varepsilon\varphi(29\pi+\theta)\cdot\sigma\varphi(93\pi-\theta)}{\eta\mu(7\pi-\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(17\pi+\theta)\cdot\varepsilon\varphi(27\pi-\theta)\cdot\sigma\varphi(37\pi+\theta)}$$

iii. $$\Gamma = \frac{\eta\mu 150° + \sigma\upsilon\nu 120° + \sigma\varphi 240°}{\sigma\upsilon\nu(-45°) + \eta\mu 225° + \eta\mu 120° + \varepsilon\varphi 150°}$$

21. Να αποδείξετε ότι :

i. $$\frac{\eta\mu(\pi-\alpha)}{\varepsilon\phi(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu(2\pi-\alpha)}{\eta\mu(4\pi-\alpha)} = \eta\mu\alpha$$

ii. $$\frac{\eta\mu(3\pi-\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(5\pi+\theta)\cdot\varepsilon\phi(7\pi+\theta)\cdot\sigma\phi(9\pi-\theta)}{\eta\mu(2\pi-\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(4\pi-\theta)\cdot\varepsilon\phi(6\pi-\theta)\cdot\sigma\phi(8\pi+\theta)} = 1$$

iii. $$\frac{\eta\mu(24\pi-\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(37\pi-\theta)\cdot\varepsilon\varphi(15\pi+\theta)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{2}-\theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{17\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{23\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{27\pi}{2}+\theta\right)\cdot\varepsilon\varphi(\theta-12\pi)} = 1$$

iv. $$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\eta\mu(\pi-\alpha)+\sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \varepsilon\phi\alpha$$

v. $$\frac{\sigma\upsilon\nu^2(\pi-\alpha)+\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sigma\upsilon\nu(\pi+\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi-\alpha)}{\varepsilon\phi^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sigma\phi^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)} = \sigma\upsilon\nu^2\alpha$$

22. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $$\mathrm{A} = \frac{\eta\mu(-\theta)\cdot\varepsilon\varphi(\pi-\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi+\theta)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot\eta\mu(\pi-\theta)}$$

ii. $$\mathrm{B} = \frac{\eta\mu(180^o+\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(90^o-\theta)\cdot\varepsilon\varphi(360^o+\theta)}{\eta\mu(360^o+\theta)\cdot\varepsilon\varphi(180^o+\theta)\cdot\eta\mu(180^o-\theta)}$$

23. Να υπολογίσετε την παράσταση : $\mathrm{A} = \eta\mu^2(13\pi+\omega)+\eta\mu^2\left(\frac{11\pi}{2}+\omega\right)$

24. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i. $\mathrm{A} = \dfrac{\eta\mu\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{19\pi}{2}-\theta\right)\cdot\varepsilon\phi\left(\frac{29\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sigma\phi\left(\frac{39\pi}{2}-\theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{7\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{17\pi}{2}+\theta\right)\cdot\varepsilon\phi\left(\frac{27\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\phi\left(\frac{37\pi}{2}+\theta\right)}$

ii. $\mathrm{B} = \dfrac{2\eta\mu\frac{31\pi}{6}+\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{35\pi}{4}-2\sigma\upsilon\nu\frac{23\pi}{3}}{\sigma\varphi\frac{39\pi}{4}+\sqrt{3}\cdot\varepsilon\varphi\frac{53\pi}{6}-2\sigma\upsilon\nu\frac{34\pi}{3}}$

25. Να δείξετε ότι: $\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)+\eta\mu^2\left(x-\frac{3\pi}{8}\right)=1$

26. Να δείξετε ότι: $\eta\mu^4\frac{\pi}{12}+\eta\mu^4\frac{5\pi}{12}=1-2\eta\mu^2\frac{\pi}{12}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{12}$

27. Να δείξετε ότι: $0<\dfrac{\varepsilon\varphi(\pi-x)}{\sigma\varphi(\pi-x)-\varepsilon\varphi x}<1$

28. Να αποδεδειχθεί ότι :

i. $\eta\mu^2 70°+\eta\mu^2 20°+3\eta\mu^2 110°+\sigma\upsilon\nu^5 50°+\sigma\upsilon\nu^5 130°+3\sigma\upsilon\nu^2 70°=4$

ii. $\dfrac{\eta\mu 40°\cdot\sigma\upsilon\nu 70°}{\eta\mu 20°\cdot\sigma\upsilon\nu 50°}+\dfrac{\eta\mu 10°\cdot\sigma\upsilon\nu 55°}{\eta\mu 35°\cdot\sigma\upsilon\nu 80°}+\dfrac{\varepsilon\phi 15°\cdot\sigma\phi 65°}{\varepsilon\phi 25°\cdot\sigma\phi 75°}=3$

iii. $\eta\mu 1°+\eta\mu 2°+\ldots+\eta\mu 89°=\sigma\upsilon\nu 1°+\sigma\upsilon\nu 2°+\ldots+\sigma\upsilon\nu 89°$

iv. $\varepsilon\phi 10°\cdot\varepsilon\phi 15°\cdot\ldots\cdot\varepsilon\phi 75°\cdot\varepsilon\phi 80°=1$

v. $\varepsilon\phi 1°\cdot\varepsilon\phi 2°\cdot\ldots\cdot\varepsilon\phi 89°=1$

29. Να δείξετε ότι : $\dfrac{2\sigma\upsilon\nu^2(2015\pi-x)-1}{1-2\eta\mu(x-\pi)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}-\dfrac{\eta\mu^2\left(\frac{9\pi}{2}-x\right)-1}{1-\eta\mu^2(2016\pi-x)}=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(x-2015\pi)}$

30. Να δείξετε ότι : $\dfrac{2\sigma\upsilon\nu^2(\pi-x)-1}{1-2\eta\mu(180°+x)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}-\dfrac{\eta\mu^2\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)-1}{1-\eta\mu^2(720°-x)}=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(3\pi-x)}$

31. Αν $\varepsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και ισχύει $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης :

$$\mathrm{A} = \frac{\eta\mu(\pi + x)\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \varepsilon\phi(-x)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}.$$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

32. Δίνεται γωνία x με $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, για την οποία ισχύει :

$15\eta\mu\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu(7\pi - x) - 4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) = 12$. Να υπολογίσετε :

i. τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x,

ii. την τιμή της παράστασης : $\mathrm{A} = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{15\pi}{2} + x\right) + 2\sigma\upsilon\nu(17\pi + x)}{3\varepsilon\phi\left(\frac{11\pi}{2} - x\right) + 4\sigma\phi\left(x - \frac{17\pi}{2}\right)}$.

33. Δίνεται γωνία x με $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ και η παράσταση :

$$\mathrm{A} = \frac{\sigma\upsilon\nu(2\pi - x) - \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi - x)\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi + x)}{\eta\mu(5\pi - x) + \eta\mu(7\pi + x)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2} + x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)}.$$

i. Να δείξετε ότι : $\mathrm{A} = \varepsilon\phi x$.

ii. Αν ισχύει ότι : $\mathrm{A} = \frac{\eta\mu 10° + \sigma\upsilon\nu 160°}{\sigma\upsilon\nu 20° - \eta\mu 170°} - \frac{\eta\mu 40° + \sigma\upsilon\nu 20°}{\eta\mu 70° + \sigma\upsilon\nu 50°}$, να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο ανήκει η τελική πλευρά της γωνίας x.

iii. Να βρείτε το $\eta\mu x$ και το $\sigma\upsilon\nu x$

34. Δίνεται γωνία x για την οποία ισχύει : $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3}$.

i. Να βρείτε τα $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ και $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

ii. Να βρείτε το $\eta\mu\left(\frac{41\pi}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{14\pi}{3} + x\right) + x\right)$.

iii. Αν επιπλέον ισχύει ότι $|12x - 7\pi| < 3\pi$, να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{6} - x\right)$.

3.4 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α, λέγεται **περιοδική,** όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός Τ>0 τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in \mathrm{A}$ να ισχύει ότι :

- $x+\mathrm{T} \in \mathrm{A}$ και $x-\mathrm{T} \in \mathrm{A}$
- $f(x+\mathrm{T}) = f(x)$ και $f(x-\mathrm{T}) = f(x)$.

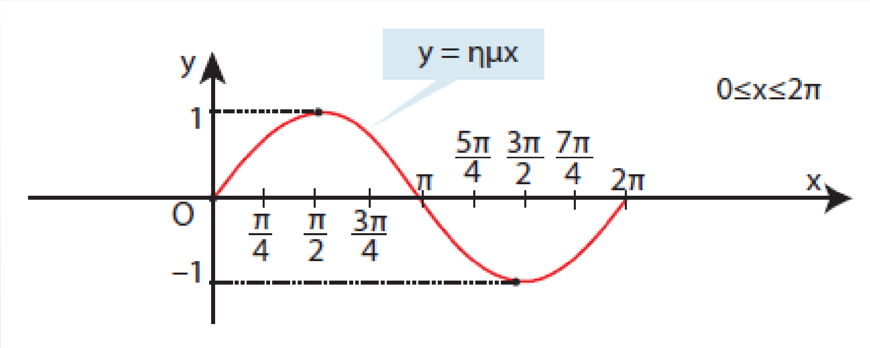
Ο αριθμός Τ λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f. Οι πιο γνωστές περιοδικές συναρτήσεις είναι οι $f(x)=\eta\mu x$, $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f(x)=\varepsilon\varphi x$ τις οποίες και θα μελετήσαμε.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x)=\eta\mu x$

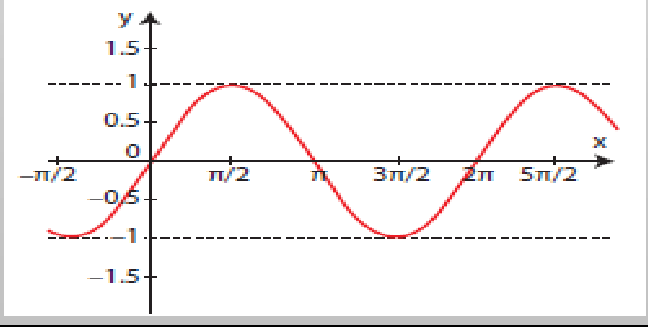
Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ έχει **πεδίο ορισμού** $\mathrm{A}=\Re$, είναι **περιοδική** με **περίοδο Τ=2π**, είναι **περιττή συνάρτηση** άρα ισχύει $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x \in \mathrm{A}=\Re$ (πράγματι : $f(-x)=\eta\mu(-x)=-\eta\mu x=-f(x)$ για κάθε $x \in \mathrm{A}=\Re$), άρα η γραφική παράσταση της f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x$ στο διάστημα μιας περιόδου Τ=2π φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημx	0 ↗	1 μεγ. ↘	0 ↘	-1 ελαχ. ↗	0

Έτσι προκύπτει και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x$ στο διάστημα μιας περιόδου Τ=2π



Επειδή η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο Τ=2π η γραφική της παράσταση έχει την ίδια μορφή και στα διαστήματα [2π,4π], [4π,6π], [-2π,0], [-4π,-2π] κτλ.



Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x)=\rho\cdot\eta\mu\omega x$

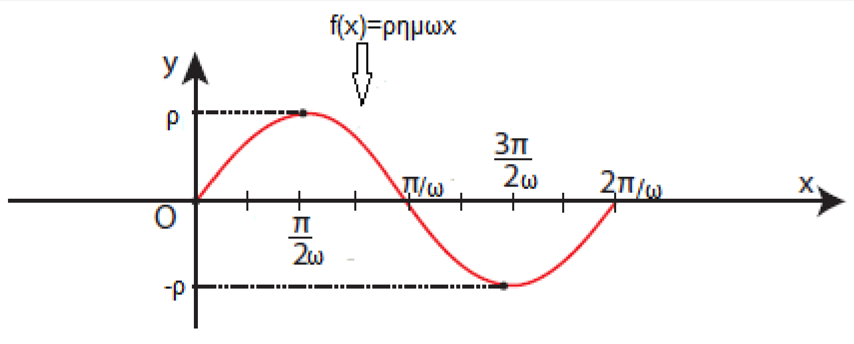
Η συνάρτηση $f(x)=\rho\cdot\eta\mu\omega x$ με $\rho,\omega>0$ είναι περιοδική με περίοδο $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{\omega}$, έχει μέγιστο το ρ και ελάχιστο το –ρ. Για να χαράξουμε τη γραφική παράσταση της $f(x)=\rho\cdot\eta\mu\omega x$ δίνουμε στο x τις βασικές τιμές $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$ και 2π αφού όμως πρώτα τις διαιρέσουμε με τον αριθμό ω. Δηλαδή : $0,\frac{\pi}{2\omega},\frac{\pi}{\omega},\frac{3\pi}{2\omega}$ και $\frac{2\pi}{\omega}$, έτσι ο βασικός πίνακας της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)=\eta\mu x$	0	1	0	-1	0

γίνεται για την $f(x)=\rho\cdot\eta\mu\omega x$:

x	0	$\frac{\pi}{2\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$
$f(x)=\rho\cdot\eta\mu\omega x$	0	ρ	0	$-\rho$	0

και η αντίστοιχη γραφική παράσταση της $f(x)=\rho\cdot\eta\mu\omega x$ στο διάστημα $\Delta=\left[0,\frac{2\pi}{\omega}\right]$ παίρνει τη μορφή :



<u>Παρατηρήσεις :</u>

- Αν έχω να σχεδιάσω τη συνάρτηση $f(x)=\rho\cdot\eta\mu\omega x+\alpha$, τότε σχεδιάζουμε πρώτα την $f(x)=\rho\cdot\eta\mu\omega x$ και μετατοπίζουμε τη γραφική παράσταση της f προς τα πάνω αν α>0 ή προς τα κάτω αν α<0, κατά α μονάδες.
- Αν έχω να σχεδιάσω τη συνάρτηση $f(x)=-\rho\cdot\eta\mu\omega x$, τότε σχεδιάζουμε πρώτα την $f(x)=\rho\cdot\eta\mu\omega x$ και μετά παίρνουμε τη συμμετρική της ως προς τον άξονα x΄x.

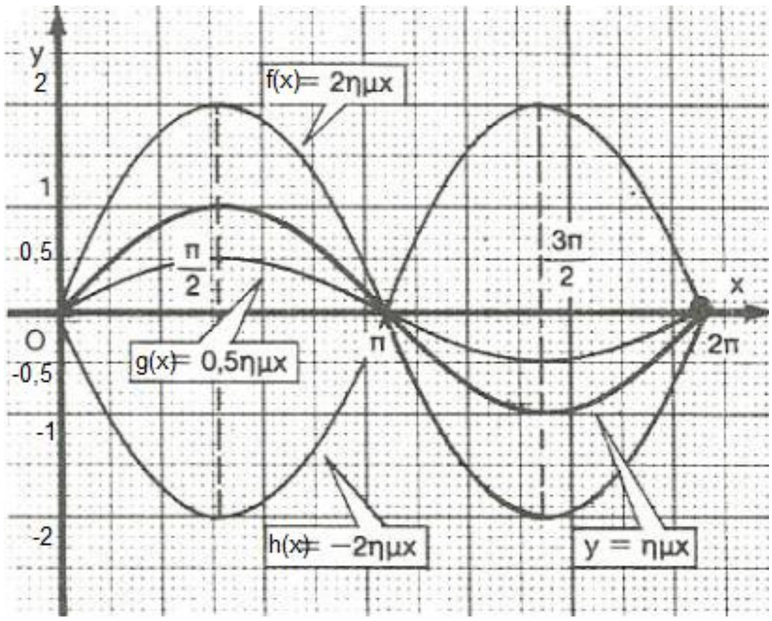
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 81 Α΄ ομάδας)
Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, κάθε φορά στο ίδιο σύστημα αξόνων.
i. $f(x) = 2\eta\mu x$, $g(x) = 0{,}5\eta\mu x$, $h(x) = -2\eta\mu x$, $0 \le x \le 2\pi$

Λύση :
i. Για τις συναρτήσεις $f(x) = 2\eta\mu x$, $g(x) = 0{,}5\eta\mu x$, $h(x) = -2\eta\mu x$ ισχύει : $T = 2\pi$ άρα σχηματίζουμε τον πίνακα :

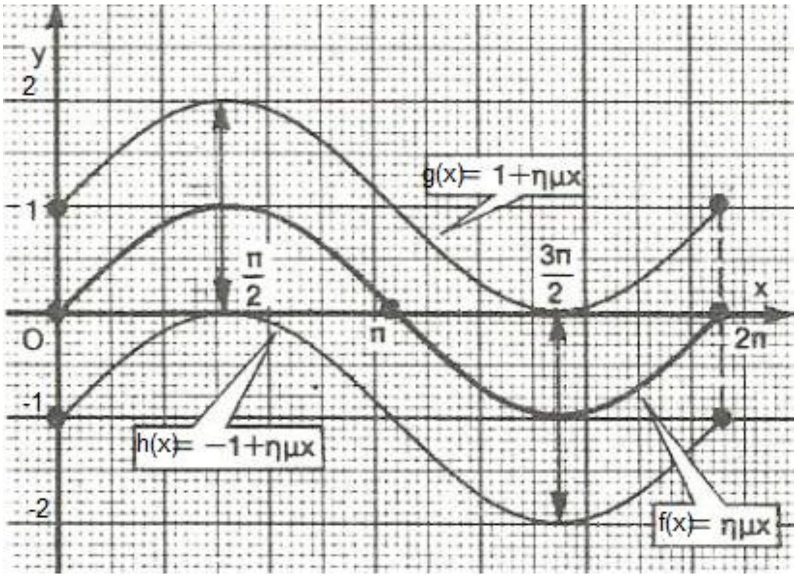
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0
$f(x) = 2\eta\mu x$	0	2	0	-2	0
$g(x) = 0{,}5\eta\mu x$	0	$0{,}5$	0	$-0{,}5$	0
$h(x) = -2\eta\mu x$	0	-2	0	2	0

Οπότε προκύπτουν οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων :



2. (Άσκηση 2 σελ. 81 Α΄ ομάδας)
Σε ένα σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ και στη συνέχεια τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = 1 + \eta\mu x$ και $h(x) = -1 + \eta\mu x$.

Λύση :
Η γραφική παράσταση της $g(x) = 1 + \eta\mu x$ προκύπτει αν μεταφέρουμε κατακόρυφα κατά μια μονάδα προς τα πάνω τη γραφική παράσταση της $f(x) = \eta\mu x$, ενώ της $h(x) = -1 + \eta\mu x$ αν μεταφέρουμε κατακόρυφα κατά μια μονάδα προς τα κάτω τη γραφική παράσταση της $f(x) = \eta\mu x$.



3. (Άσκηση 3 σελ. 81 Α΄ ομάδας)
Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

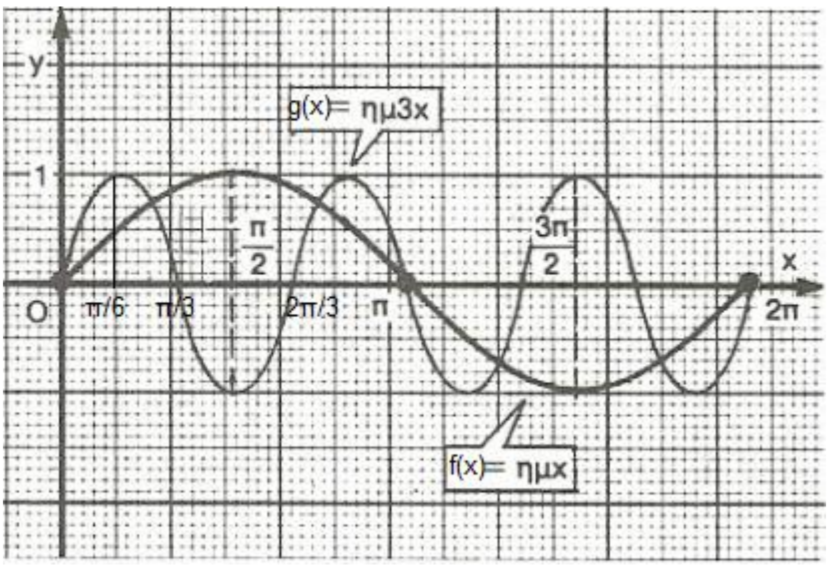
$$f(x) = \eta\mu x \quad \text{και} \quad g(x) = \eta\mu 3x \qquad 0 \le x \le 2\pi$$

Λύση :

Η συνάρτηση $g(x) = \eta\mu 3x$ είναι περιοδική με περίοδο $\mathrm{T} = \dfrac{2\pi}{\omega}$, άρα τις βασικές τιμές $0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}$ και 2π θα τις διαιρέσουμε με το 3. Δηλαδή : $0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}$ και $\dfrac{2\pi}{3}$, έτσι ο βασικός πίνακας της συνάρτησης $g(x) = \eta\mu 3x$:

$3x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$g(x) = \eta\mu 3x$	0	1	0	-1	0

Έτσι οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \eta\mu 3x$ είναι :



4. (Άσκηση 5 σελ. 81 Α΄ ομάδας)

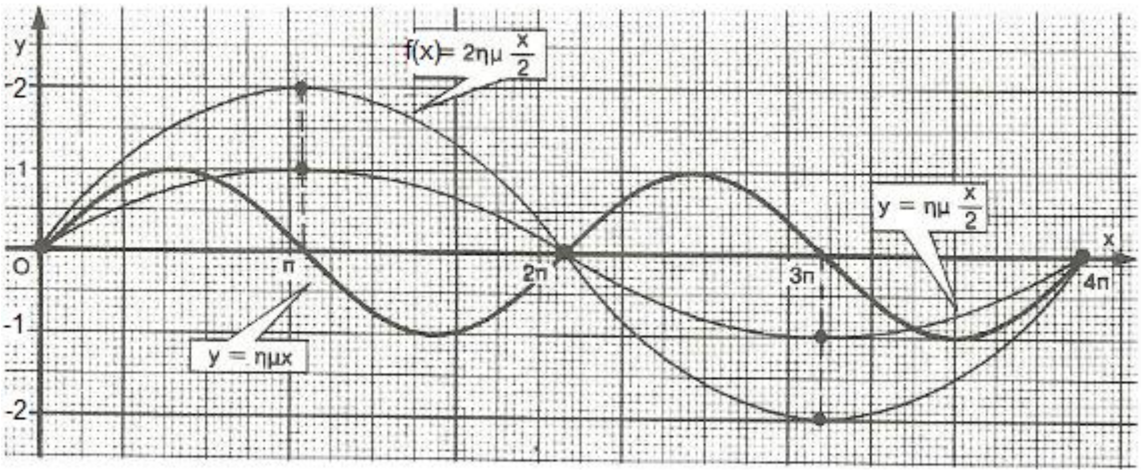
Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu\dfrac{x}{2}$. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής; Ποια είναι η περίοδος της εν λόγω συνάρτησης; Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x)$ σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

<u>Λύση :</u>

Η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu\dfrac{x}{2}$ είναι της μορφής $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x$, με $\rho = 2$ και $\omega = \dfrac{1}{2}$. Άρα έχει μέγιστη τιμή $\rho = 2$ και ελάχιστη τιμή $-\rho = -2$. Η περίοδος της συνάρτησης είναι $\mathrm{T} = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, άρα τις βασικές τιμές $0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}$ και 2π θα τις διαιρέσουμε με το $\dfrac{1}{2}$ ή αλλιώς θα τις πολλαπλασιάσουμε επί 2 δηλαδή : $0, \pi, 2\pi, 3\pi$ και 4π, έτσι ο βασικός πίνακας της συνάρτησης $f(x) = 2\eta\mu\dfrac{x}{2}$:

$\dfrac{x}{2}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
x	0	π	2π	3π	4π
$f(x) = 2\eta\mu\dfrac{x}{2}$	0	2	0	-2	0

Με τη βοήθεια του πίνακα σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = 2\eta\mu\dfrac{x}{2}$:

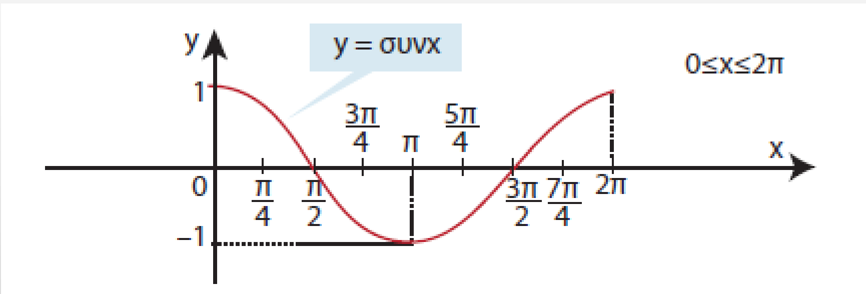


Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$

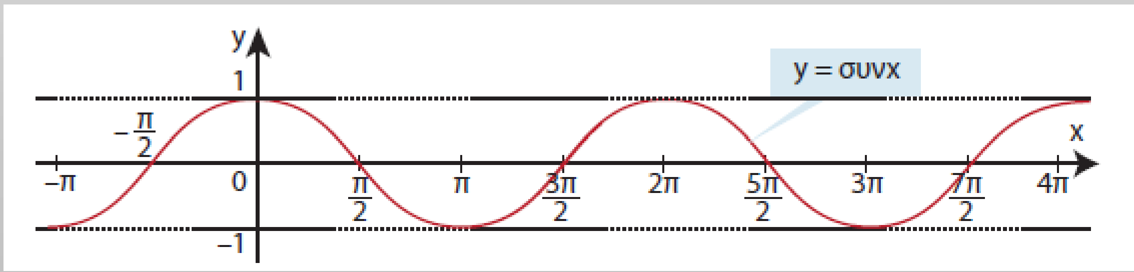
Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ έχει **πεδίο ορισμού** $\mathrm{A}=\Re$, είναι **περιοδική** με **περίοδο Τ=2π**, είναι **άρτια συνάρτηση** άρα ισχύει $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in \mathrm{A}=\Re$ (πράγματι : $f(-x)=\sigma\upsilon\nu(-x)=\sigma\upsilon\nu x=f(x)$ για κάθε $x\in \mathrm{A}=\Re$), άρα η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y. Η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα μιας περιόδου Τ=2π φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
συνx	1 μεγ.	$\searrow$	0	$\searrow$	-1 ελαχ.	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1 μεγ.

Έτσι προκύπτει και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα μιας περιόδου Τ=2π



Επειδή η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδική με περίοδο Τ=2π η γραφική της παράσταση έχει την ίδια μορφή και στα διαστήματα [2π,4π], [4π,6π], [-2π,0], [-4π,-2π] κτλ.



Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x)=\rho\cdot \sigma\upsilon\nu\omega x$

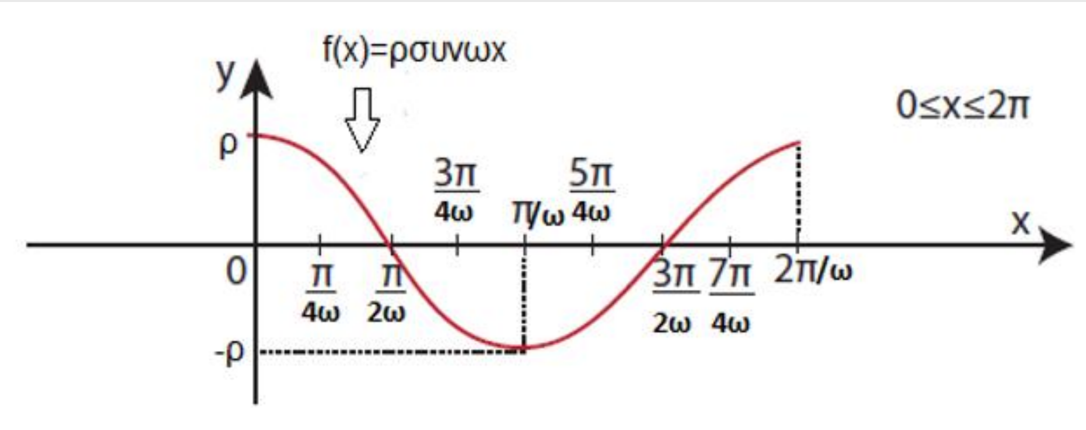
Η συνάρτηση $f(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu\omega x$ με $\rho,\omega>0$ είναι περιοδική με περίοδο $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{\omega}$, έχει μέγιστο το ρ και ελάχιστο το –ρ. Για να χαράξουμε τη γραφική παράσταση της $f(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu\omega x$ δίνουμε στο x τις βασικές τιμές $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$ και 2π αφού όμως πρώτα τις διαιρέσουμε με τον αριθμό ω. Δηλαδή : $0,\frac{\pi}{2\omega},\frac{\pi}{\omega},\frac{3\pi}{2\omega}$ και $\frac{2\pi}{\omega}$, έτσι ο βασικός πίνακας της συνάρτησης $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	1	0	-1	0	1

γίνεται για την $f(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu\omega x$:

x	0	$\frac{\pi}{2\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$
$f(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu\omega x$	ρ	0	$-\rho$	0	ρ

και η αντίστοιχη γραφική παράσταση της $f(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu\omega x$ στο διάστημα $\Delta=\left[0,\frac{2\pi}{\omega}\right]$ παίρνει τη μορφή :



<u>Παρατηρήσεις :</u>

- Αν έχω να σχεδιάσω τη συνάρτηση $f(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu\omega x+\alpha$, τότε σχεδιάζουμε πρώτα την $f(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu\omega x$ και μετατοπίζουμε τη γραφική παράσταση της f προς τα πάνω αν α>0 ή προς τα κάτω αν α<0, κατά α μονάδες.
- Αν έχω να σχεδιάσω τη συνάρτηση $f(x)=-\rho\cdot\sigma\upsilon\nu\omega x$, τότε σχεδιάζουμε πρώτα την $f(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu\omega x$ και μετά παίρνουμε τη συμμετρική της ως προς τον άξονα x΄x.

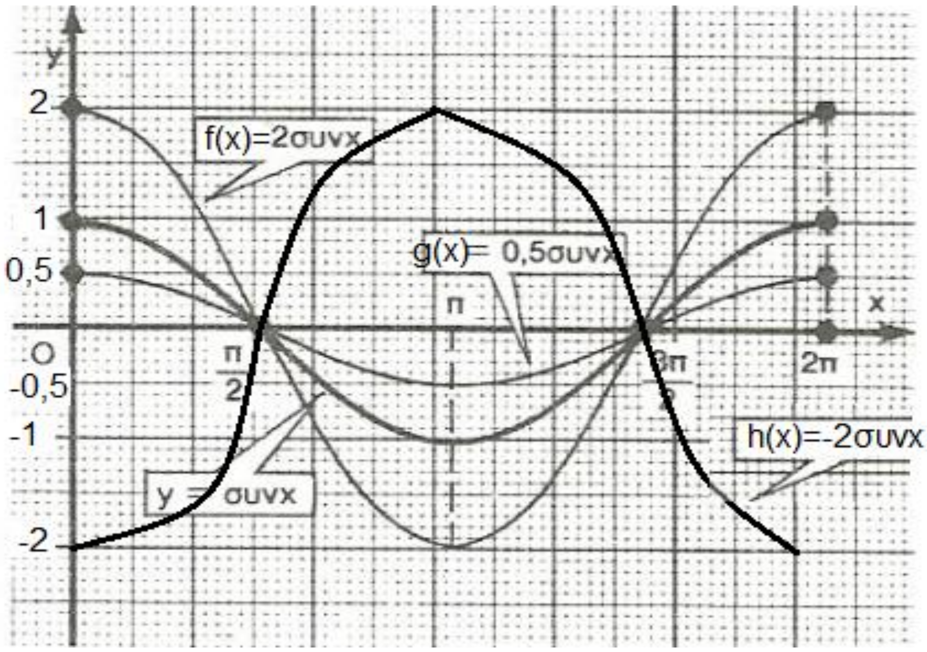
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5. (Άσκηση 1 σελ. 81 Α΄ ομάδας)
Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, κάθε φορά στο ίδιο σύστημα αξόνων.
ii. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$, $\quad g(x) = 0{,}5\sigma\upsilon\nu x$, $\quad h(x) = -2\sigma\upsilon\nu x \quad 0 \le x \le 2\pi$

Λύση :
ii. Για τις συναρτήσεις $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = 0{,}5\sigma\upsilon\nu x$, $h(x) = -2\sigma\upsilon\nu x$ ισχύει : $\mathrm{T} = 2\pi$
άρα σχηματίζουμε τον πίνακα :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sigma\upsilon\nu x$	1	0	-1	0	1
$f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$	2	0	-2	0	2
$g(x) = 0{,}5\sigma\upsilon\nu x$	$0{,}5$	0	$-0{,}5$	0	$0{,}5$
$h(x) = -2\sigma\upsilon\nu x$	-2	0	2	0	-2

Οπότε προκύπτουν οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων :



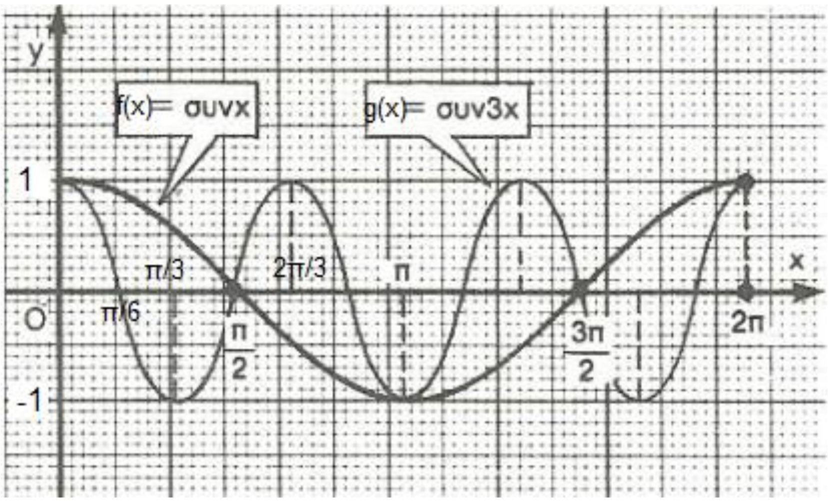
6. (Άσκηση 4 σελ. 81 Α΄ ομάδας)
Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x \quad \text{και} \quad g(x) = \sigma\upsilon\nu 3x \quad\quad 0 \le x \le 2\pi$$

Λύση :
Η συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$ είναι περιοδική με περίοδο $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}$, άρα τις βασικές τιμές $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ και 2π θα τις διαιρέσουμε με το 3. Δηλαδή : $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ και $\frac{2\pi}{3}$, έτσι ο βασικός πίνακας της συνάρτησης $g(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$:

$3x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$g(x)=\sigma\upsilon\nu 3x$	1	0	-1	0	1

Έτσι οι γραφικές παραστάσεις των $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu 3x$ είναι :



7. (Άσκηση 6 σελ. 82 Α΄ ομάδας)

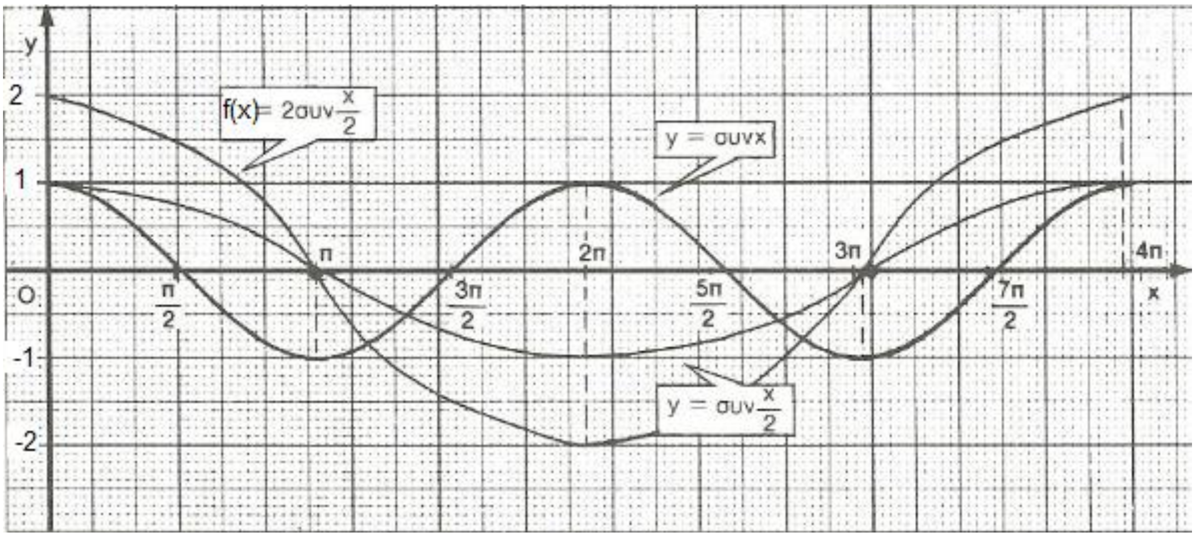
Έστω η συνάρτηση $f(x)=2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$. Ποια είναι η μεγίστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής; Ποια είναι η περίοδος της εν λόγω συνάρτησης; Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x)$ σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

<u>Λύση :</u>

Η συνάρτηση $f(x)=2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$ είναι της μορφής $f(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu\omega x$, με $\rho=2$ και $\omega=\frac{1}{2}$. Άρα έχει μεγίστη τιμή $\rho=2$ και ελάχιστη τιμή $-\rho=-2$. Η περίοδος της συνάρτησης είναι $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$, άρα τις βασικές τιμές $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$ και 2π θα τις διαιρέσουμε με το $\frac{1}{2}$ ή αλλιώς θα τις πολλαπλασιάσουμε επί 2 δηλαδή : $0,\pi,2\pi,3\pi$ και 4π, έτσι ο βασικός πίνακας της συνάρτησης $f(x)=2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$:

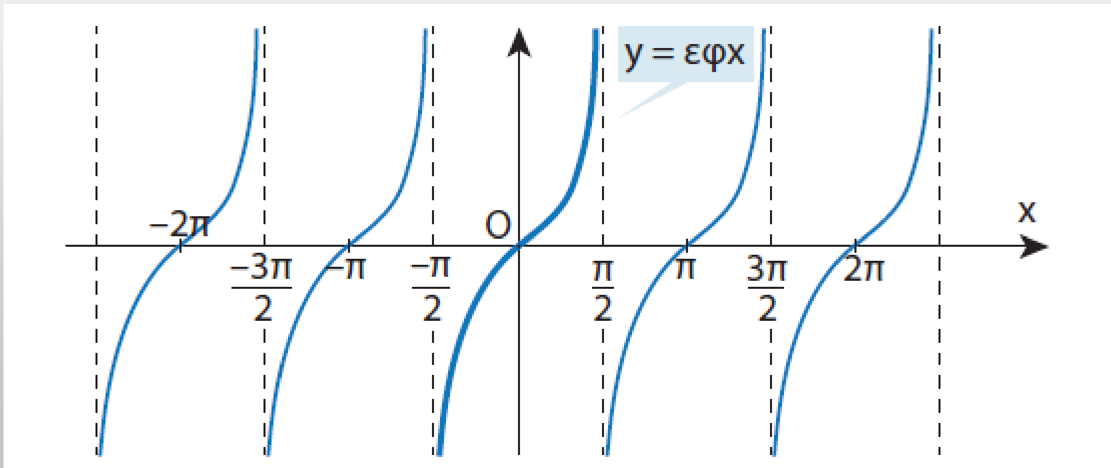
$\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	π	2π	3π	4π
$f(x)=2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$	2	0	-2	0	2

Με τη βοήθεια του πίνακα σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $f(x)=2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$:



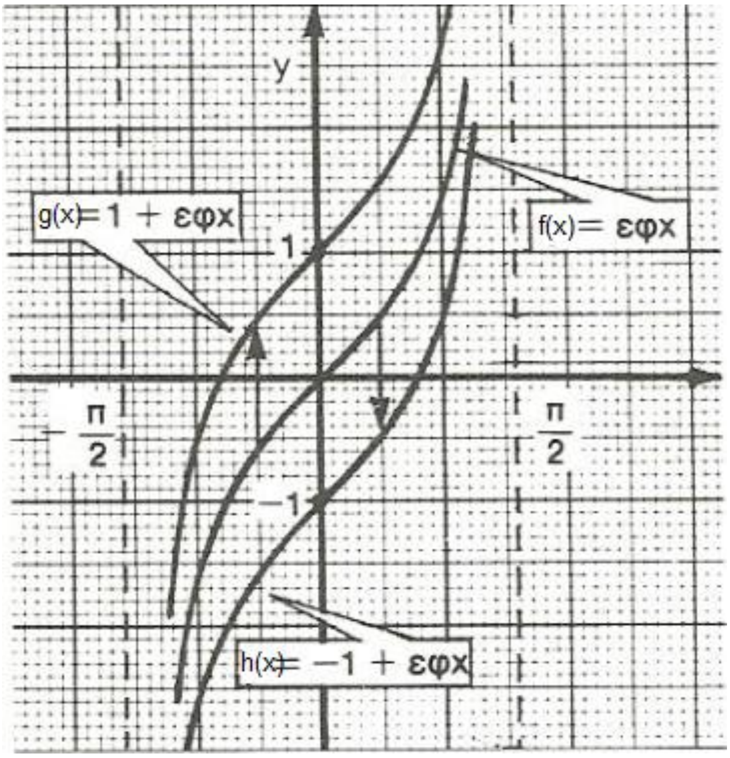
Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \varepsilon\varphi x$

Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ έχει **πεδίο ορισμού** $A = \Re - \left\{x \,/\, x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in Z\right\}$, είναι **περιοδική** με **περίοδο Τ=π**, είναι **περιττή συνάρτηση** άρα ισχύει $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A = \Re$ (πράγματι : $f(-x) = \varepsilon\varphi(-x) = -\varepsilon\varphi x = -f(x)$ για κάθε $x \in A$), άρα η γραφική παράσταση της f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων. Ορίζεται στο διάστημα $\Delta = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ αλλά και σε κάθε διάστημα της μορφής $\Delta_\kappa = \left(\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ στα οποία είναι γνησίως αύξουσα και δεν έχει ακρότατα. Τέλος έχει ασύμπτωτες τις κατακόρυφες ευθείες $x = -\frac{\pi}{2}$ και $x = \frac{\pi}{2}$ και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα :



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

8. (Άσκηση 7 σελ. 82 Α΄ ομάδας)
Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :
i. $f(x) = \varepsilon\varphi x$ ii. $g(x) = 1 + \varepsilon\varphi x$ iii. $h(x) = -1 + \varepsilon\varphi x$
στο ίδιο σύστημα αξόνων.
Λύση :
Η γραφική παράσταση της $g(x) = 1 + \varepsilon\varphi x$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x) = \varepsilon\varphi x$ κατά μια μονάδα προς τα πάνω, ενώ της $h(x) = -1 + \varepsilon\varphi x$ κατά μια μονάδα προς τα κάτω. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

9. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

i. Αν η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο T, τότε

   f(x+T)=……..….=…………
ii. Η συνάρτηση f(x)=συνx έχει σύνολο τιμών το …………….
iii. Η γραφική παράσταση της f(x)=ημx λέγεται ………………
iv. Η συνάρτηση f(x)=εφx έχει πεδίο ορισμού το σύνολο R_1={x∈R/…………………}
v. Η συνάρτηση f(x)=ρημωx , ρ,ω>0 έχει περίοδο T= ………., μέγιστη τιμή …………..και ελάχιστη τιμή ……………..

10. i. Να συμπληρώσετε με τα σύμβολα ↑,↓ τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α. Αν f(x)=ημx, τότε f … $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

β. Αν f(x)=συνx ,τότε f …$[\pi, 2\pi]$.

γ. Αν f(x)=εφx, τότε f …$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

δ. Αν f(x)=-2ημx, τότε f …$\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

ii. Να συμπληρώσετε με τα σύμβολα <, > τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α. Αν 0<α<β<$\dfrac{\pi}{2}$, τότε συνα…συνβ

β. Αν 0<α<β<$\dfrac{\pi}{2}$, τότε εφα…εφβ

γ. Αν $\dfrac{\pi}{2}$<α<β<$\dfrac{3\pi}{2}$,τότε ημα…ημβ

δ. Αν 1<α<1,5 , τότε ημα…ημ1

ε. συν1…συν2

στ. Αν x∈(2,3) , τότε ημ3…ημx…ημ2

ζ. Αν x∈$(0,\dfrac{\pi}{4})$,τότε εφx…εφ2x

11. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό(Σ) ή Λάθος(Λ).

i. Η συνάρτηση f(x)=εφx έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

ii. Η συνάρτηση f(x)=ημx είναι άρτια.

iii. Η συνάρτηση f(x)=2συνx έχει σύνολο τιμών το [-2,2].

iv. Η συνάρτηση f(x)=συν2x έχει βασική περίοδο το 2π.

v. Η συνάρτηση f(x)=εφx έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

12. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές.

i. $f(x) = \eta\mu 2x + x$

ii. $f(x) = \eta\mu 5x + \eta\mu 3x$

iii. $f(x) = \eta\mu x + \varepsilon\phi x$

13. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες.

i. $f(x) = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x + 1$

ii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu 2x$

14. Να αποδείξετε ότι :

i. η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + 1$ έχει περίοδο τον αριθμό Τ=2π.

ii. η συνάρτηση $f(x) = 3\varepsilon\phi x + \sigma\phi x$ έχει περίοδο τον αριθμό Τ=π.

15. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων :

i. $f(x) = 4\eta\mu x$

ii. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x$

iii. $f(x) = -3\eta\mu 3x$

iv. $f(x) = 5\sigma\upsilon\nu 3x$

16. Να βρείτε την περίοδο των συναρτήσεων :

i. $f(x) = 3\eta\mu 2x$

ii. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 3x$

iii. $f(x) = 5\eta\mu \dfrac{x}{2}$

iv. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \dfrac{x}{3}$

17. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \eta\mu 2x$ $0 \le x \le 2\pi$

ii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$ $0 \le x \le 2\pi$

iii. $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = 3\eta\mu x$ $h(x) = -\eta\mu x$

iv. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$ $h(x) = -\sigma\upsilon\nu x$

v. $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \eta\mu x + 2$ $h(x) = \eta\mu x - 1$

vi. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + 1$ $h(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - 1$

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu \dfrac{x}{2}$

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού Α της f

ii. Να βρείτε τα ακρότατα της f

iii. Να βρείτε την περίοδο της f

iv. Να σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f καθώς και της συνάρτησης $g(x) = -f(x)$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x$

i. Να βρείτε τα ακρότατα της f

ii. Να βρείτε την περίοδο της f

iii. Να σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f

iv. Να σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $-f$

v. Να σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $|f|$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu(\pi - 2x) + \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3\eta\mu 2x$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f

ii. Να βρείτε την περίοδο και τα ακρότατα της f

iii. Να σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f

iv. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 4$ έχει λύση.

21. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{3}$ διέρχεται από το σημείο Μ(2π,-2)

i. Να βρείτε την περίοδο και τα ακρότατα της f

ii. Να σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f

22. Αν η συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{\beta}$ με $\alpha,\beta>0$ έχει μέγιστο το 2 και περίοδο τον αριθμό Τ=6π, να βρείτε :

i. Τον τύπο της συνάρτησης

ii. Τις τιμές $f(2\pi)$ και $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

23. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\alpha\cdot\eta\mu 2x$ με $\alpha>0$ η οποία έχει μέγιστο το 3.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και την τιμή του α.

ii. Να βρείτε την περίοδο της f

iii. Να σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f καθώς και της συνάρτησης $g(x)=-f(x)$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=4$ είναι αδύνατη.

24. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\kappa+3+2\eta\mu\dfrac{(2\lambda+1)x}{3}$ και $g(x)=6\lambda+10-3\sigma\upsilon\nu\dfrac{(\kappa-2)x}{4}$. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ αν είναι γνωστό ότι έχουν την ίδια μέγιστη τιμή και η περίοδος της f είναι τριπλάσια από την περίοδο της g .

25. Να εξετάσετε, αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιοδικές και να βρείτε την περίοδο τους.

i. $f(x)=\eta\mu 2x$ ii. $f(x)=2\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{3}$ iii. $f(x)=\varepsilon\varphi\dfrac{\pi x}{2}$

26. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2\eta\mu x$ και $g(x)=2\eta\mu\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+3$.

i. Από ποιες μετατοπίσεις της C_f προκύπτει η C_g ;

ii. Να σχεδιάσετε τη C_f και τη C_g , στο ίδιο σύστημα αξόνων.

27. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i. $f(x)=-2+\eta\mu x$ ii. $f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

iii. $f(x)=1+\eta\mu\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ iv. $f(x)=3\eta\mu\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

28. Αν η συνάρτηση $f(x)=(2-\alpha)\cdot\eta\mu(\beta x)$, α>2 και β>0 έχει περίοδο το $\dfrac{\pi}{2}$ και μέγιστη τιμή το 3, να βρείτε τα α και β.

29. Έστω η συνάρτηση : $f(x)=\frac{2}{3}\eta\mu\frac{x}{3}$.

i. Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f.
ii. Να βρείτε την περίοδο της f.
iii. Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών και τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους ίσο με τη περίοδο της f.
iv. Να λύσετε γραφικά: α) Την εξίσωση f(x)=0, στο [0,6π]
β) Την ανίσωση f(x)>0, στο [0,6π].

30. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f(x)=|ημx| στο διάστημα [0,2π].

31. Η θερμοκρασία σε βαθμούς κελσίου μιας ημέρας σε ένα χώρο περιγράφεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση $\Theta=10\eta\mu\frac{\pi t}{12}$, όπου t ο χρόνος σε ώρες.

i. Πόση είναι η μέγιστη μεταβολή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου;
ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για : 0≤t≤24.
iii. Ποιες χρονικές στιγμές η θερμοκρασία ήταν: α) 0^0 C β)κάτω από 0^0 C

32. Να εξετάσετε αν καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτια ή περιττή :

i. $f(x)=x\eta\mu\frac{1}{x}-3\sigma\upsilon\nu 2x$
ii. $f(x)=\frac{\eta\mu^2 x}{x}-2\varepsilon\varphi x$
iii. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu^2 x$
iv. $f(x)=\varepsilon\phi x-x\cdot\sigma\upsilon\nu x$
v. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-|\eta\mu x|$

33. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu\frac{x}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}$ έχει περίοδο Τ=12π.

34. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις :

i. $f(x)=2x^5+3\eta\mu x$ στο διάστημα $\mathrm{A}=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
ii. $f(x)=3\sigma\upsilon\nu x+\frac{2}{x}$ στο διάστημα $\mathrm{A}=(0,\pi)$

35. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $\mathrm{A}=[0,2\pi]$. Στη συνέχεια να συγκρίνεται τους τριγωνομετρικούς αριθμούς :

i. $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8}$ ii. $\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{10}$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{9\pi}{10}$ iii. $\sigma\upsilon\nu\frac{13\pi}{12}$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{12}$

36. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ στο διάστημα $\mathrm{A}=[0,2\pi]$. Στη συνέχεια να συγκρίνεται τους τριγωνομετρικούς αριθμούς :

i. $\eta\mu\frac{\pi}{5}$ και $\eta\mu\frac{29\pi}{7}$ ii. $\eta\mu\frac{7\pi}{12}$ και $\eta\mu\frac{35\pi}{12}$ iii. $\eta\mu\frac{6\pi}{5}$ και $\eta\mu\frac{73\pi}{10}$

3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : $\boxed{\eta\mu x=\alpha}$, $\boxed{\sigma\upsilon\nu x=\alpha}$, $\boxed{\varepsilon\phi x=\alpha}$ ΚΑΙ $\boxed{\sigma\phi x=\alpha}$

- Αν θ είναι μια λύση της εξίσωσης $\eta\mu x=\alpha$ τότε :

$$\boxed{\eta\mu x=\eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\theta \\ \acute{\eta} \\ x=2\kappa\pi+(\pi-\theta) \end{cases} ,\kappa\in Z}$$

- Αν θ είναι μια λύση της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x=\alpha$ τότε :

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\theta \\ \acute{\eta} \\ x=2\kappa\pi-\theta \end{cases} ,\kappa\in Z}$$

- Αν θ είναι μια λύση της εξίσωσης $\varepsilon\phi x=\alpha$ τότε :

$$\boxed{\varepsilon\phi x=\varepsilon\phi\theta \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\theta \;,\; \kappa\in Z}$$

- Αν θ είναι μια λύση της εξίσωσης $\sigma\phi x=\alpha$ τότε :

$$\boxed{\sigma\phi x=\sigma\phi\theta \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\theta \;,\; \kappa\in Z}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ : ΠΩΣ ΔΙΩΧΝΩ ΤΟ « - » (ΜΕΙΟΝ)

1. $-\eta\mu x=\eta\mu(-x)$
2. $-\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu(\pi-x)$
3. $-\varepsilon\phi x=\varepsilon\phi(-x)$
4. $-\sigma\phi x=\sigma\phi(-x)$

- Σε όλους τους παραπάνω τύπους των x,θ μπορεί να καταλαμβάνουν διάφορες παραστάσεις της μορφής $f(x),g(x)$.
- Σε εξισώσεις με $\varepsilon\phi x$ παίρνουμε περιορισμό $\sigma\upsilon\nu x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$.
- Σε εξισώσεις με $\sigma\phi x$ παίρνουμε περιορισμό $\eta\mu x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\kappa\pi$, $\kappa\in Z$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

Α. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ

1. (Άσκηση 1 σελ. 88 Α΄ ομάδας)
Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $\eta\mu x=0$ ii. $\eta\mu x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ iii. $\sigma\upsilon\nu x=0$ iv. $\sigma\upsilon\nu x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Λύση :

i. $\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + 0 \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + (\pi - 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \pi \end{cases}, \kappa \in Z$

ii. $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}, \kappa \in Z$

iii. $\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad, \kappa \in Z$

iv. $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad, \kappa \in Z$

2. (Άσκηση 2 σελ. 88 Α΄ ομάδας)
Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$ ii. $\eta\mu x = -1$ iii. $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ iv. $\sigma\upsilon\nu x = -1$

Λύση :

i. $\eta\mu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in Z$

ii. $\eta\mu x = -1 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in Z$

iii. $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{3\pi}{4}, \kappa \in Z$

iv. $\sigma\upsilon\nu x=-1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-\sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu(\pi-0) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\pi$ $,\kappa\in Z$

3. (Άσκηση 3 σελ. 88 Α΄ ομάδας)
Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $\varepsilon\phi x=0$ ii. $\varepsilon\phi x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ iii. $\sigma\phi x=1$ iv. $\sigma\phi x=\sqrt{3}$

Λύση :

i. Επειδή : $\varepsilon\phi x=\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ πρέπει $\sigma\upsilon\nu x\neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\neq\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x\neq\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \kappa\in Z$

Έτσι έχω : $\varepsilon\phi x=0 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x=\varepsilon\phi 0 \Leftrightarrow x=\kappa\pi+0 \Leftrightarrow x=\kappa\pi\ ,\kappa\in Z$

ii. Επειδή : $\varepsilon\phi x=\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ πρέπει $\sigma\upsilon\nu x\neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\neq\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x\neq\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \kappa\in Z$

Έτσι έχω : $\varepsilon\phi x=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x=\varepsilon\phi\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{6}\ ,\kappa\in Z$

iii. Επειδή : $\sigma\phi x=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ πρέπει $\eta\mu x\neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x\neq\eta\mu 0 \Leftrightarrow x\neq\kappa\pi\ ,\kappa\in Z$

Έτσι έχω : $\sigma\phi x=1 \Leftrightarrow \sigma\phi x=\sigma\phi\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4}\ ,\kappa\in Z$

iv. Επειδή : $\sigma\phi x=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ πρέπει $\eta\mu x\neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x\neq\eta\mu 0 \Leftrightarrow x\neq\kappa\pi\ ,\kappa\in Z$

Έτσι έχω : $\sigma\phi x=\sqrt{3} \Leftrightarrow \sigma\phi x=\sigma\phi\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{6}\ ,\kappa\in Z$

4. (Άσκηση 4 σελ. 88 Α΄ ομάδας)
Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $\varepsilon\phi x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ii. $\sigma\phi x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Λύση :

i. Επειδή : $\varepsilon\phi x=\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ πρέπει $\sigma\upsilon\nu x\neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\neq\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x\neq\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \kappa\in Z$

Έτσι έχω : $\varepsilon\phi x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x=-\varepsilon\phi\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x=\varepsilon\phi\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x=\kappa\pi-\dfrac{\pi}{6}\ ,\kappa\in Z$

ii. Επειδή : $\sigma\phi x=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ πρέπει $\eta\mu x\neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x\neq\eta\mu 0 \Leftrightarrow x\neq\kappa\pi\ ,\kappa\in Z$

Έτσι έχω : $\sigma\phi x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \sigma\phi x=-\sigma\phi\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sigma\phi x=\sigma\phi\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x=\kappa\pi-\dfrac{\pi}{3}\ ,\kappa\in Z$

Β. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΜΕ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

5. (Άσκηση 5 σελ. 88 Α΄ ομάδας)
Να λύσετε τις εξισώσεις :
i. $(1-\eta\mu x)(2\eta\mu x-\sqrt{3})=0$ ii. $(2\eta\mu x+\sqrt{2})(1-\sigma\upsilon\nu x)=0$

Λύση :

i. $(1-\eta\mu x)(2\eta\mu x-\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow$

- $1-\eta\mu x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=1 \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2} \\ \acute{\eta} \\ x=2\kappa\pi+\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2} \\ \acute{\eta} \\ x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2} \end{cases}$
$,\kappa \in Z$

ή

- $2\eta\mu x-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x=\sqrt{3} \Leftrightarrow \eta\mu x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \\ \acute{\eta} \\ x=2\kappa\pi+\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \\ \acute{\eta} \\ x=2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3} \end{cases} ,\kappa \in Z$

ii. $(2\eta\mu x+\sqrt{2})(1-\sigma\upsilon\nu x)=0 \Leftrightarrow$

- $2\eta\mu x+\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x=-\sqrt{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=-\eta\mu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4} \\ \acute{\eta} \\ x=2\kappa\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4} \\ \acute{\eta} \\ x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{4} \end{cases} ,\kappa \in Z$

ή

- $1-\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm 0 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi \ ,\kappa \in Z$

6. (Άσκηση 6 σελ. 88 Α΄ ομάδας)
Να λύσετε τις εξισώσεις :
i. $(\sqrt{3}+\varepsilon\varphi x)(1-\varepsilon\varphi x)=0$ ii. $(2\sigma\upsilon\nu x+1)(\varepsilon\varphi^2 x-3)\sigma\varphi x=0$

Λύση :

i. Επειδή : $\varepsilon\varphi x=\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ πρέπει $\sigma\upsilon\nu x\neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\neq \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x\neq \kappa\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$ $,\kappa\in Z$

$(\sqrt{3}+\varepsilon\varphi x)(1-\varepsilon\varphi x)=0 \Leftrightarrow$

- $\sqrt{3}+\varepsilon\varphi x=0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=-\sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=-\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x=\kappa\pi-\dfrac{\pi}{3}$ $,\kappa\in Z$

ή

- $1-\varepsilon\varphi x=0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4}$ $,\kappa\in Z$

ii. Επειδή : $\varepsilon\varphi x=\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ πρέπει $\sigma\upsilon\nu x\neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\neq \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x\neq 2\kappa\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$ $,\kappa\in Z$

Επειδή : $\sigma\varphi x=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ πρέπει $\eta\mu x\neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x\neq \eta\mu 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2\kappa\pi \\ \kappa\alpha\iota \\ x\neq 2\kappa\pi+\pi \end{cases}$

Έτσι έχω : $(2\sigma\upsilon\nu x+1)(\varepsilon\varphi^2 x-3)\sigma\varphi x=0 \Leftrightarrow$

- $2\sigma\upsilon\nu x+1=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x=-1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\dfrac{2\pi}{3}$ $,\kappa\in Z$

ή

- $\varepsilon\varphi^2 x-3=0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2 x=3 \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon\varphi x=\sqrt{3} \\ \acute{\eta} \\ \varepsilon\varphi x=-\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{3} \\ \acute{\eta} \\ \varepsilon\varphi x=-\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{3} \\ \acute{\eta} \\ \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{3} \\ \acute{\eta} \\ x=\kappa\pi-\dfrac{\pi}{3} \end{cases} ,\kappa\in Z$$

ή

- $\sigma\varphi x=0 \Leftrightarrow \sigma\varphi x=\sigma\varphi\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}$ απορρίπτεται λόγω περιορισμού.

Γ. <u>ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ</u> : ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\eta\mu\left(f(x)\right)=\eta\mu\left(g(x)\right)$ ή $\sigma\upsilon\nu\left(f(x)\right)=\sigma\upsilon\nu\left(g(x)\right)$ ή $\varepsilon\phi\left(f(x)\right)=\varepsilon\phi\left(g(x)\right)$ ή $\sigma\phi\left(f(x)\right)=\sigma\phi\left(g(x)\right)$

7. (Άσκηση 8 σελ. 88 Α΄ ομάδας)
Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $2\eta\mu 3x=\sqrt{3}$ ii. $\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{5}+1=0$ iii. $3\varepsilon\phi\dfrac{2x}{7}-\sqrt{3}=0$

<u>Λύση :</u>

i. $$2\eta\mu 3x=\sqrt{3}\Leftrightarrow \eta\mu 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \eta\mu 3x=\eta\mu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \begin{cases}3x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{3}\\ \acute{\eta}\\ 3x=2\kappa\pi+\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{3}\\ \acute{\eta}\\ 3x=2\kappa\pi+\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2\kappa\pi}{3}+\dfrac{\pi}{9}\\ \acute{\eta}\\ x=\dfrac{2\kappa\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{9}\end{cases},\kappa\in Z$$

ii. $$\sigma\upsilon\nu\frac{x}{5}+1=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{x}{5}=-1\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{x}{5}=-\sigma\upsilon\nu 0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{x}{5}=\sigma\upsilon\nu(\pi-0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{x}{5}=\sigma\upsilon\nu\pi\Leftrightarrow \frac{x}{5}=2\kappa\pi\pm\pi\Leftrightarrow x=10\kappa\pi\pm 5\pi\quad,\kappa\in Z$$

iii. Επειδή : $\varepsilon\phi\dfrac{2x}{7}=\dfrac{\eta\mu\dfrac{2x}{7}}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{2x}{7}}$ πρέπει :

$$\sigma\upsilon\nu\frac{2x}{7}\neq 0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{2x}{7}\neq\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \frac{2x}{7}\neq 2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 2x\neq 14\kappa\pi\pm\frac{7\pi}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\neq 7\kappa\pi\pm\frac{7\pi}{4}\quad,\kappa\in Z.$$

Έτσι έχουμε : $3\varepsilon\phi\dfrac{2x}{7}-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow 3\varepsilon\phi\dfrac{2x}{7}=\sqrt{3}\Leftrightarrow \varepsilon\phi\dfrac{2x}{7}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow$

$$\varepsilon\phi\frac{2x}{7}=\varepsilon\phi\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \frac{2x}{7}=\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow 2x=7\kappa\pi+\frac{7\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{7\kappa\pi}{2}+\frac{7\pi}{12}\quad,\kappa\in Z.$$

8. (Άσκηση 9 σελ. 88 Α΄ ομάδας)
Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $\eta\mu\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$ ii. $2\sigma\upsilon\nu\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ iii. $\varepsilon\phi\left(\dfrac{\pi}{4}-5x\right)=\sqrt{3}$

<u>Λύση :</u>

i. $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2} \\ \acute{\eta} \\ x+\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3} \\ \acute{\eta} \\ x=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi-\frac{5\pi}{6} \\ \acute{\eta} \\ x=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6} \end{cases} ,\kappa\in Z$$

ii. $2\sigma\upsilon\nu\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$$3x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4} \\ \acute{\eta} \\ 3x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{12} \\ \acute{\eta} \\ x=\frac{2\kappa\pi}{3}-\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{12} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{7\pi}{36} \\ \acute{\eta} \\ x=\frac{2\kappa\pi}{3}-\frac{\pi}{36} \end{cases} ,\kappa\in Z$$

iii. Πρέπει : $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-5x\right)\neq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}-5x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -5x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x\neq-\frac{\kappa\pi}{5}-\frac{\pi}{20},\kappa\in\mathbb{Z}$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-5x\right)=\sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-5x\right)=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}-5x=\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 5x=-\kappa\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x=-\kappa\pi-\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow x=-\frac{\kappa\pi}{5}-\frac{\pi}{60} \quad ,\kappa\in Z$$

Δ. <u>ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ</u> : ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\eta\mu(f(x))=\sigma\upsilon\nu(g(x))$ ή $\varepsilon\varphi(f(x))=\sigma\varphi(g(x))$

9. (Άσκηση 1 σελ. 89 Β΄ ομάδας)
Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$ ii. $\varepsilon\varphi 2x-\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3}+3x\right)=0$

<u>Λύση :</u>

i. $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right) \Leftrightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{4}+x\right) \Leftrightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{4}+x\right) \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} - x\right) \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{4} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} - x \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \left(\pi - \left(-\frac{\pi}{4} - x\right)\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{4} + x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa\pi - \frac{\pi}{8} \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa\pi - \frac{\pi}{8}, \kappa \in Z \\ \acute{\eta} \\ 0 = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} (\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta) \end{cases}$$

ii. Επειδή : $\varepsilon\phi 2x = \dfrac{\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x}$ πρέπει :

$$\sigma\upsilon\nu 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x \neq \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x \neq 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi \pm \frac{\pi}{4} \ ,\kappa \in Z$$

Επειδή : $\sigma\phi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right)}$ πρέπει : $\eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) \neq \eta\mu 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 3x \neq 2\kappa\pi \\ \kappa\alpha\iota \\ \frac{\pi}{3} + 3x \neq 2\kappa\pi + \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{2\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{9} \\ \kappa\alpha\iota \\ x \neq \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{2\pi}{9} \end{cases}$$

Έτσι έχω : $\varepsilon\phi 2x - \sigma\phi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\phi 2x = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) \Leftrightarrow$

$$\varepsilon\phi 2x = \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} + 3x\right)\right) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \varepsilon\phi 2x = \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - 3x\right) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\phi 2x = \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) \Leftrightarrow 2x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6} - 3x \Leftrightarrow 5x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{5} + \frac{\pi}{30} \quad ,\kappa \in Z$$

Ε. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\alpha f^2(x) + \beta f(x) + \gamma = 0$

10. (Άσκηση 10 σελ. 88 Α΄ ομάδας)
Να λύσετε τις εξισώσεις :
i. $2\eta\mu^2\omega + \eta\mu\omega - 1 = 0$ ii. $2\sigma\upsilon\nu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$ iii. $3\varepsilon\phi^2 t = 3 + 2\sqrt{3}\varepsilon\phi t$

<u>Λύση :</u>

i. $2\eta\mu^2\omega + \eta\mu\omega - 1 = 0$ θέτω $\eta\mu\omega = y$ και έχω $2y^2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ ή $y = \dfrac{1}{2}$

- Αν $y = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\omega = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\omega = -\eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \omega = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$ $,\kappa \in Z$

- Αν $y=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu\omega=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu\omega=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \begin{cases}\omega=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\ \acute{\eta}\\ \omega=2\kappa\pi+\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\omega=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\ \acute{\eta}\\ \omega=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases},\kappa\in Z$

ii. $2\sigma\upsilon\nu^2x+3\sigma\upsilon\nu x-2=0$ θέτω $\sigma\upsilon\nu x=y$ και έχω $2y^2+3y-2=0\Leftrightarrow y=-2$ ή $y=\frac{1}{2}$

- Αν $y=-2\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-2$ αδύνατο αφού $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1$.
- Αν $y=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3}\ ,\kappa\in Z$

iii. $3\varepsilon\varphi^2t=3+2\sqrt{3}\varepsilon\varphi t \Leftrightarrow\ 3\varepsilon\varphi^2t-2\sqrt{3}\varepsilon\varphi t-3=0$

Επειδή : $\varepsilon\varphi t=\frac{\eta\mu t}{\sigma\upsilon\nu t}$ πρέπει $\sigma\upsilon\nu t\neq 0\Leftrightarrow t\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\kappa\in Z$

Θέτω $\varepsilon\varphi t=y$ και έχω $3y^2-2\sqrt{3}y-3=0\Leftrightarrow y=\sqrt{3}$ ή $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

- Αν $y=\sqrt{3}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi t=\sqrt{3}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi t=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow t=\kappa\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\kappa\in Z$
- Αν $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi t=-\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi t=-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi t=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow t=\kappa\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\kappa\in Z$

11. (Άσκηση 11 σελ. 88 Α΄ ομάδας)

Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $\eta\mu^2x+5\sigma\upsilon\nu^2x=4$ ii. $\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\varphi 2x=1$

<u>Λύση :</u>

i. $\eta\mu^2x+5\sigma\upsilon\nu^2x=4 \overset{\substack{\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1\Leftrightarrow\\ \eta\mu^2x=1-\sigma\upsilon\nu^2x}}{\Longleftrightarrow} 1-\sigma\upsilon\nu^2x+5\sigma\upsilon\nu^2x-4=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2x-3=0\Leftrightarrow\ \Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2x=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\ \sigma\upsilon\nu x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

- $\sigma\upsilon\nu x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{6}\ ,\kappa\in Z$
- $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{5\pi}{6}\ ,\kappa\in Z$.

ii. $\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\varphi 2x=1$

Επειδή : $\varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ πρέπει $\sigma\upsilon\nu x\neq 0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\neq\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x\neq 2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}\ ,\kappa\in Z$

Επειδή : $\sigma\varphi 2x=\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 2x}$ πρέπει :

$$\eta\mu 2x \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu 2x \neq \eta\mu 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq 2\kappa\pi \\ \kappa\alpha\iota \\ 2x \neq 2\kappa\pi + \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \kappa\pi \\ \kappa\alpha\iota \\ x \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Έτσι έχω : $\varepsilon\phi x \cdot \sigma\phi 2x = 1 \Leftrightarrow \sigma\phi 2x = \dfrac{1}{\varepsilon\phi x} \Leftrightarrow \sigma\phi 2x = \sigma\phi x \Leftrightarrow 2x = \kappa\pi + x \Leftrightarrow x = \kappa\pi$ $,\kappa \in Z$. Απορρίπτεται λόγο περιορισμού. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΣΤ. <u>ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ</u> : ΣΕ ΔΟΣΜΕΝΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

12. (Άσκηση 3 σελ. 89 Β΄ ομάδας)
Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $\varepsilon\phi x = 1$ στο διάστημα $(3\pi, 4\pi)$.
<u>Λύση :</u>

Πρέπει : $\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

$\varepsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \dfrac{\pi}{4}$ $\quad ,\kappa \in Z$

Όμως : $x \in (3\pi, 4\pi) \Leftrightarrow 3\pi < x < 4\pi \Leftrightarrow 3\pi < \kappa\pi + \dfrac{\pi}{4} < 4\pi \Leftrightarrow 3\pi - \dfrac{\pi}{4} < \kappa\pi < 4\pi - \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{11\pi}{4} < \kappa\pi < \dfrac{15\pi}{4} \Leftrightarrow \dfrac{11}{4} < \kappa < \dfrac{15}{4} \Leftrightarrow \kappa = 3$ αφού $,\kappa \in Z$. Άρα είναι : $x = 3\pi + \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{13\pi}{4}$.

Ζ. <u>ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ</u> : ΠΟΥ ΛΥΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΤΡΙΓ/ΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

13. (Άσκηση 2 σελ. 89 Β΄ ομάδας)
Να λύσετε την εξίσωση : $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 2\varepsilon\varphi x = 4$.
<u>Λύση :</u>

Πρέπει : $\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

Έχουμε : $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 2\varepsilon\varphi x = 4 \Leftrightarrow \dfrac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 2\varepsilon\varphi x = 4 \Leftrightarrow \dfrac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 2\varepsilon\varphi x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2 x - 2\varepsilon\varphi x - 3 = 0$ (1). Θέτουμε : $\varepsilon\varphi x = y$, άρα : $(1) \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3 \;\; \acute{\eta} \;\; y = -1$

- $y = 3 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = 3 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\dfrac{2\pi}{5} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \dfrac{2\pi}{5}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ (δεκτή)
- $y = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \dfrac{\pi}{4}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ (δεκτή)

<u>ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :</u>

14. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό(Σ) ή Λάθος(Λ).
i. Η εξίσωση ημx=α , με α>1 είναι αδύνατη.
ii. συνx=συνθ $\Leftrightarrow$ x=2κπ+θ, κ∈Z
iii. ημx=ημθ $\Leftrightarrow$ x=2κπ+θ ή x=2κπ-θ, κ∈Z
iv. εφx=εφθ $\Leftrightarrow$ x=2κπ+θ, κ∈Z

15. Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις που βρίσκονται στην στήλη Α με τις ρίζες τους στην στήλη Β.

Στήλη Α - Εξίσωση	**Στήλη Β - Ρίζες**
Α. συνx=0	1. x=κπ, κ∈Z
Β. ημx=0	2. x=κπ+ $\frac{\pi}{2}$,κ∈Z
Γ. συνx=1	3. x=2κπ, κ∈Z
Δ. ημx=-1	4. x=2κπ+π, κ∈Z
Ε. συνx=-1	5. x=2κπ- $\frac{\pi}{2}$, κ∈Z
ΣΤ. ημx=1	6. x=κπ+ $\frac{\pi}{4}$,κ∈Z
	7. x=2κπ+ $\frac{\pi}{2}$, κ∈Z

16. Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις της στήλης Α με τις ρίζες τους στο διάστημα [0,π] που βρίσκονται στην στήλη Β.

Στήλη Α - Εξίσωση	**Στήλη Β - Ρίζες στο [0,π]**
Α. ημx=συνx	1. $\frac{\pi}{4}$
Β. συνx=-ημx	2. $\frac{3\pi}{4}$
Γ. εφx=σφx	3. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$
	4. 0

17. Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις της στήλης Α με τις ρίζες τους στο διάστημα [0, $\frac{\pi}{2}$] που βρίσκονται στην στήλη Β.

Στήλη Α - Εξίσωση	**Στήλη Β - Ρίζες στο [0,π/2]**
Α. ημx= $\frac{\sqrt{3}}{2}$	1. $\frac{\pi}{3}$
Β. συνx= $\frac{\sqrt{3}}{2}$	2. $\frac{\pi}{4}$
Γ. ημx=συνx	3. $\frac{\pi}{2}$
Δ. συνx=0	4. 0
	5. $\frac{\pi}{6}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

Α. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ

18. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ ii. $\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$ iii. $\eta\mu x = 0$ iv. $\sigma\upsilon\nu x = 0$

v. $\eta\mu x = 1$ vi. $\sigma\upsilon\nu x = 1$ vii. $\eta\mu x = -1$ viii. $\sigma\upsilon\nu x = -1$

19. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ii. $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ iii. $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ iv. $\varepsilon\phi x = \sqrt{3}$

v. $\sigma\phi x = -\sqrt{3}$ vi. $\varepsilon\phi x = -1$ vii. $2\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x + 3 = 0$ viii. $\frac{\sqrt{3}\cdot\sigma\phi x + 7}{3} = 2$

ix. $2\eta\mu x = \sqrt{2}$ x. $\varepsilon\phi^2 x - 3 = 0$ xi. $\sigma\phi^2 x - 3 = 0$ xii. $2\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$

Β. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΜΕ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

20. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. (2συνx-1)(2ημx-1)=0 ii. (εφx-1)σφx=0

iii. $2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x - 1 = 2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$ iv. ($\sqrt{2}$ ημx-1)($\sqrt{2}$ συνx-1)=0

v. $(2\sqrt{3}\cdot\eta\mu x + 3)(2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{5}) = 0$ vi. $\sigma\phi x\cdot\sigma\upsilon\nu x + 1 = \sigma\upsilon\nu x + \sigma\phi x$

21. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $(2\eta\mu x + 1)(\eta\mu x - 1) = 0$ ii. $(4\eta\mu^2 x - 1)(2\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$

iii. $2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3} - 2\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3}\eta\mu x = 0$ iv. $1 + 2\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu^2 x - 1) = \eta\mu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x$

Γ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\eta\mu(f(x)) = \eta\mu(g(x))$ ή $\sigma\upsilon\nu(f(x)) = \sigma\upsilon\nu(g(x))$ ή $\varepsilon\phi(f(x)) = \varepsilon\phi(g(x))$ ή $\sigma\phi(f(x)) = \sigma\phi(g(x))$

22. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $6\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 3 = 0$ ii. $\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

iii. $\varepsilon\phi 4x = \varepsilon\phi x$ iv. $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 2x = 0$

v. $\sigma\upsilon\nu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$ vi. $\sqrt{3}\cdot\varepsilon\phi\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

vii. $\varepsilon\phi\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \varepsilon\phi x = 0$ viii. $\sigma\phi\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \sigma\phi\left(\frac{2\pi}{5} - 2x\right)$

ix. $2\eta\mu(2x - \pi) - 1 = 0$ x. $2\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

vii. $\eta\mu 2x = -\frac{1}{2}$ viii. $\sigma\upsilon\nu 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Δ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\eta\mu(f(x))=\sigma\upsilon\nu(g(x))$ ή $\varepsilon\phi(f(x))=\sigma\phi(g(x))$

23. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ ii. $\varepsilon\phi\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\phi\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

iii. $\eta\mu 2x=\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ iv. $\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$

v. $\eta\mu(x-\pi)=-\sigma\upsilon\nu(x-3\pi)$ vi. $\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}+\eta\mu(x-\pi)=0$

vii. $\sigma\phi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\varepsilon\phi x$ viii. $\eta\mu 3x=\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

ix. $\eta\mu x-\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x=0$ x. $\eta\mu x+\varepsilon\phi\frac{3\pi}{8}\cdot\sigma\upsilon\nu x=0$

Ε. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\alpha f^2(x)+\beta f(x)+\gamma=0$

24. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $2\eta\mu^2x-3\eta\mu x+1=0$ ii. $2\eta\mu^2x-5\eta\mu x+2=0$
iii. $2\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu x+2=0$ iv. $2\sigma\upsilon\nu^2x+3\eta\mu x-3=0$
v. $2\eta\mu^2x=3(1-\sigma\upsilon\nu x)$ vi. $16\sigma\upsilon\nu^4x-25\sigma\upsilon\nu^2x+9=0$
vii. $2-\eta\mu^2x=5\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu^2x$ viii. $2\sigma\upsilon\nu^2x+1=5\eta\mu x$
ix. $\eta\mu^2x+7\sigma\upsilon\nu^2x=1$ x. $5\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu x=5$

25. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $2\eta\mu^2x+\sqrt{5}\,\eta\mu x=0$ ii. $3\sigma\upsilon\nu^2 2x+5\sigma\upsilon\nu 2x=0$
iii. $\sigma\phi^2x=\sigma\phi x$ iv. $\varepsilon\phi^2 2x+\varepsilon\phi 2x=0$

ΣΤ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΣΕ ΔΟΣΜΕΝΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

26. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $\sqrt{2}\eta\mu x=1$ στο $[-\pi,\pi]$ ii. $4\eta\mu^2x-3=0$ στο $[0,2\pi]$

iii. $3\sigma\upsilon\nu^2x-4\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu^2x-2$ στο $[0,4\pi]$ iv. $\eta\mu x=\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ στο $(-\pi,\pi)$

Ζ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ : ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

27. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}=4$ ii. $\varepsilon\phi x-1+2\frac{\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu x}=2\eta\mu x$

iii. $\eta\mu x\cdot\varepsilon\phi x=1+\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$ iv. $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}-\varepsilon\phi x=2$

Η. ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu\left(7\pi-x\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$.

i. Να δείξετε ότι : $f(x)=2\eta\mu x$.
ii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)=1$, όταν $x\in[0,\pi]$.
iii. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f, την περίοδο της και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση σε διάστηνα πλάτους μιας περιόδου.
iv. Με βάση το σχήμα, να μελετήσετε τη συνάρτηση f, ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $\mathrm{A}=[0,2\pi]$.

28. Έστω $f(x)=\eta\mu^2 x-2\sigma\upsilon\nu x+2$.

i. Να παραγοντοποιηθεί η f(x).
ii. Να δείξετε ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
iii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)=0$.
iv. Να δείξετε ότι η f είναι άρτια, περιοδική με περίοδο το 2π, και μέγιστο το 4.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\sigma\upsilon\nu 2x-\varepsilon\phi\frac{35\pi}{4}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{25\pi}{6},2\right)$

i. Να βρείτε το α.
ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x΄x.
iii. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της f και για ποια τιμή του x η f παίρνει τη μέγιστη τιμή.
iv. Να λυθεί η εξίσωση : $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-f(x)=2$ στο $[-\pi,\pi]$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu^2 x+\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii. Να εξετάσετε αν C_f τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.
iii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)=1+\sqrt{3}$

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu(7\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{17\pi}{2}+x\right)$.

i. Να δείξετε ότι $f(x)=\eta\mu^2 x$
ii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)=3f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
iii. Να λύσετε την εξίσωση : $2f(x)=3\sqrt{1-f(x)}$

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}\left(\dfrac{20\pi}{3},\dfrac{10}{3}\right)$, να δείξετε ότι $\alpha=2$.

iii. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

iv. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)=\alpha$.

33. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=3\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{21\pi}{2}-4x\right)+\eta\mu(21\pi+4x)$ και $g(x)=\eta\mu\left(\dfrac{37\pi}{2}+2x\right)-\sigma\upsilon\nu(37\pi-2x)$.

i. Να δείξετε ότι : $f(x)=2\eta\mu 4x$ και $g(x)=2\sigma\upsilon\nu 2x$

ii. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της f και για ποια τιμή του x η f παίρνει τη μέγιστη τιμή.

iii. Να βρείτε τη ελάχιστη τιμή της g και για ποια τιμή του x η g παίρνει την ελάχιστη τιμή.

iv. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f και g στο διάστημα $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

v. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)+g(x)=0$.

34. Η συνάρτηση $f(x)=4\kappa-3+\lambda\cdot\eta\mu\dfrac{x}{\kappa}$, με $\lambda>0$, έχει μέγιστο το 7 και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο με τεταγμένη 3.

i. Να δείξετε ότι : $\kappa=\dfrac{3}{2}$ και $\lambda=4$.

ii. Να βρείτε την περίοδο και την ελάχιστη τιμή μ της f.

iii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[-3\pi,3\pi]$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)=5$.

35.

i. Να αποδείξετε ότι : $-\sqrt{2}\le\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\le\sqrt{2}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση : $2+2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=3\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu^2 x$.

3.6 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΓΩΝΙΩΝ

✓ Αποδεικνύεται ότι για οποιεσδήποτε γωνιές α, β ισχύουν:

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$$
$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$$
$$\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$$

✓ Επίσης, αν $\sigma\upsilon\nu\alpha\neq 0$, $\sigma\upsilon\nu\beta\neq 0$ και $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\neq 0$, δηλαδη $\alpha\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\beta\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$

για κάθε ακέραιο κ, ώστε να ορίζονται οι αριθμοί εφα, εφβ και εφ(α+β), τότε ισχύει

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1\text{-}\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$$

✓ Με τους αντιστοίχους περιορισμούς, ώστε να ορίζονται οι εφα, εφβ, εφ(α–β), ισχύει και η ισότητα

$$\varepsilon\varphi(\alpha\text{-}\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha\text{-}\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$$

✓ Τέλος, αν

$\eta\mu\alpha\neq 0,\ \eta\mu\beta\neq 0$ και $\eta\mu(\alpha+\beta)\neq 0$, δηλαδή $\alpha\neq\kappa\pi$ και $\alpha+\beta\neq\kappa\pi$ για κάθε $\kappa\in Z$

τότε : $$\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}$$

✓ Με τους αντιστοίχους περιορισμούς ισχύει και η ισότητα $$\sigma\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

1. Να αντιστοιχίσετε στους παρακάτω πίνακες κάθε παράσταση της στήλης Α με την ίση της στη στήλη Β, με την προϋπόθεση ότι ισχύουν οι περιορισμοί για τις γωνίες, όπου χρειάζεται.

i.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Α. συν(α+β)	1. συνασυνβ+ημαημβ
Β. ημασυνβ-συναημβ	2. συνασυνβ-ημαημβ
Γ. συν(α-β)	3. ημ(α+β)
Δ. ημασυνβ+συναημβ	4. ημ(β-α)
	5. ημ(α-β)

ii.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\dfrac{εφα - εφβ}{1 + εφα \bullet εφβ}$	1. $\dfrac{σφα - σφβ}{1 + σφα \bullet σφβ}$
Β. σφ(α-β)	2. $\dfrac{σφα \bullet σφβ + 1}{σφβ - σφα}$
Γ. σφ(α+β)	3. $\dfrac{σφα \bullet σφβ - 1}{σφβ + σφα}$
Δ. $\dfrac{εφα + εφβ}{1 - εφα \bullet εφβ}$	4. εφ(α+β)
	5. εφ(α-β)

iii.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. ημ(α+β) – ημ(α-β)	1. 2συναημβ
Β. συν(α+β) + συν(α-β)	2. -2ημβσυνα
Γ. συν(α+β) – συν(α-β)	3. 2συνασυνβ
Δ. ημ(α-β) – ημ(α+β)	4. 2ημασυνβ
	5. -2ημαημβ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις :
i) συν140συν40 - ημ140ημ40
ii) συν130συν10 + ημ130ημ10
iii) ημ(π/12)συν(π/4) – συν(π/12)ημ(π/4)
iv) ημ50συν40 + συν50ημ40
v) ημ2xσυνx + συν2xημx

3. Να δείξετε ότι : ημ(α-β)συνβ + ημβσυν(α-β) = ημα

4. Αν σε ένα τρίγωνο ισχύει ότι : εφΑ=1/2 και εφΒ=1/3, να δείξετε ότι η γωνία Γ είναι 3π/4.

5. Να δείξετε ότι: i. $\dfrac{ημ(α-β)}{ημαημβ} = σφβ - σφα$

ii. $\dfrac{ημ(α-β)}{ημαημβ} + \dfrac{ημ(β-γ)}{ημβημγ} + \dfrac{ημ(γ-α)}{ημγημα} = 0$

6. Αν εφα = - 3, να λύσετε την εξίσωση εφ(2x-α) = - 2

3.7 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ 2α

- Αν στους τύπους των ημ(α + β), συν(α + β), εφ(α + β) και σφ(α + β) θέσουμε όπου β το α, προκύπτουν:

  - $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$
  - $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$
  - $\varepsilon\phi 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\phi\alpha}{1-\varepsilon\phi^2\alpha}$
  - $\sigma\phi 2\alpha = \dfrac{\sigma\phi^2\alpha - 1}{2\sigma\phi\alpha}$

- Από τους τύπους του συν2α προκύπτει ότι (**τύποι αποτετραγωνισμού**)

  - $\eta\mu^2\alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$
  - $\varepsilon\phi^2\alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}, \quad \sigma\phi^2\alpha = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$

<u>ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :</u>

1. Να συμπληρώσετε τα κενά στους παρακάτω πίνακες, ώστε να ισχύουν οι ταυτότητες στους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2α.

i.

ημ2α=2ημασυνα
ημ4x=………………
ημ3x=………………
ημx=………………...
ημ$\frac{x}{2}$=………………

ημασυνα=$\frac{1}{2}$ημ2α
ημ$\frac{\beta}{2}$συν$\frac{\beta}{2}$=……………………
ημ2yσυν2y=……………………
ημ$\frac{x+y}{2}$συν$\frac{x+y}{2}$=………………
ημ$\frac{x}{4}$συν$\frac{x}{4}$=……………………...

ii.

συν^{2}α-ημ^{2}α=συν2α
συν^{2}2x-ημ^{2}2x=…………..
συν$^2\frac{x}{2}$-ημ$^2\frac{x}{2}$=…………..

1+συν2α=2συν^{2}α
1+συνα=………………
1+συν$\frac{a}{2}$=………………

iii.

ημ^{2}α=$\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$
ημ^{2}2x=…………………
ημ$^2\frac{\chi}{8}$=…………………
ημ$^2\frac{\alpha+\beta}{2}$=……………..

iv.

εφ2α=$\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2 a}$
εφα=…………………
εφ10α=………………

2. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με το ίσο του της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. συν^{2}α	1. $\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$
Β. εφ^{2}α	2. $\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$
Γ. ημ^{2}α	3. $\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$
	4. $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha-1}{2}$

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. ημ$\frac{\chi}{2}$ συν$\frac{\chi}{2}$	1. $\frac{1-\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi}$
Β. συν$^2\frac{\chi}{2}$ -ημ$^2\frac{\chi}{2}$	2. $\frac{1+\sigma\upsilon\nu\chi}{2}$
Γ. εφ$^2\frac{\chi}{2}$	3. $\frac{1-\sigma\upsilon\nu\chi}{2}$
Δ. συν$^2\frac{\chi}{2}$	4. $\frac{\eta\mu\chi}{2}$
Ε. εφx	5. συνx
	6. $\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\chi}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\chi}{2}}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1. Να δείξετε ότι : ημ2α = 2ημ^{3}α συνα + 2συν^{3}α ημα.

2. Να δείξετε ότι : 2συν^{2}α + ημ2α εφα = 2.

3. Να δείξετε ότι : (1 + συν2α)εφα = ημ2α.

4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει : 2ημΑσυνΒ = ημ2Α. Να αποδείξετε ότι είναι ισοσκελές.

5. Αν συνα = - 4/5 και α∈(π, 3π/2), να υπολογίσετε τα : ημ2α, συν2α, εφ2α, σφ2α.

6. Αν ημα = 3/5 και α∈(π/2, π), να υπολογίσετε τα : ημ2α, συν2α, εφ2α, σφ2α.

7. Να δείξετε ότι: $\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}\cdot\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}=\sigma\varphi\dfrac{\alpha}{4}$

8. Να δείξετε ότι: i. $\dfrac{2\eta\mu2\alpha+\eta\mu4\alpha}{2\eta\mu2\alpha-\eta\mu4\alpha}=\sigma\varphi^2\alpha$ ii. $\dfrac{1+\eta\mu10+\sigma\upsilon\nu10}{1+\eta\mu10-\sigma\upsilon\nu10}=\sigma\varphi5^0$

9. Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu2x+2\eta\mu^2\dfrac{x}{2}=0$

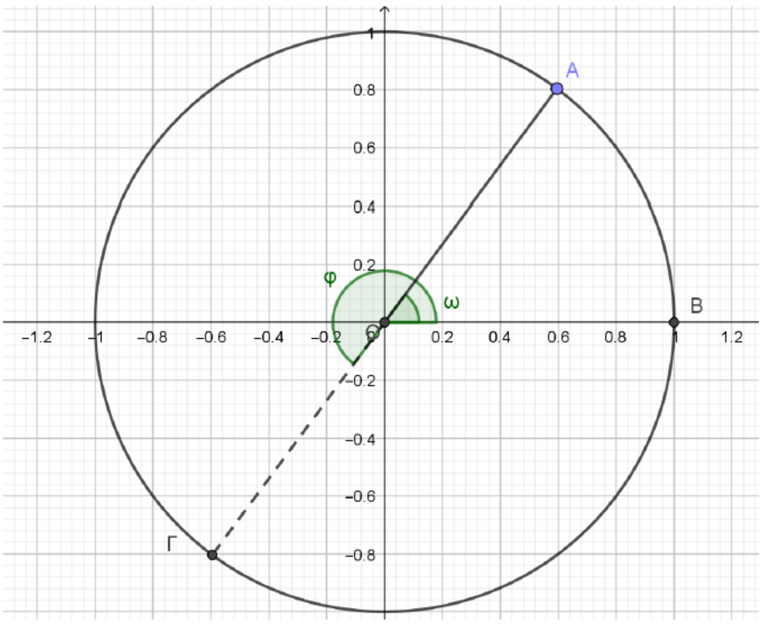
ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΟ 3$^{\text{Ο}}$ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

3.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 1 15079

Στον παρακάτω κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega} = \text{BOA}$.



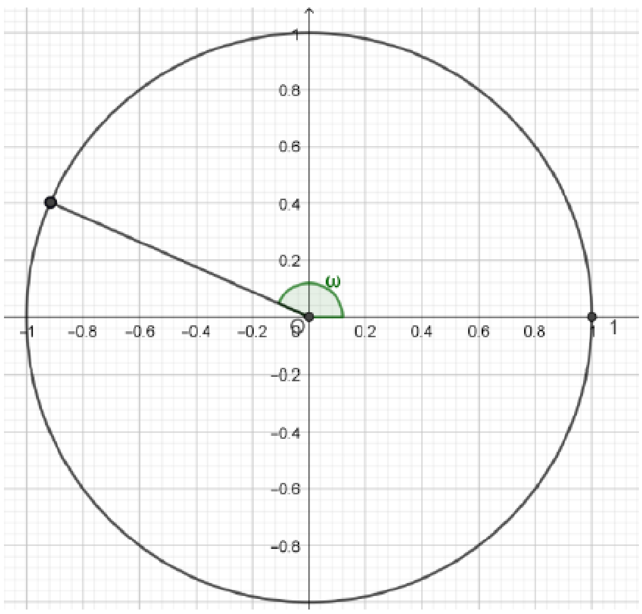
α) Με βάση το σχήμα, να αιτιολογήσετε γιατί $\text{συν}\omega = \dfrac{3}{5}$. (Μονάδες 8)

β) Η προέκταση του τμήματος ΑΟ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Γ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να εκφράσετε τη γωνία $\hat{\varphi} = \text{BOΓ}$ με την βοήθεια της γωνίας $\hat{\omega}$. (Μονάδες 8)

ii. Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε το συνφ. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2 15191



Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\text{ημ}\omega = 0,4$.

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε την γωνία $-\hat{\omega}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια του τριγωνομετρι-κού κύκλου ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το ημ(−ω). (Μονάδες 13)

3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 3 15046

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $συνA = -\frac{3}{5}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το ημΑ. (Μονάδες 15)

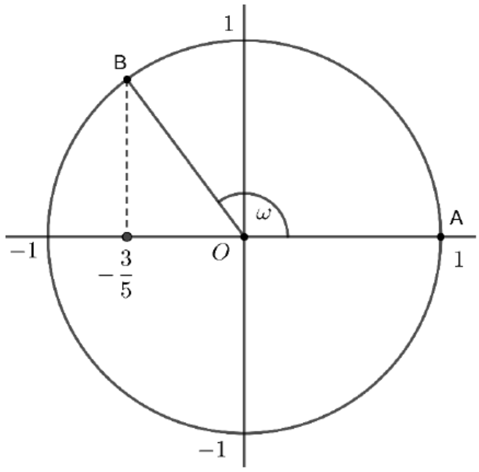
ΘΕΜΑ 4 15185

α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας ω του διπλανού σχήματος και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 11)

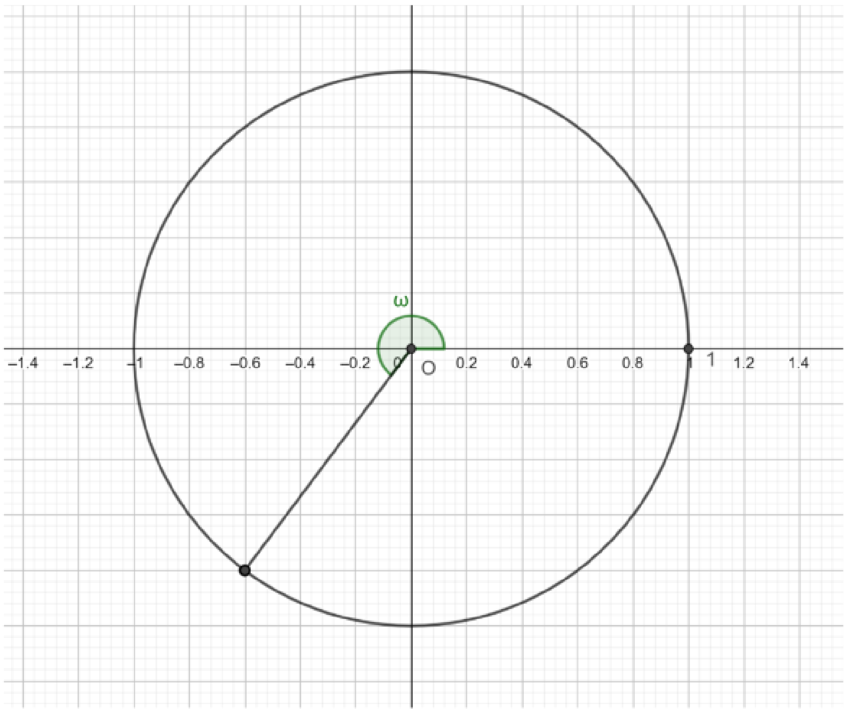
β) Αν $συνω = -\frac{3}{5}$, να βρείτε το ημω.

(Μονάδες 14)



ΘΕΜΑ 5 15192

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\vec{ω}$.



α) Να αιτιολογήσετε με βάση το σχήμα γιατί $συνω = -\frac{3}{5}$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

i. ημω **ii.** εφω (Μονάδες 6+7)

ΘΕΜΑ 6 15429

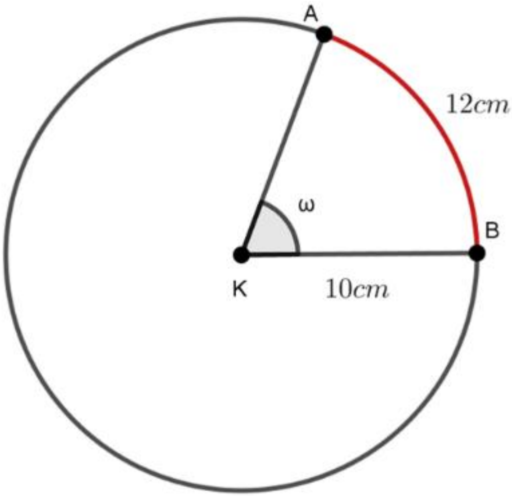
α) Να αποδείξετε ότι $ημ476° = ημ116°$. (Μονάδες 11)

β) Αν γνωρίζουμε ότι το $ημ116°$ είναι περίπου $\frac{9}{10}$, να υπολογίσετε το $συν116°$.

(Μονάδες 14)

ΘΕΜΑ 7 15814

Δίνεται ο κύκλος του διπλανού σχήματος με κέντρο Κ και ακτίνα 10cm. Επίσης δίνεται το τόξο ΑΒ με μήκος 12cm και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω.



α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί το μέτρο της γωνίας ω είναι 1,2 rad.

(Μονάδες 6)

ii. Με χρήση του αi) ερωτήματος, να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ω είναι οξεία.

(Μονάδες 6)

β) Αν $συνω = \frac{9}{25}$, να βρείτε το ημω.

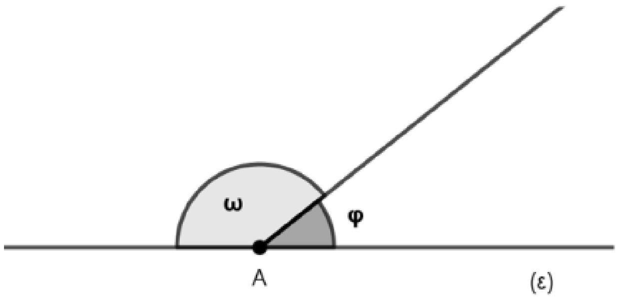
(Δίνεται ότι $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$) (Μονάδες 13)

3.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1^{ο} ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 8 15652

Δίνεται $ημφ = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο Α της ευθείας (ε) του παρακάτω σχήματος.

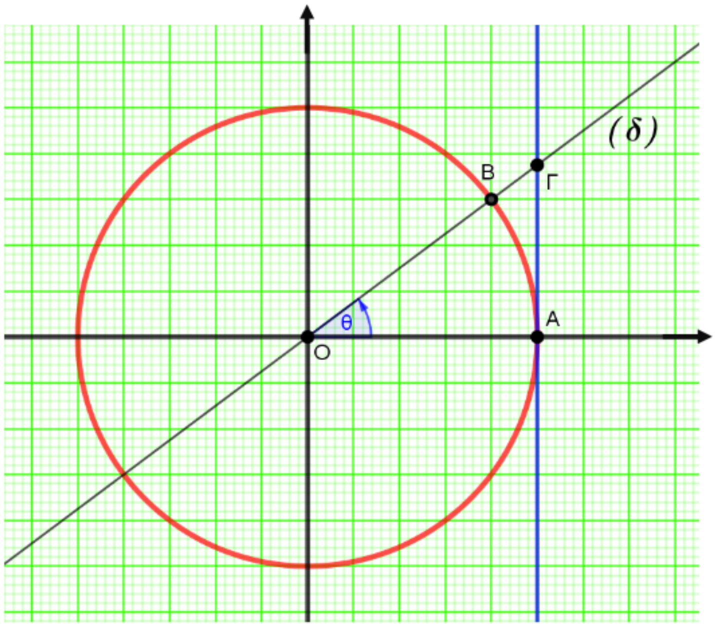


α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της αμβλείας γωνίας ω. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 9 15092

Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιαστεί ο τριγωνομετρικός κύκλος και η ευθεία (δ) η οποία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημεία Α. Η τελική πλευρά ΟΒ της θετικής γωνίας $A\hat{O}B = \hat{\theta}$, αν προεκταθεί τέμνει την ευθεία (δ) στο σημείο Γ. Γνωρίζουμε ότι $ημθ = \frac{3}{5}$.



α) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τον αριθμό συνθ και στη συνέχεια τον αριθμό εφθ. (Μονάδες 13)

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Β και Γ. (Μονάδες 12)

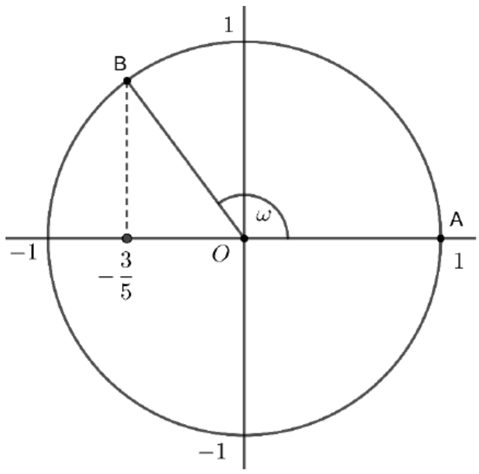
ΘΕΜΑ 10 15185

α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας ω του διπλανού σχήματος και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 11)

β) Αν $συνω = -\frac{3}{5}$, να βρείτε το ημω.

(Μονάδες 14)



ΘΕΜΑ 11 15191

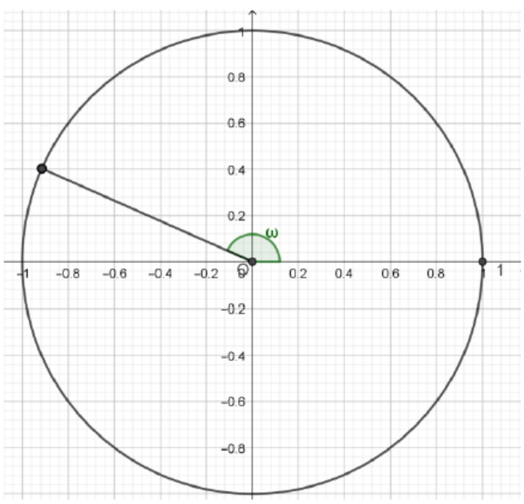
Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $ημω = 0,4$.

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε την γωνία $-\hat{\omega}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

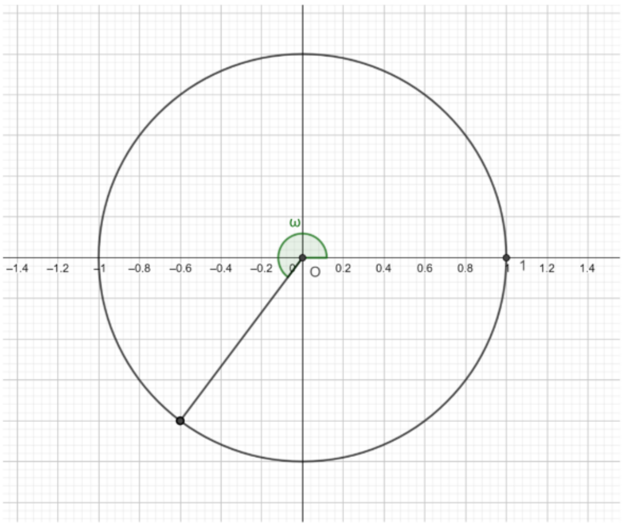
β) Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το ημ(−ω).

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 12 15192

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία ω.



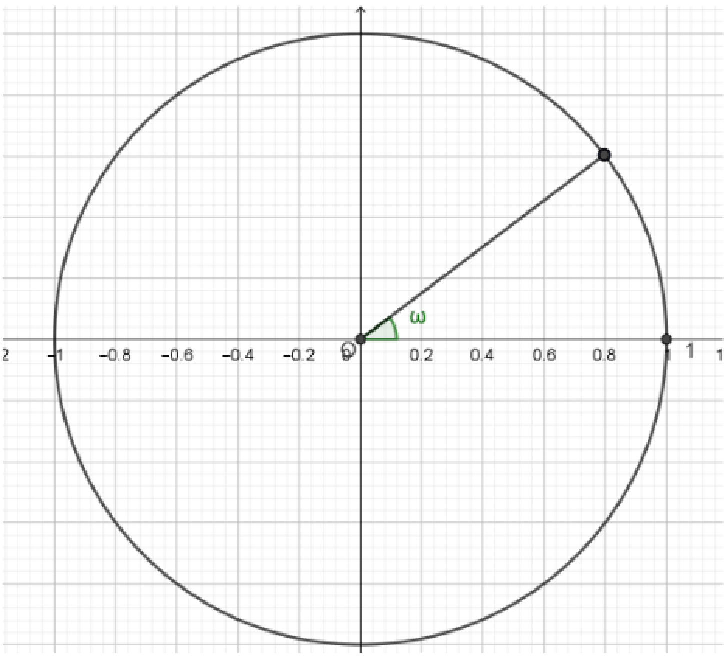
α) Να αιτιολογήσετε με βάση το σχήμα γιατί $\sigma\upsilon\nu\omega = -\dfrac{3}{5}$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

i. ημω **ii.** εφω (Μονάδες 6+7)

ΘΕΜΑ 13 15193

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία ω, με $\sigma\upsilon\nu\omega = 0{,}8$.

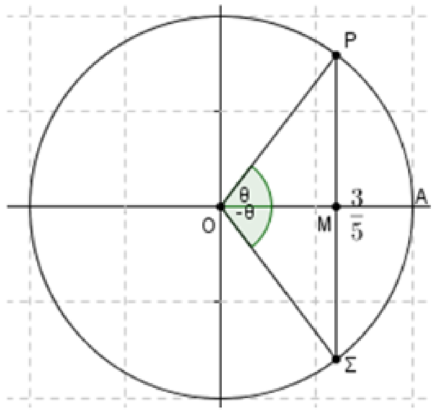


α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε τις γωνίες στο διάστημα [0,2π], των οποίων το συνημίτονο είναι –0,8. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την σχέση των γωνιών που βρήκατε στο α) ερώτημα με την γωνία $\vec{\omega}$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 14 15266

Στον διπλανό σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος και οι γωνίες θ και –θ.



α) Να αιτιολογήσετε γιατί $συνθ = \frac{3}{5}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το ημθ.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας –θ.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 15 15429

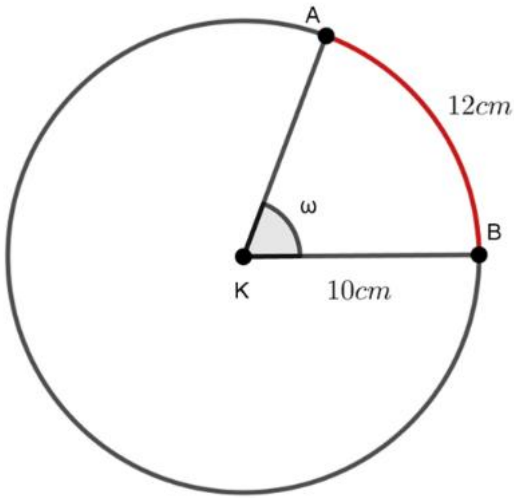
α) Να αποδείξετε ότι $ημ476° = ημ116°$. (Μονάδες 11)

β) Αν γνωρίζουμε ότι το $ημ116°$ είναι περίπου $\frac{9}{10}$, να υπολογίσετε το $συν116°$.

(Μονάδες 14)

ΘΕΜΑ 16 15814

Δίνεται ο κύκλος του διπλανού σχήματος με κέντρο Κ και ακτίνα 10cm. Επίσης δίνεται το τόξο ΑΒ με μήκος 12cm και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω.



α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί το μέτρο της γωνίας ω είναι 1,2 rad.

(Μονάδες 6)

ii. Με χρήση του αi) ερωτήματος, να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ω είναι οξεία.

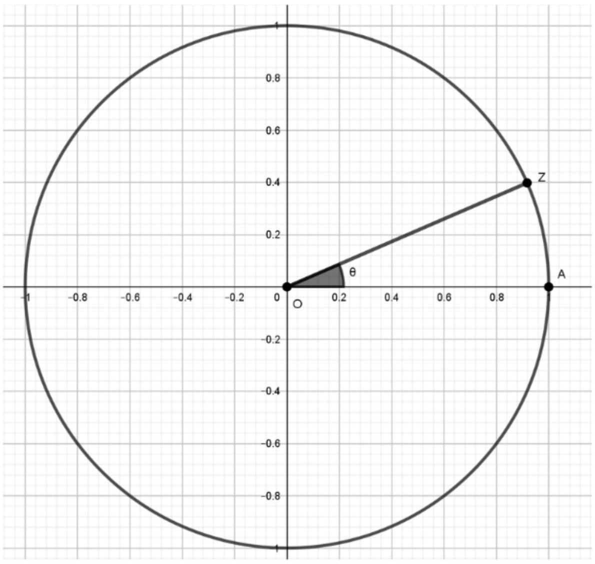
(Μονάδες 6)

β) Αν $συνω = \frac{9}{25}$, να βρείτε το ημω.

(Δίνεται ότι $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$) (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 17 17933

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $AOZ=\theta$.



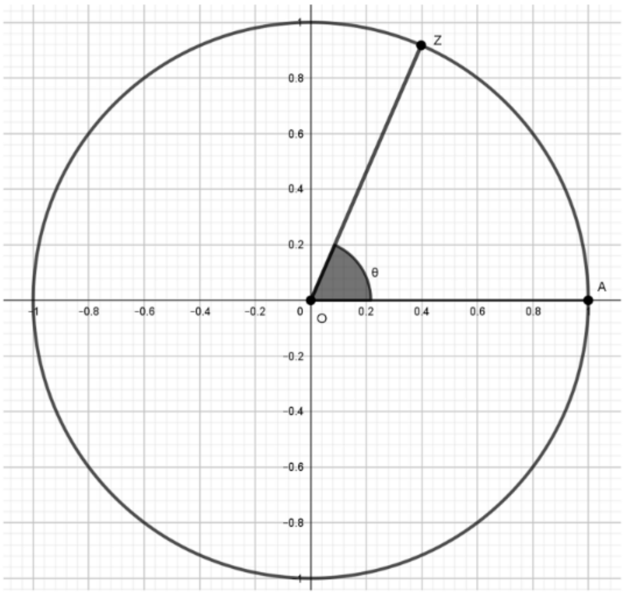
α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών 3π+θ και 4π–θ. (Μονάδες 9)

β) **i.** Να αιτιολογήσετε γιατί $ημθ=0,4$. (Μονάδες 7)

ii. Με χρήση του βi) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: ημ(3π+θ) και ημ(4π–θ). (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 18 17936

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $AOZ=\theta$.



α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών 3π+θ και $\frac{\pi}{2}+\theta$. (Μονάδες 9)

β) **i.** Να αιτιολογήσετε γιατί $συνθ=0,4$. (Μονάδες 7)

ii. Με χρήση του βi) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: συν(3π+θ) και $ημ\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$. (Μονάδες 9)

3.4 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 19 14233

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}\text{συν}2x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της f; (Μονάδες 9)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου. (Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή 1. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 20 14280

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\text{ημ}x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του $x\in[0,2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή; (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 21 14323

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-3\text{συν}2x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f. (Μονάδες 12)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου. (Μονάδες 13)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2x					
συν2x					
$f(x)=-3\text{συν}2x$					

ΘΕΜΑ 22 15009

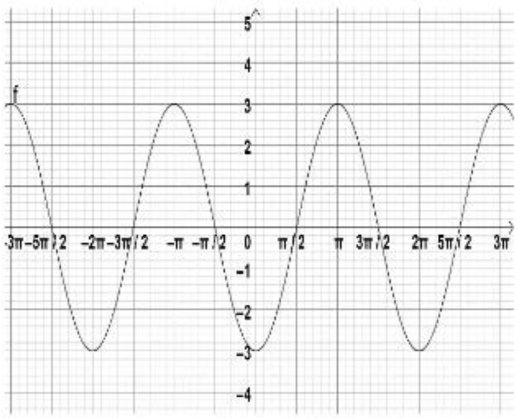
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-3\text{συν}x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f. (Μονάδες 8)

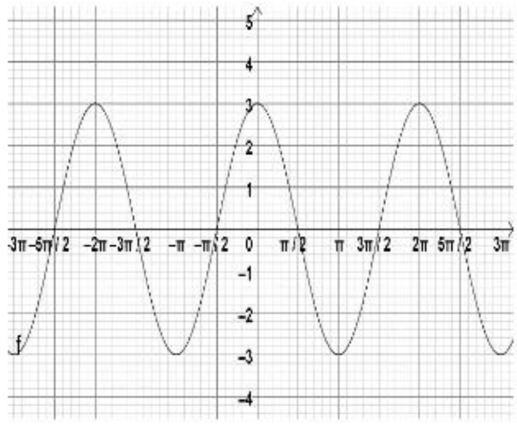
β) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f. (Μονάδες 7)

γ) Από τις παρακάτω τέσσερις γραφικές παραστάσεις μια μόνο αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της f, να επιλέξετε αυτή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $f(x)=-3\text{συν}x$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

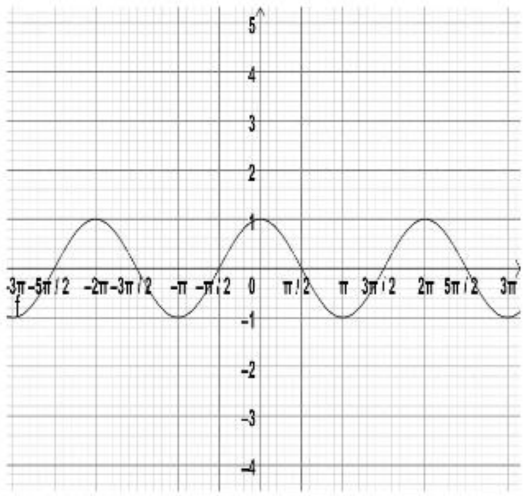
Α)



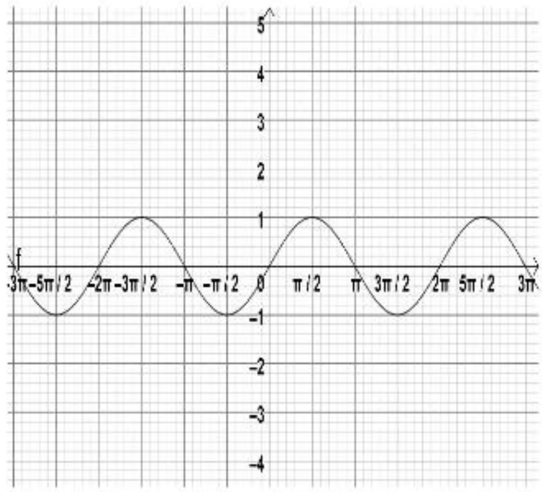
Β)



Γ)



Δ)



(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 23 15091

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{2}\cdot συνx$, $x\in\mathbb{R}$.

α) **i.** Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό f(2025π) (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 24 15172

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4ημ(11π-x)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι:

i. $ημ(11π-x)=ημx$, $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

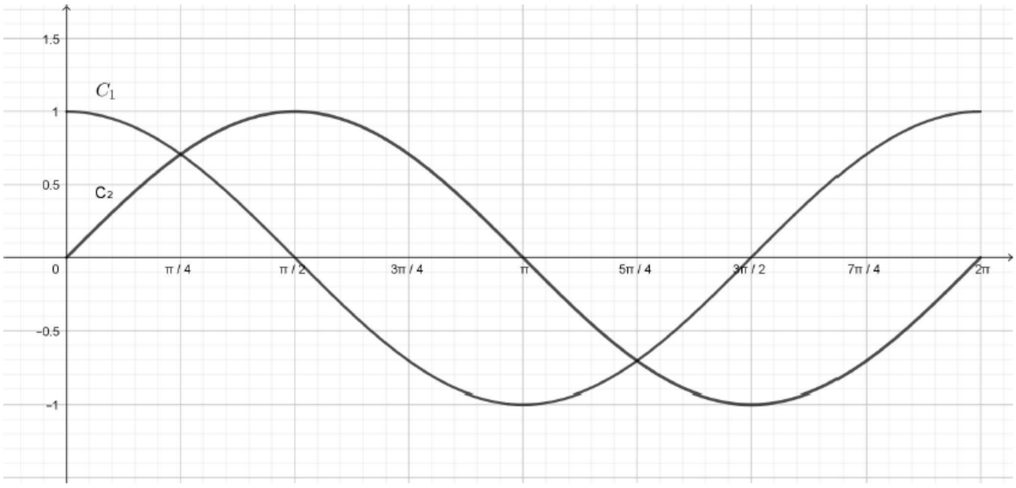
ii. $f(x)=4ημx$, $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 4)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτηση $f(x)=4ημx$, όταν $x\in[0,2π]$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 25 15644

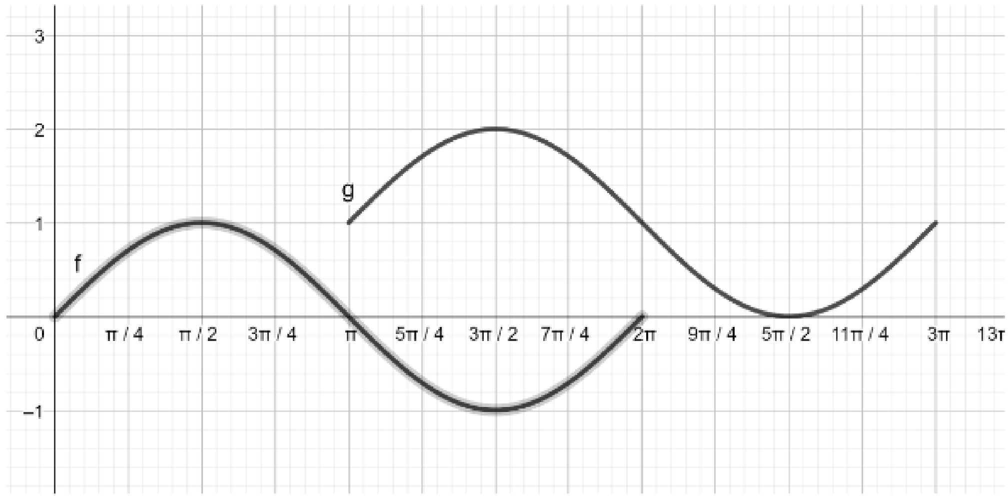
Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 για $x \in [0,2\pi]$.



α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x) = συνx$ και $g(x) = ημx$ για κάθε $x \in [0,2\pi]$, ποια από τις C_1 και C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = συνx$ και ποια της $g(x) = ημx$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια του σχήματος να λύσετε την εξίσωση $ημx = συνx$ στο διάστημα $[0,2\pi]$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 26 15788



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ημx$ στο διάστημα $[0,2\pi]$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g που προέκυψε από την f με δύο διαδοχικές μετατοπίσεις. Με τη βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g, την μέγιστη τιμή της και σε ποια θέση την αποκτά. (Μονάδες 13)

β) **i.** τις δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f από τις οποίες προέκυψε η g (Μονάδες 6)

ii. τον τύπο της g. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 27 15809

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ημ2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f. (Μονάδες 6)

β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{π}{4}$	$\frac{π}{2}$	$\frac{3π}{4}$	π
2x					
$f(x) = ημ2x$					

(Μονάδες 10)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα μιας περιόδου.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 28 15810

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = συν2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της g. (Μονάδες 6)

β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{π}{4}$	$\frac{π}{2}$	$\frac{3π}{4}$	π
2x					
$g(x) = συν2x$					

(Μονάδες 10)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g σε διάστημα μιας περιόδου.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 29 14238

Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση

$$h(t) = 8 + 6 \cdot ημ\left(\frac{π \cdot t}{30}\right) \text{ και } 0 \le t \le 180$$

α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας. (Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec;

(Μονάδες 4+2)

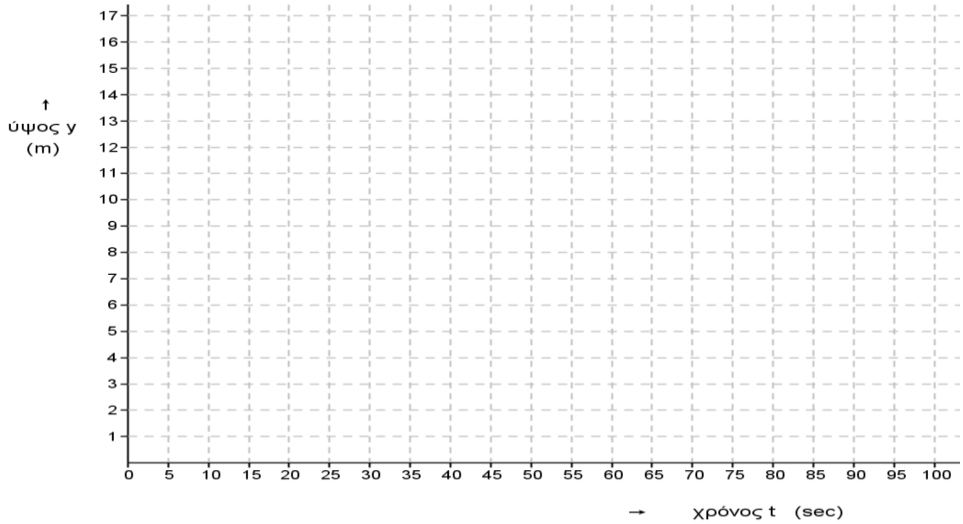
δ) Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:

i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους h(t)

t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)							

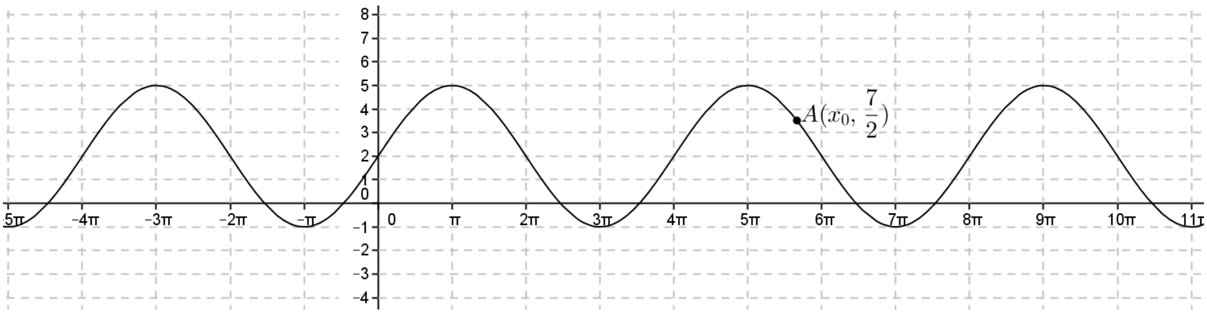
(Μονάδες 3)

ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h(t) με $0 \le t \le 90$ (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 30 14239

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής $f(x) = \rho \cdot ημ(\omega x) + k$, με ρ,k πραγματικές σταθερές και $\omega > 0$.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f. (Μονάδες 3)

ii. την περίοδο Τ της συνάρτησης f. (Μονάδες 3)

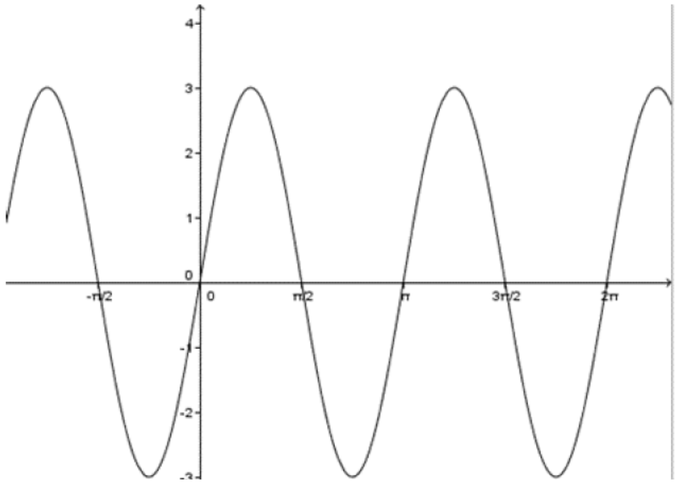
β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ, k και ω. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι $\rho = 3$, $\omega = \frac{1}{2}$ και $k = 2$ να προσδιορίσετε αλγεβρικά την τετμημένη x_0 του σημείου Α της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 31 15062

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής $f(x) = \rho\eta\mu(\alpha x)$, $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \rho > 0$.



α) Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδό της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.
(Μονάδες 6)

β) Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς α και ρ.
(Μονάδες 6)

Έστω $\rho = 3$ και $\alpha = 2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4. (Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.
(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 32 15992

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \rho\eta\mu x$, $g(x) = \eta\mu(\omega x)$, όπου ρ,ω>0.

α) Να βρεθούν οι τιμές των ρ,ω, αν είναι γνωστό ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι –2 και η περίοδος της g είναι π. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 6)

β) **i.** Να κάνετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2\eta\mu x$, $x \in [0,\pi]$ και $g(x) = \eta\mu(2x)$, $x \in [0,\pi]$. (Μονάδες 10)

ii. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $2\eta\mu\frac{5\pi}{9} > \eta\mu\frac{10\pi}{9}$. (Μονάδες 9)

3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 33 14280

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2ημx+1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του $x\in[0,2π]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή; (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 34 14324

Έστω γωνία x για την οποία ισχύουν: $0<x<\frac{π}{2}$ και $ημx+ημ(π-x)=1$

α) Να αποδείξετε ότι $ημx=\frac{1}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την γωνία x. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 35 15036

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3συν2x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) i. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f. (Μονάδες 10)

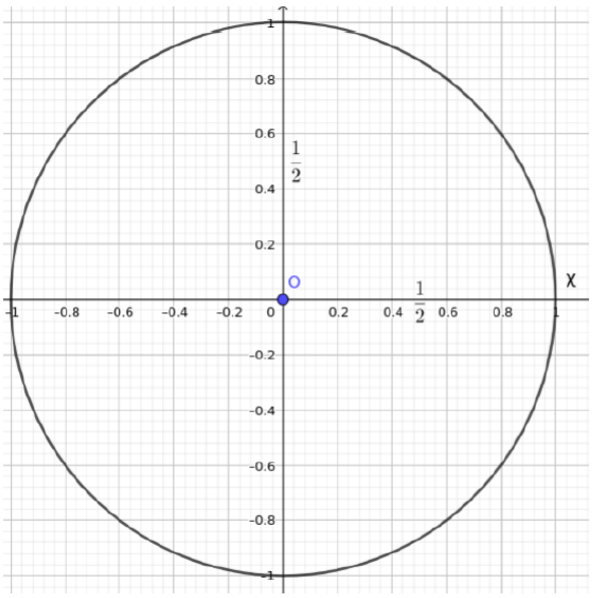
ii. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f. (Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-3$ στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 36 14977

α) Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα [0,2π), με αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox, οι οποίες να έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 12)



β) Να λύσετε την εξίσωση $ημx=\frac{1}{2}$ για $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 37 15969

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2συν(13π+x)-2ημ\left(\frac{π}{2}-x\right)$

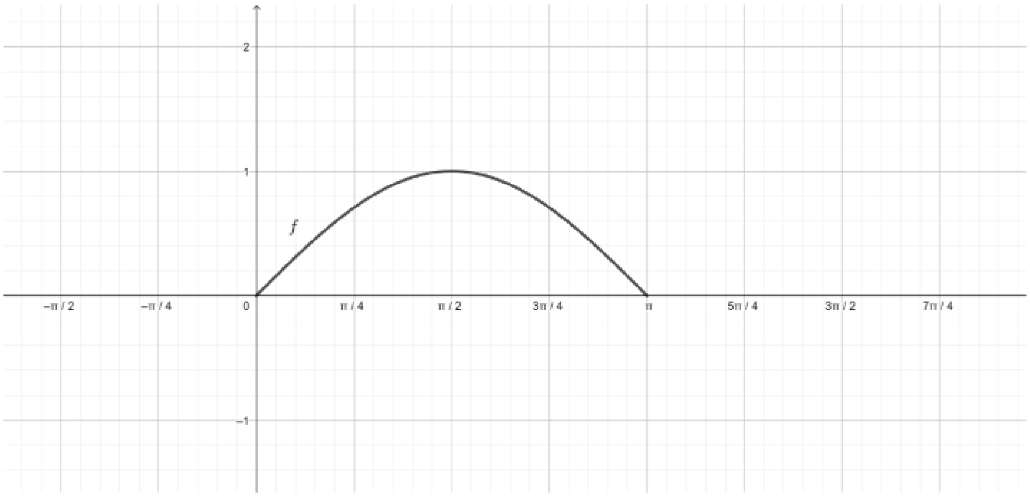
α) Να δείξετε ότι $συν(13π+x)=-συνx$. (Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $f(x)=-4συνx$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-2$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 38 15789

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=ημx$ με $x\in[0,π]$.



α) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και μετατοπίζοντας κατάλληλα την f να σχεδιάσετε την συνάρτηση $g(x)=f\left(x-\frac{π}{2}\right)$. (Μονάδες 8)

ii. Ποιος είναι ο τύπος της f και σε ποιο διάστημα ορίζεται; (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ $4^{ο}$

ΘΕΜΑ 39 15014

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=α\cdot ημβx$, με α, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.

α) Να βρείτε την τιμή του α, αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2. (Μονάδες 6)

β) Αν $α=2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία είναι $f\left(\frac{π}{16}\right)=2$ είναι $β=8$. (Μονάδες 10)

γ) Αν $α=2$ και $β=8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1$ στο διάστημα $\left[0,\frac{π}{2}\right]$.

(Μονάδες 9)

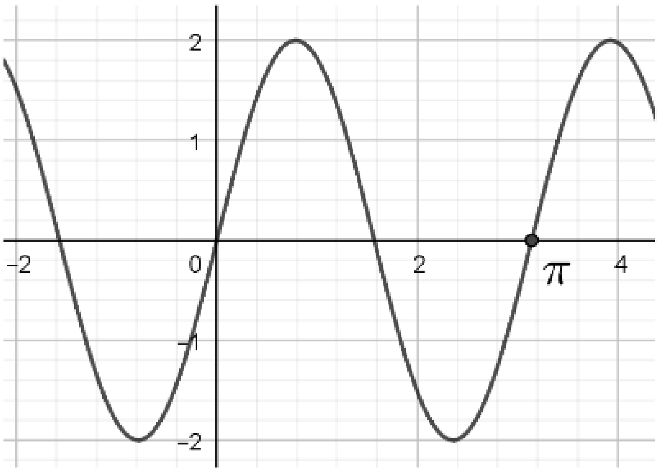
ΘΕΜΑ 40   15003

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = ημαx \cdot \left[συν\left(\frac{π}{2} - αx \right) + 2 \right] - συναx \cdot συν(π - αx) - 1, \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) **i.** Να δείξετε ότι $f(x) = 2 \cdot ημαx$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

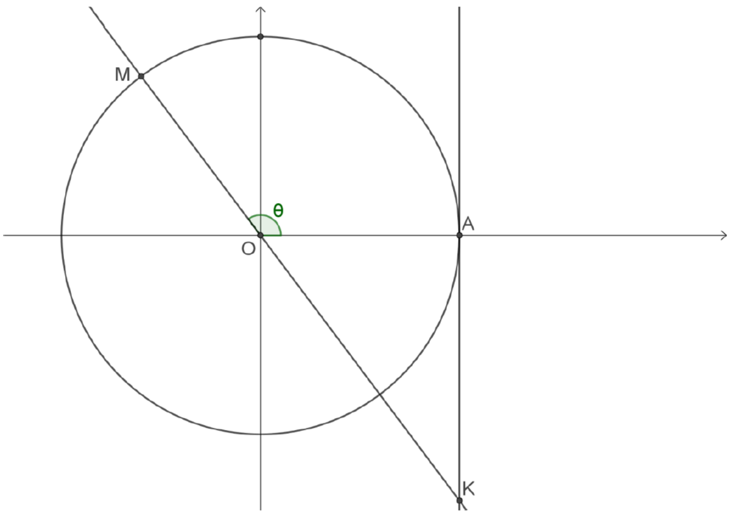
ii. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να δείξετε ότι $α = 2$. (Μονάδες 6)



β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $ε: y = 1$ και για κάθε $x \in [0, π]$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 41   15025

Στο διπλανό σχήμα δίνεται μια γωνία $θ = \widehat{AOM}$ με $ημθ = \frac{4}{5}$, της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Μ και την ευθεία $x = 1$ στο σημείο Κ.



α) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς συνθ, εφθ, σφθ. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Μ και Κ. (Μονάδες 6)

γ) Έστω μια γωνία $φ \in [0, 2π]$ για την οποία ισχύει $ημφ = \frac{3}{5}$ και $συνφ < 0$.

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία φ έχει την τελική πλευρά της στο 2ο τεταρτημόριο. (Μονάδες 5)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί $θ < φ$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 42 15026

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\left(f(x)-1\right)^2+\left(f(1-x)-1\right)^2=4$, για κάθε $x\in$IR. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 43 15049

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\eta\mu\left(\pi+x\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $-2\le f(x)\le 2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα y΄y. (Μονάδες 3)

ii. Δυο σημεία τομής της C_f με τον x΄x. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 44 15050

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y=1$. (Μονάδες 5)

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ και $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. (Μονάδες 6)

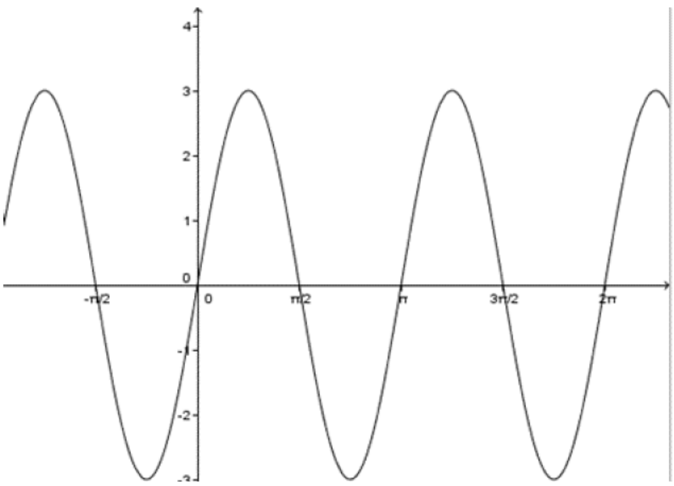
δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα [0,2π]. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 45 15062

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής $f(x)=\rho\eta\mu(\alpha x)$, $x\in$IR και $\alpha,\rho>0$.

α) Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδό της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 6)

β) Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς α και ρ. (Μονάδες 6)



Έστω $\rho = 3$ και $\alpha = 2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4. (Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο. (Μονάδες 6)

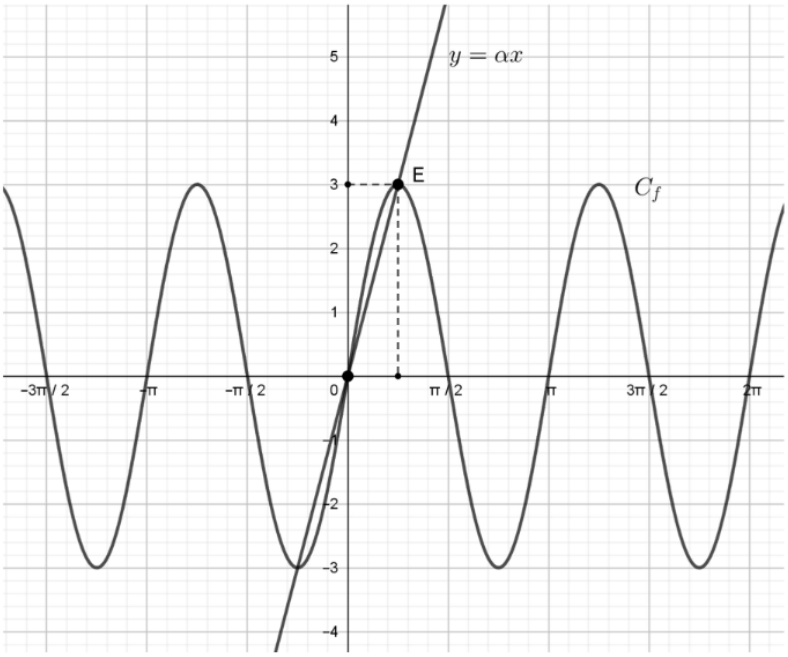
ΘΕΜΑ 46 15287

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho\eta\mu(\omega x)$, όπου $\omega > 0$, $\rho > 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,

α) Να δείξετε ότι $\rho = 3$ και $\omega = 2$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $3\eta\mu(2x) - \dfrac{12}{\pi}x = 0$. (Μονάδες 10)

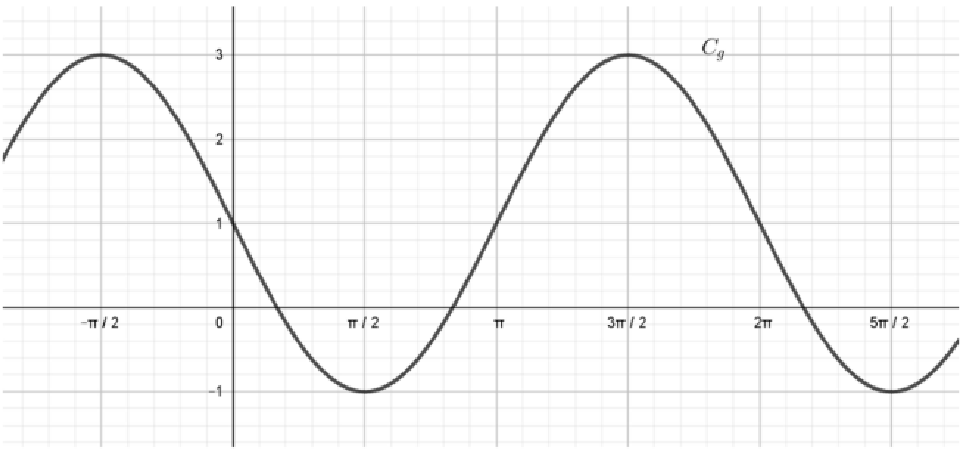


ΘΕΜΑ 47 15288

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο Τ, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f. (Μονάδες 3)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \alpha\eta\mu\beta x + \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

ii. Για $\alpha=-2$, $\beta=1$ και $\gamma=1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ στο διάστημα $[0,\pi)$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 48 15289

Δίνεται το σύστημα: (Σ): $\begin{cases}-x+2y=1\\ x+\lambda y=\lambda\end{cases}$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) **i.** Αν $\lambda=-1$, να λύσετε το σύστημα. (Μονάδες 2)

ii. Αν (x_0,y_0) είναι η λύση του συστήματος για $\lambda=-1$, να βρείτε γωνία $\theta\in[0,2\pi)$ τέτοια ώστε $x_0=\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y_0=\eta\mu\theta$. (Μονάδες 4)

β) Αν $\lambda=1$ και (x_1,y_1) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω, τέτοια ώστε $x_1=\sigma\upsilon\nu\omega$ και $y_1=\eta\mu\omega$. (Μονάδες 7)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση την (x_2,y_2) με $x_2=\sigma\upsilon\nu\varphi$ και $y_2=\eta\mu\varphi$, $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

i. Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{3}{5}$ και $\eta\mu\varphi=\frac{4}{5}$. (Μονάδες 6)

ii. Να υπολογίσετε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 49 15347

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\sigma\upsilon\nu^2(\pi-x)-3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\alpha$, με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=2\sigma\upsilon\nu^2x-3\sigma\upsilon\nu x+\alpha$. (Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{3},1\right)$. (Μονάδες 5)

δ) Για $\alpha=2$ και $g(x)=2\eta\mu^2x+9\sigma\upsilon\nu x-9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 50 15422

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-2\eta\mu(\pi+2x)$, με $\alpha>0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=(\alpha+2)\eta\mu2x$. (Μονάδες 5)

β) **i.** Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 4, να δείξετε ότι $\alpha=2$. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε την περίοδο της f. (Μονάδες 5)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου. (Μονάδες 5)

δ) Αν $g(x)=5-\sigma\upsilon\nu^2 2x$, να βρείτε, αν υπάρχουν,. Τα κοινά σημεία της C_f με την C_g, όπου C_f, C_g οι γραφικές παραστάσεις των f, g αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

- Καλούμε **μονώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής αx^{ν}, όπου α είναι πραγματικός αριθμός και ν ένας θετικός ακέραιος. Μονώνυμο του x καλούμε επίσης και κάθε πραγματικό αριθμό.

- Καλούμε **πολυώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής :
$$\alpha_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$$
όπου ν είναι ένας φυσικός αριθμός και $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{\nu}$ είναι πραγματικοί αριθμοί.
  - Τα μονώνυμα $\alpha_{\nu}x^{\nu},\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1},\ldots,\alpha_1 x,\alpha_0$ λέγονται **όροι** του πολυωνύμου.
  - Οι αριθμοί $\alpha_{\nu},\alpha_{\nu-1},\ldots,\alpha_1,\alpha_0$ λέγονται **συντελεστές** του πολυωνύμου.
  - Ειδικότερα ο αριθμός α_0 λέγεται **σταθερός όρος** του πολυωνύμου.

- **Βαθμό** ενός πολυωνύμου $\mathrm{P}(x)$ ονομάζουμε τον μεγαλύτερο εκθέτη του x που εμφανίζεται στο πολυώνυμο, με την προϋπόθεση ότι ο συντελεστής του είναι διάφορος του μηδενός. (Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός)

- Δυο πολυώνυμα $\mathrm{P}(x)=\alpha_{\mu}x^{\mu}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $Q(x)=\beta_{\nu}x^{\nu}+\ldots+\beta_1 x+\beta_0$ με $\mu\geq\nu$ θα λέμε ότι είναι **ισα** όταν ισχύουν συγχρόνως :
$\boxed{\alpha_0=\beta_0,\ \alpha_1=\beta_1,\ \alpha_{\nu}=\beta_{\nu}}$ και $\boxed{\alpha_{\nu+1}=\alpha_{\nu+2}=\ldots=\alpha_{\mu}=0}$.

- Στο πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=\alpha_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ αν αντικαταστήσουμε το x με μια τιμή $\rho\in\Re$, τότε ο αριθμός που προκύπτει : $\mathrm{P}(\rho)=\kappa\in\Re$, λέγεται **αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για** $x=\rho$**.** Ειδικότερα αν ισχύει $\mathrm{P}(\rho)=0$, τότε ο αριθμός ρ λέγεται **ρίζα του πολυωνύμου.**

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 3 σελ. 131 Α΄ ομάδας)
Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu\in\Re$, το πολυώνυμο
$\mathrm{P}(x)=(4\mu^3-\mu)x^3+4\left(\mu^2-\frac{1}{4}\right)x-2\mu+1$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

<u>Λύση :</u> Το $\mathrm{P}(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, όταν ισχύουν συγχρόνως :

- $4\mu^3-\mu=0\Leftrightarrow\mu(4\mu^2-1)=0\Leftrightarrow\left\langle\begin{array}{l}\mu=0\\ \acute{\eta}\\ 4\mu^2-1=0\Leftrightarrow\mu^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\mu=\pm\frac{1}{2}\end{array}\right.$
- $\mu^2-\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow\mu^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\mu=\pm\frac{1}{2}$
- $-2\mu+1=0\Leftrightarrow\mu=\frac{1}{2}$. Η κοινή λύση των παραπάνω εξισώσεων είναι $\mu=\frac{1}{2}$.

2. (Άσκηση 4 σελ. 131 Α΄ ομάδας)
Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \Re$, τα πολυώνυμα $P(x)=(\alpha^2-3\alpha)x^3+x^2+\alpha$ και $Q(x)=-2x^3+\alpha^2x^2+(\alpha^3-1)x+1$ είναι ισα.
<u>Λύση :</u> Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ισα, όταν ισχύουν συγχρόνως :

- $\alpha^2-3\alpha=-2 \Leftrightarrow \alpha^2-3\alpha+2=0 \Leftrightarrow \alpha=1$ ή $\alpha=2$
- $1=\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha=\pm1$
- $0=\alpha^3-1 \Leftrightarrow \alpha^3=1 \Leftrightarrow \alpha=1$
- $\alpha=1$

Η κοινή λύση των παραπάνω εξισώσεων είναι $\alpha=1$.

3. (Άσκηση 3 σελ. 132 Β΄ ομάδας)
Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ, για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\lambda x^2+\mu x+6$ έχει ρίζα το 1 και ισχύει $P(-2)=-12$.
<u>Λύση :</u>
Το 1 είναι ρίζα του $P(x) \Leftrightarrow P(1)=0 \Leftrightarrow 2+\lambda+\mu+6=0 \Leftrightarrow \lambda+\mu=-8$ (1)
Επίσης : $P(-2)=-12 \Leftrightarrow 2(-2)^3+\lambda(-2)^2+\mu(-2)+6=-12 \Leftrightarrow -16+4\lambda-2\mu+6=-12 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4\lambda-2\mu=-2 \Leftrightarrow 2\lambda-\mu=-1$ (2)
Από (1) και (2) έχω : $\begin{cases}\lambda+\mu=-8\\ 2\lambda-\mu=-1\end{cases}$ προσθέτοντας κατά μέλη έχω : $3\lambda=-9 \Leftrightarrow \lambda=-3$ και από (1) : $-3+\mu=-8 \Leftrightarrow \mu=-5$.

<u>ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :</u>

4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.
i. Η παράσταση $P(x)=x^0$ είναι πολυώνυμο.
ii. Ένα σταθερό πολυώνυμο έχει βαθμό 0.
iii. Αν για το πολυώνυμο P(x) και ισχύει P(ρ)≠0, τότε ο αριθμός ρ δεν είναι ρίζα του P(x).
iv. Αν τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) είναι μη μηδενικά και έχουν βαθμούς μ και ν αντίστοιχα, τότε το πολυώνυμο P(x) Q(x) έχει βαθμό μ+ν.

5. Αν οι βαθμοί των πολυωνύμων P(x) και Q(x) είναι μ και ν αντίστοιχα, να αντιστοιχίσετε στον παρακάτω πίνακα τα πολυώνυμα που βρίσκονται στη στήλη Α με τους βαθμούς τους στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. P(x).Q(x)	1. ν^2
Β. $[P(x)]^2$	2. 2μ
Γ. Q(Q(x))	3. μ+ν
Δ. P(Q(x))	4. μν

6. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.
i. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\alpha_1 x+\alpha_0$.
α. Αν $\alpha_0=0$, τότε ο αριθμός ….είναι ρίζα του P(x)
β. Αν $\alpha_\nu\neq0$, τότε ο βαθμός του P(x) είναι …..
γ. Αν το άθροισμα των συντελεστών του P(x) είναι 0, τότε ο αριθμός …... είναι ρίζα του P(x)
δ. Αν ο βαθμός του P(x) είναι ν, τότε ο βαθμός του $P^2(x)$ είναι …………
ε. Αν ο βαθμός του P(x) είναι ν, τότε ο βαθμός του P(P(x)) είναι……….

ii. Αν το πολυώνυμο P(x) είναι μηδενικού βαθμού ή το μηδενικό πολυώνυμο, τότε η μορφή του είναι …………

iii. Αν το πολυώνυμο P(x) είναι βαθμού 1, τότε έχει τη μορφή ………..

7. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i. Αν ο σταθερός όρος ενός πολυωνύμου είναι 0, τότε το πολυώνυμο έχει ρίζα τον αριθμό:

Α. 1 Β. 0 Γ. -1 Δ. 2

ii. Αν το πολυώνυμο P(x) είναι $3^{ου}$ βαθμού, το Π(x) είναι $2^{ου}$ βαθμού και ισχύει η ισότητα P(x)=δ(x) Π(x), τότε το δ(x) έχει βαθμό:

Α. 2 Β. 1 Γ. 0

iii. Αν για το πολυώνυμο P(x), ισχύει $x^4+3x=P(x)(2x+1)$, τότε ο βαθμός του P(x) είναι:

Α. 3 Β. 2 Γ. 1 Δ. 4

iv. Το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου $P(x)=(2x-1)^{30}+x$ είναι:

Α. 1 Β. 2 Γ. 3 Δ. 4

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

8. Για ποιο λόγο οι παρακάτω παραστάσεις δεν είναι πολυώνυμα του x ;

i. $5+2\sqrt{x}$ ii. $\eta\mu x+7$ iii. $6\cdot\frac{1}{x}+4$ iv. $5x^3+3|x|-7$

9. Να εξετάσετε ποιες από τις ακόλουθες παραστάσεις είναι μονώνυμα και ποιες πολυώνυμα :

i. $P(x)=\frac{5}{3}x^4$ ii. $Q(x)=-2\sqrt[4]{x^7}$ iii. $A(x)=4x^{-7}$ iv. $E(x)=11x^4-3x^3$ v. $H(x)=12x^7-3x^{\frac{1}{3}}$

10. Δίνονται τα πολυώνυμα : $P(x)=4x^3+5x^2-6x+7$ και $Q(x)=x^2+2$. Να βρείτε τα πολυώνυμα:

i. $P(x)+Q(x)$ ii. $P(x)-5Q(x)$ iii. $P(x)\cdot Q(x)$ iv. $(Q(x))^2-P(x)$

11. Να βρεθούν οι τιμές τις παραμέτρου λ για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^3-4\lambda)x^4+(\lambda^2+2\lambda)x+\lambda+2$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

12. Για ποιες τιμές του $\lambda\in\Re$ το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^2-2\lambda)x^3+(\lambda^2-5\lambda+6)x+\frac{\lambda}{2}-1=0$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

13. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε να είναι ισα τα πολυώνυμα $P(x)=(\lambda^2-4)x^3+(\lambda^2+2\lambda)x^2-\lambda^2x+3\lambda-8$ και $Q(x)=(3\lambda+2)x^2-2\lambda x+\lambda-\lambda^2$.

14. Να βρεθούν οι τιμές των κ, λ, μ ώστε να είναι ισα τα πολυώνυμα $P(x)=(2\kappa-2\lambda)x^2+(\kappa+\lambda)x+(2\mu-2)$ και $Q(x)=(\mu+\lambda+1)x^2+\mu x+2\lambda$

15. Να βρείτε τα α,β,γ έτσι ώστε το πολυώνυμο $P(x)=4x^2-2x+1$ να παίρνει τη μορφή $P(x)=\alpha x(x-3)+(\beta+2)x+\gamma-1$

16. Να προσδιοριστεί ο βαθμός του πολυώνυμου $P(x)=(\lambda^2+5\lambda+9)x^2+(\lambda-3)x+(\lambda^2-1)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

17. Να προσδιοριστεί, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ο βαθμός του πολυώνυμου :
$\mathrm{P}(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)x^2 + (\lambda^2 + 1)x + 2$

18. Δίνεται το πολυώνυμο : $\mathrm{P}(x) = (\lambda^3 - \lambda)x^2 + (\lambda^2 + \lambda)x + \lambda^2 - 2\lambda - 3$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το $\mathrm{P}(x)$ είναι :
i. είναι σταθερό πολυώνυμο, ii. είναι μηδενικό πολυώνυμο, iii. έχει βαθμό μηδέν.

19. Έστω τα πολυώνυμα $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 8$ και $Q(x) = \alpha x^3 - \beta x^2 + \gamma x - \delta$. Να βρείτε τι πρέπει να ισχύει για τους αριθμούς α, β, γ, δ, ώστε το πολυώνυμο P(x) - Q(x) να είναι :
i. 3^{ου} βαθμού ii. το πολύ 2^{ου} βαθμού iii. Μηδενικό πολυώνυμο.

20. Να βρείτε τα $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η αριθμητική τιμή του πολυώνυμου $P(x) = (\lambda^2 + 4\lambda)x^3 - (1+\lambda)x^2 + (3\lambda + 2)x + 3$ για x=-2 να είναι 5.

21. Αν το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 4, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = \mathrm{P}(1 - 3x)$ έχει ρίζα τον αριθμό -1.

22. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί -3 και 2 είναι ρίζες του πολυώνυμου $P(x) = -3x^2 + 5x + 2$

23. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ,λ για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \kappa x^2 + (\lambda - 2)x + 6$ έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 2.

24. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο $P(x) = (2\lambda^2 - 3)x^3 + 4\lambda x^2 - (\lambda - 5)x + 2005$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

25. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α,β για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$ έχει ρίζα τον αριθμό 2 και το άθροισμα των συντελεστών του είναι 8. (Υπόδειξη : Για να βρούμε το άθροισμα των συντελεστών του $\mathrm{P}(x)$, υπολογίζουμε το $\mathrm{P}(1)$)

26. Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = (x-1)^{2017} - x^{2018}$. Να βρείτε :
i. τον σταθερό όρο του $\mathrm{P}(x)$ ii. το άθροισμα των συντελεστών του $\mathrm{P}(x)$.

27. Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = (\kappa - 1)x^3 + \kappa x^2 - (3\kappa - \lambda)x + 3\lambda$. Να βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το $\mathrm{P}(x)$ να έχει ρίζα το 2 και η αριθμητική τιμή του για $x = -1$ να είναι 6.

28. Να βρείτε το πολυώνυμο P(x) για το οποίο ισχύει : $(3x - 1) \cdot P(x) = 3x^3 - 13x^2 + 13x - 3$.

29. Έστω το πολυώνυμο P(x), για το οποίο γνωρίζουμε ότι :
$P(2x+1) = 3P(x) + 2$ για κάθε και $P(0) = 0$. Να δείξετε ότι $P(15) = 80$.

4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

- **ΘΕΩΡΗΜΑ (ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΗΣ)**

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x)\neq 0$ υπάρχουν δυο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$, τέτοια ώστε : $\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)+\upsilon(x)$ όπου το $\upsilon(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

Το $\Delta(x)$ λέγεται διαιρετέος, το $\delta(x)$ διαιρέτης, το $\pi(x)$ πηλίκο και το $\upsilon(x)$ υπόλοιπο της διαίρεσης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

Α. ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

1. Να κάνετε τη διαίρεση : $(x^3-5x^2+2x-1):(x-3)$ και στη συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Λύση :

Στη διαίρεση της εκφώνησης, το πολυώνυμο $\Delta(x)=x^3-5x^2+2x-1$ ονομάζεται διαιρετέος ενώ το πολυώνυμο $\delta(x)=x-3$ ονομάζεται διαιρέτης. Για να εκτελέσουμε τη διαίρεση ακλουθούμε τα εξής βήματα :

Βήμα 1 : Κάνουμε το σχήμα της διαίρεσης και γράφουμε τα πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x. Αν λείπει κάποια δύναμη την συμπληρώνουμε με συντελεστή μηδέν.

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Βήμα 2 : Διαιρούμε τον πρώτο όρο του διαιρετέου x^3 με τον πρώτο όρο του διαιρέτη x. Έτσι : $x^3:x=x^2$

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \cline{2-2} & x^2 \end{array}$$

Βήμα 3 : Πολλαπλασιάζουμε τον πρώτο όρο του πηλίκου x^2 με τον διαιρέτη : $x^2(x-3)=x^3-3x^2$ και το γινόμενο αυτό το αφαιρούμε από τον διαιρετέο.

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \cline{2-2} -x^3+3x^2 \qquad\quad & x^2 \\ \hline -2x^2+2x-1 & \end{array}$$

Βήμα 4 : Το πολυώνυμο $-2x^2+2x-1$ είναι το πρώτο μερικό υπόλοιπο. Θεωρώντας αυτό ως νέο διαιρετέο, επαναλαμβάνουμε τα δυο προηγούμενα βήματα.

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ -x^3+3x^2 & x^2-2x \\ \hline -2x^2+2x-1 & \\ 2x^2-6x & \\ \hline -4x-1 & \end{array}$$

Βήμα 5 : Το πολυώνυμο $-4x-1$ είναι το δεύτερο μερικό υπόλοιπο. Θεωρώντας αυτό ως νέο διαιρετέο, επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα βήματα. **Όταν το μερικό υπόλοιπο που θα προκύψει έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του διαιρέτη, τότε η διαίρεση σταματά.** Δηλαδή το τελικό υπόλοιπο της διαίρεσης είναι -13 και το πηλίκο x^2-2x-4

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ -x^3+3x^2 & x^2-2x-4 \\ \hline -2x^2+2x-1 & \\ 2x^2-6x & \\ \hline -4x-1 & \\ 4x-12 & \\ \hline -13 & \end{array}$$

Από την παραπάνω διαδικασία προκύπτει η ταυτότητα της διαίρεσης : $\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)+\upsilon(x) \Leftrightarrow x^3-5x^2+2x-1=(x-3)\cdot(x^2-2x-4)+(-13)$

(Διαιρετέος)=(διαιρέτης)(πηλίκο)+(υπόλοιπο)

2. Να κάνετε τη διαίρεση : ($2x^4$ + $3x^3$ – x^2 + 5x – 2) : (x^2 + x) και στη συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Λύση :

Γράφουμε το γνωστό σχήμα της διαίρεσης

Διαιρούμε το μεγιστοβάθμιο όρο του Διαιρετέου με το μεγιστοβάθμιο όρο του διαιρέτη. Έτσι υπολογίζουμε τον πρώτο όρο του πηλίκου. Άρα : $\dfrac{2x^4}{x^2}$ = $2x^2$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4+3x^3-x^2+5x-2 & x^2+x \\ \hline & \mathbf{2x^2} \end{array}$$

Πολλαπλασιάζουμε τον όρο που βρήκαμε στο πηλίκο με κάθε όρο του διαιρέτη (κάνουμε δηλαδή επιμεριστική ιδιότητα).

$$\begin{array}{r|l} 2x^4+3x^3-x^2+5x-2 & x^2+x \\ \cline{2-2} -\mathbf{2x^4-2x^3} & 2x^2 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Τοποθετούμε το αποτέλεσμα κάτω απ' το Διαιρετέο, αλλά **με αντίθετα πρόσημα** (επειδή εννοείται ότι αφαιρούμε το αποτέλεσμα από το Διαιρετέο). Προσέχουμε κάθε όρος να βρίσκεται ακριβώς κάτω από τον αντίστοιχο (ομοιοβάθμιο) όρο του Διαιρετέου.

$$\begin{array}{r|l} \cancel{2x^4}+3x^3-x^2+5x-2 & x^2+x \\ \cline{2-2} -\cancel{2x^4}-2x^3 & 2x^2 \\ \cline{1-1} \mathbf{x^3-x^2+5x-2} & \end{array}$$

Εκτελούμε την πρόσθεση. Οι αντίθετοι όροι διαγράφονται. Έπειτα «κατεβάζουμε» και τους υπόλοιπους όρους του Διαιρετέου.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4+3x^3-x^2+5x-2 & x^2+x \\ \cline{2-2} -2x^4-2x^3 & 2x^2+\mathbf{x} \\ \cline{1-1} x^3-x^2+5x-2 & \end{array}$$

Συνεχίζουμε κατά τον ίδιο τρόπο, έως ότου ο βαθμός του υπολοίπου γίνει μικρότερος από εκείνον του διαιρέτη. Τότε η διαίρεση σταματάει.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4+3x^3-x^2+5x-2 & x^2+x \\ \cline{2-2} -2x^4-2x^3 & 2x^2+x \\ \cline{1-1} \cancel{x^3}-x^2+5x-2 & \\ -\mathbf{\cancel{x^3}-x^2} & \\ \cline{1-1} \mathbf{-2x^2+5x-2} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4+3x^3-x^2+5x-2 & x^2+x \\ \cline{2-2} -2x^4-2x^3 & 2x^2+x-\mathbf{2} \\ \cline{1-1} x^3-x^2+5x-2 & \\ -x^3-x^2 & \\ \cline{1-1} -2x^2+5x-2 & \\ \cline{1-1} \mathbf{2x^2+2x} & \end{array}$$

Άρα, στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης θα γράφεται:

$$\underbrace{2x^4+3x^3-x^2+5x-2}_{\Delta(x)} = \underbrace{(x^2+x)}_{\delta(x)} \cdot \underbrace{(2x^2+x-2)}_{\pi(x)} + \underbrace{7x-2}_{\upsilon(x)}$$

<u>ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ</u> ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ P(x) ΜΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ x-ρ (ΣΧΗΜΑ HORNER)

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυώνυμου $\mathrm{P}(x)$ με το $x-\rho$ είναι ισο με την τιμή του πολυώνυμου για $x=\rho$. Είναι δηλαδή $\upsilon=\mathrm{P}(\rho)$.
Έτσι η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται : $\mathrm{P}(x)=(x-\rho)\pi(x)+\mathrm{P}(\rho)$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> :
Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $\mathrm{P}(x)$ με το πολυώνυμο $x-\rho$ είναι : $\mathrm{P}(x)=(x-\rho)\pi(x)+\upsilon(x)$. Επειδή ο διαιρέτης $x-\rho$ είναι 1^{ου} βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι σταθερό πολυώνυμο υ. Έτσι έχουμε : $\mathrm{P}(x)=(x-\rho)\pi(x)+\upsilon$ και, αν θέσουμε $x=\rho$, παίρνουμε $\mathrm{P}(\rho)=(\rho-\rho)\pi(\rho)+\upsilon=0+\upsilon=\upsilon$.
Επομένως : $\mathrm{P}(x)=(x-\rho)\pi(x)+\mathrm{P}(\rho)$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> Ένα πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $\mathrm{P}(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $\mathrm{P}(\rho)=0$.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> :
Έστω ότι το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $\mathrm{P}(x)$. Τότε $\mathrm{P}(x)=(x-\rho)\pi(x)$. Από την ισότητα αυτή για $x=\rho$ παίρνουμε $\mathrm{P}(\rho)=(\rho-\rho)\pi(\rho)=0$, που σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του $\mathrm{P}(x)$.

Αντιστρόφως :
Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του $\mathrm{P}(x)$, δηλαδή ισχύει $\mathrm{P}(\rho)=0$. Τότε από τη σχέση $\mathrm{P}(x)=(x-\rho)\pi(x)+\mathrm{P}(\rho)$ παίρνουμε $\mathrm{P}(x)=(x-\rho)\pi(x)$, που σημαίνει ότι το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $\mathrm{P}(x)$.

<u>ΣΧΗΜΑ HORNER</u>
Όταν έχω να εκτελέσω μια διαίρεση ενός πολυώνυμου $\mathrm{P}(x)$ με ένα παράγοντα της μορφής $x-\rho$, τότε χρησιμοποιώ το σχήμα Horner, ακλουθώντας την παρακάτω διαδικασία.

ΠΡΟΣΟΧΗ : Για ένα πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$, οι ακόλουθες εκφράσεις είναι ισοδύναμες :

- «το $x-\rho$ διαιρεί το $\mathrm{P}(x)$»,
- «η διαίρεση του $\mathrm{P}(x)$ με το $x-\rho$ είναι τέλεια»,
- «το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $\mathrm{P}(x)$»
- «το ρ είναι ρίζα του $\mathrm{P}(x)$»
- «το $\mathrm{P}(x)$ διαιρείται με το $x-\rho$»
- «το $x-\rho$ είναι διαιρέτης του $\mathrm{P}(x)$»
- «το υπόλοιπο της διαίρεσης $\mathrm{P}(x):(x-\rho)$ είναι ισο με μηδέν»

Σε κάθε περίπτωση ισχύει : $\boxed{\mathrm{P}(\rho)=0}$.
Αυτό σημαίνει ότι αν δοθεί μια από τις παραπάνω εκφράσεις, τότε θα ισχύουν συγχρόνως όλες μαζί και άμεσα συμπεραίνουμε ότι $\boxed{\mathrm{P}(\rho)=0}$.

Β. ΣΧΗΜΑ HORNER

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3. (Άσκηση 4 σελ.139 Α΄ομάδας σχολικού βιβλίου)
Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων :
i. $(-x^3+75x-250):(x+10)$ ii. $(2x^4-3x^3-10x^2+5x-2):(x-3)$

Λύση :
i.
Βήμα 1 : Κάνουμε τον πίνακα του σχήματος Horner και στην πρώτη γραμμή γράφουμε τους συντελεστές του διαιρετέου. Αν λείπει κάποια δύναμη του x, τη συμπληρώνουμε με συντελεστή μηδέν. Στο τέλος της πρώτης γραμμής, γράφουμε το ρ

-1	0	75	-250	-10

Βήμα 2 : Κατεβάζουμε τον πρώτο συντελεστή στην 1η θέση της 3ης γραμμής.

-1	0	75	-250	-10
$\downarrow$				
-1				

Βήμα 3 : Πολλαπλασιάζουμε με ρ τον πρώτο αριθμό της 3ης γραμμής και γράφουμε το γινόμενο στη 2η θέση της 2ης γραμμής. Στη συνέχεια προσθέτουμε τους αριθμούς της 2ης στήλης και γράφουμε το άθροισμα στη 2η θέση της 3ης γραμμής.

-1	0	75	-250	-10
$\downarrow$ ρ	10 +			
-1	10			

Βήμα 4 : Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία για τον αριθμό που βρίσκεται στη 2η θέση της 3ης γραμμής και συνεχίζουμε μέχρι να τελειώσουν οι συντελεστές του διαιρετέου στην πρώτη γραμμή.

-1	0	75	-250	-10
$\downarrow$	10	-100	250	
-1	10	-25	0	

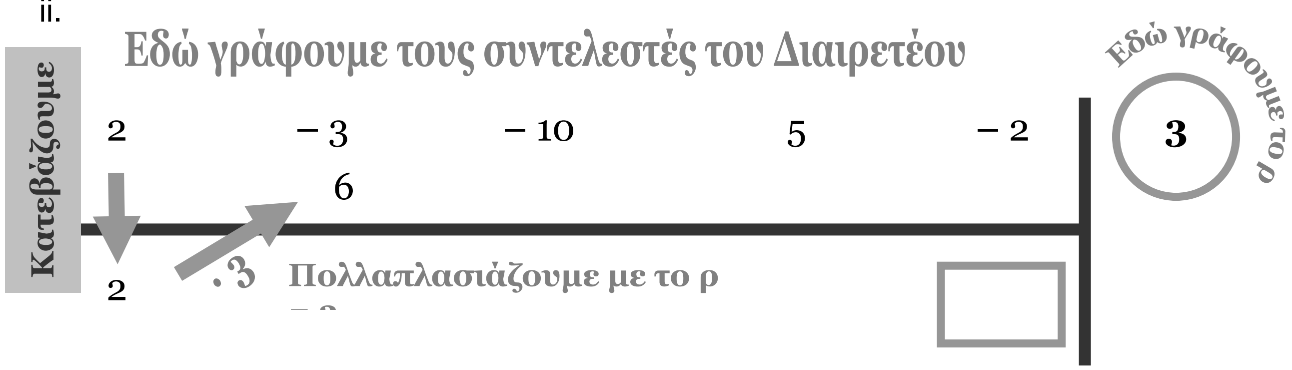
$\underbrace{\text{Συντελεστές\_πηλίκου}}$ $\underbrace{\text{υπόλοιπο}}$

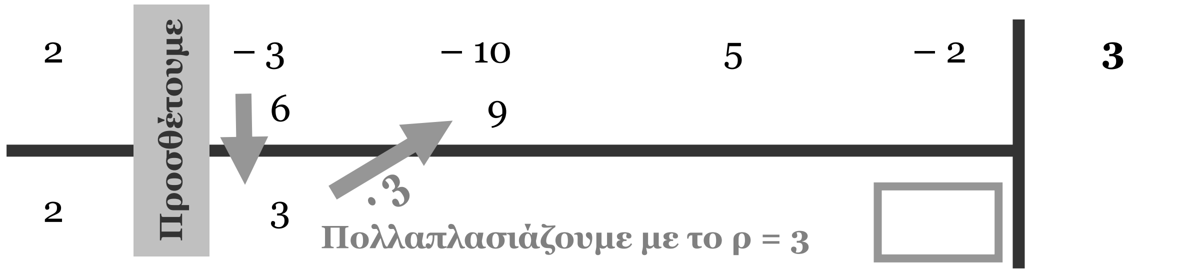
Προσοχή :
- Στη διαίρεση $P(x):(x-\rho)$ ο βαθμός του πηλίκου είναι κατά 1 μικρότερος από τον βαθμό του $P(x)$. Επίσης αφού ο διαιρέτης $x-\rho$ είναι 1ου βαθμού, το υπόλοιπο είναι ένας πραγματικός αριθμός.
- Οι αριθμοί που βρίσκονται στην 3η γραμμή (εκτός από τον τελευταίο) παριστάνουν τους συντελεστές του πηλίκου της διαίρεσης.
- Ο τελευταίος αριθμός της 3ης γραμμής παριστάνει το υπόλοιπο της διαίρεσης.

Με αυτά στο μυαλό μας στη διαίρεση : $(-x^3+75x-250):(x+10)$ ο διαιρετέος είναι 3^{ου} βαθμού, άρα το πηλίκο θα είναι 2^{ου} βαθμού με συντελεστές όπως προκύπτουν από το Horner -1, 10, -25 άρα το πηλίκο έχει τη μορφή : $\pi(x)=-x^2+10x-25$ και το υπόλοιπο $\upsilon=0$. Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι :

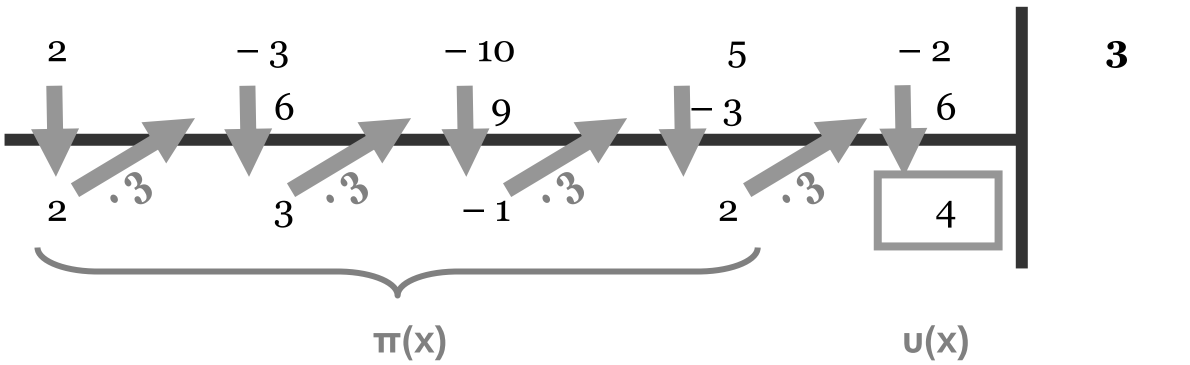
$\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)+\upsilon(x) \Leftrightarrow -x^3+75x-250=(x+10)(-x^2+10x-25)+0$

ii.





Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε στο εξής σχήμα :



Το τελευταίο άθροισμα που βρήκαμε (στο πλαίσιο) είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης, δηλαδή **υ = 4**. Τα υπόλοιπα επί μέρους αθροίσματα (2, 3, –1, 2) αποτελούν τους συντελεστές του πηλίκου. Προφανώς, αφού διαιρέσαμε με το x – 3 που είναι πρώτου βαθμού, το πηλίκο θα είναι ένα πολυώνυμο κατά ένα βαθμό μικρότερο από το Διαιρετέο. Άρα ο πρώτος όρος θα είναι ο x^3, ο δεύτερος ο x^2 κτλ. δηλαδή θα έχουμε :

$$\pi(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2.$$

Γράφουμε τελικά:

$$\underbrace{2x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 5x - 2}_{\Delta(x)} = \underbrace{(x-3)}_{\delta(x)} \cdot \underbrace{(2x^3 + 3x^2 - x + 2)}_{\pi(x)} + \underbrace{4}_{\upsilon(x)}$$

Γ. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ – ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

4. (Άσκηση 6 σελ.139 Α΄ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα της μορφής $x-\rho$ που δίνονται σε κάθε περίπτωση, είναι παράγοντες του $\mathrm{P}(x)$.

i. $\mathrm{P}(x)=x^4-25x^2+144 \qquad x+3$

Λύση :

i. 1^ος^ τρόπος : Το $x+3$ είναι παράγοντας του $\mathrm{P}(x)$ αν και μόνο αν $\mathrm{P}(-3)=0$.
Πράγματι $\mathrm{P}(-3)=(-3)^4-25(-3)^2+144=81-225+144=0$.
2^ος^ τρόπος : Το $x+3$ είναι παράγοντας του $\mathrm{P}(x)$ αν και μόνο αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\mathrm{P}(x):(x+3)$ είναι 0 δηλαδή με το σχήμα Horner :

1	0	-25	0	144	-3
$\downarrow$	-3	9	48	-144	
1	-3	-16	48	0	

Όπως φαίνεται και από το σχήμα Horner το $x+3$ είναι παράγοντας του $\mathrm{P}(x)$.

5. (Άσκηση 3 σελ.139 Α΄ομάδας σχολικού βιβλίου)
Να βρείτε τις τιμές του κ, για τις οποίες το $x-1$ είναι παράγοντας του $g(x)=\kappa^2x^4+3\kappa x^2-4$.

Λύση :

Το $x-1$ είναι παράγοντας του $g(x)$ αν και μόνο αν $g(1)=0 \Leftrightarrow \kappa^2+3\kappa-4=0 \Leftrightarrow \kappa=1 \ \acute{\eta} \ \kappa=-4$.

Δ. ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ P(x) ΕΧΕΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ (Ή ΔΙΑΙΡΕΙΤΑΙ) ΜΕ ΤΟ $(x-\alpha)(x-\beta)$ Ή ΜΕ ΤΟ $(x-\alpha)^2$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

6. (Άσκηση 3 σελ.140 β΄ομάδας σχολικού βιβλίου)
Με τη βοήθεια του σχήματος Horner μόνο, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=2x^4-6x^3+5x^2-3x+2$ διαιρείται με το $(x-1)(x-2)$ και να βρείτε το πηλίκο.

Λύση :

Για το $\mathrm{P}(x)$ και για $\rho=1$ έχουμε :

2	-6	5	-3	2	1
$\downarrow$	2	-4	1	-2	
2	-4	1	-2	0	

Άρα είναι : $\mathrm{P}(x)=(x-1)(2x^3-4x^2+x-2)$

Για το $\pi(x)=2x^3-4x^2+x-2$ και για $\rho=2$ έχουμε :

2	-4	1	-2	2
↓	4	0	2	
2	0	1	0	

Άρα είναι : $\pi(x)=(x-2)(2x^2+1)$. Οπότε τελικά $\mathrm{P}(x)=(x-1)(x-2)(2x^2+1)$.
Αυτό σημαίνει ότι το $\mathrm{P}(x)$ διαιρείται με το $(x-1)(x-2)$ και το πηλίκο της διαίρεσης είναι το $\pi'(x)=2x^2+1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.
- i. Στην ταυτότητα της διαίρεσης πολυωνύμων το υπόλοιπο έχει βαθμό ο οποίος είναι μικρότερος από τον βαθμό του διαιρέτη.
- ii. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x-ρ έχει βαθμό 0.
- iii. Αν για το πολυώνυμο P(x) είναι P(ρ)≠0, τότε το P(x) δεν έχει παράγοντα το x-ρ.
- iv. Αν η διαίρεση του πολυωνύμου P(x) με το x-ρ είναι τέλεια, τότε ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x).

5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.
- i. Αν ο διαιρέτης σε μια διαίρεση πολυωνύμων είναι δευτέρου βαθμού, τότε το υπόλοιπο έχει βαθμό το πολύ 1.
- ii. Αν ο διαιρέτης σε μια διαίρεση πολυωνύμων είναι δευτέρου βαθμού, τότε το υπόλοιπο έχει τη μορφή αx+β.
- iii. Αν το πηλίκο μιας διαίρεσης πολυωνύμων είναι το μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο διαιρετέος είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
- iv. Αν ο διαιρετέος είναι 3^{ου} βαθμού και ο διαιρέτης 2^{ου} βαθμού, τότε το πηλίκο έχει μορφή αx+β με α≠0.
- v. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x^2-4, τότε P(2)=0=P(-2).
- vi. Για να έχει το P(x) παράγοντα το (x-2)(x+2), πρέπει P(2)=0 και π(-2)=0, όπου π(x) το πηλίκο της διαίρεσης του P(x) με x-2.
- vii. Αν το χ-2 δεν είναι παράγοντας του P(x), τότε P(2)≠0.
- viii. Αν P(x)≠0 για κάθε x∈R, τότε το P(x) δεν έχει παράγοντα της μορφής x-ρ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

Α. ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

6. Να γίνουν οι ακόλουθες διαιρέσεις :
- i. $(2x^3+5x^2-6x-1):(x-1)$
- ii. $(10x^4+7x^2-3x+5):(2x^2-1)$
- iii. $(8x^4+x^3+5x^2+3x+2):(x^2+x+2)$

7. Ομοίως :
- i. $(x^4-11x^2+6x-3):(x^2-3x)$
- ii. $(7x^3-2x^2+9):(x^2+2)$
- iii. $x^5:(x^2-x+1)$

Β. ΣΧΗΜΑ HORNER

8. Να βρεθεί με τη βοήθεια του σχήματος Horner, το πηλίκο, το υπόλοιπο και η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυώνυμου $\Delta(x)=7x^4-5x^2-x-1$ με τα πολυώνυμα :
i. $x-1$ ii. $x+2$

9. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρεθούν τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων :
i. $(x^4-2x^3+5x^2-6x-8):(x-2)$ ii. $(5x^2-2\alpha x-3\alpha^2):(x-\alpha)$

10. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=3x^4-6x^2+7x+62$. Να βρεθεί το P(2) με τη βοήθεια του σχήματος Horner.

Γ. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ – ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

11. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\Delta(x)=5x^3-4x^2-x+3$ με τα πολυώνυμα :
i. $x-2$ ii. $x+1$ iii. $2x-3$

12. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης : $(x^{2017}+4x^{1982}-x^{1999}+2004x+1):(x-1)$

13. Να αποδείξετε ότι το (x-2) είναι παράγοντας του πολυώνυμου $P(x)=3x^3-5x^2+x-6$

14. Να βρείτε τα $a\in\Re$ έτσι ώστε το πολυώνυμο $P(x)=(\alpha-2)x^3+\alpha x^2+3x-6$ να διαιρείται με το (x+2).

15. Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=\lambda x^3+(2\mu-1)x^2+(\lambda-\mu)x+1$. Να βρείτε τα $\lambda,\mu\in\Re$, ώστε το $\mathrm{P}(x)$ να έχει παράγοντα το $x-1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\mathrm{P}(x)$ με το $x+1$ να είναι 4.

16. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=x^4+3x^2+10$ δεν έχει παράγοντα της μορφής (x-ρ).

Δ. ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ P(x) ΕΧΕΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ (Ή ΔΙΑΙΡΕΙΤΑΙ) ΜΕ ΤΟ $(x-\alpha)(x-\beta)$ Ή ΜΕ ΤΟ $(x-\alpha)^2$.

17. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-5x^2-6x+9$, διαιρείτε με το (x-1)(x-3) και να βρείτε το αντίστοιχο πηλίκο.

18. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να δείξετε ότι το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=x^4-2x^3-x^2+8x-12$, διαιρετέ με το x^2-4 και να βρείτε το αντίστοιχο πηλίκο.

19. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τα οποία το $\mathrm{P}(x)=x^3-(\alpha+1)x^2+\beta x+1$ έχει παράγοντα το x^2-3x+2.

20. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=x^4-9x^3+30x^2-44x+24$ έχει παράγοντα το $(x-2)^2$.

21. Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=2x^3+\lambda x^2+(\mu-2)x+3$. Να βρείτε τα $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, ώστε το $\mathrm{P}(x)$ να έχει παράγοντα το x^2+x-2.

22. Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=x^3+\lambda x^2+\mu$. Να βρείτε τα $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, ώστε το $\mathrm{P}(x)$ να έχει παράγοντα το $(x-2)^2$.

23. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=x^4+(\alpha-\beta)x^3-(\alpha+\beta)x^2+x-6$ να έχει ρίζες τις $x=2,\ x=-3$. Στη συνέχεια, για τις τιμές των α,β που βρήκατε να υπολογίσετε το πηλίκο της διαίρεσης $\mathrm{P}(x):(x-2)(x+3)$.

Ε. Η ΔΙΑΙΡΕΣΗ $\mathrm{P}(x):(\alpha x+\beta),\ \alpha\neq 0$

24. Να αποδείξετε ότι το $2x-3$ είναι παράγοντας του $\mathrm{P}(x)=2x^3+x^2-12x+9$.

25. Να αποδείξετε ότι το $3x+1$ είναι παράγοντας του $\mathrm{P}(x)=(3x+2)^{2016}+(3x)^5-12x-4$.

26. Το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=6x^3-7x^2+\alpha x+\beta$ έχει παράγοντα το $3x-2$, ενώ το υπόλοιπο της διαίρεσης $\mathrm{P}(x):(2x-1)$ είναι 3. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

ΣΤ. ΣΥΝΘΕΤΕΣ – ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

27. Αν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων του $\mathrm{P}(x)$ με τα $x-2$ και $x+3$ είναι 4 και -1 αντίστοιχα, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $\mathrm{P}(x):(x^2+x-6)$.

28. Αν το (x+4) είναι παράγοντας του P(x), να αποδείξετε ότι το (x-3) είναι παράγοντας του P(11-5x).

29. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\mathrm{P}(x)$ με το x^2-x-6 είναι $-4x+1$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\mathrm{P}(x)$ με το $x-3$ καθώς και το υπόλοιπο με το $x+2$.

30. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης : $(x^{100}-3x^{47}+5x^{13}-4x+1):(x^2-1)$.

31. Ένα πολυώνυμο $\Delta(x)$, όταν διαιρεθεί με το $\delta(x)=x^2-2x$ δίνει πηλίκο $\pi(x)=x^3-3x^2+4$.

i. Να βρεθεί ο βαθμός του $\Delta(x)$.

ii. Αν επιπλέον το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης είναι $\upsilon(x)=-3x+5$, να βρείτε το $\Delta(x)$.

4.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Για να λύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση με βαθμό μεγαλύτερο ή ισο του 3, μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1^{o} μέλος και κάνουμε παραγοντοποίηση. Στη συνέχεια εκμεταλλευόμαστε την ιδιότητα : $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad ή \quad \beta = 0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 146 Α΄ Ομάδας)
Να λύσετε τις εξισώσεις :
iii. $3x^5 + 5x^4 = 3x^3 + 5x^2$
Λύση :
Έχω : $3x^5 + 5x^4 = 3x^3 + 5x^2 \Leftrightarrow 3x^5 + 5x^4 - 3x^3 - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x^5 - 3x^3 + 5x^4 - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^3(x^2-1) + 5x^2(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(3x^3+5x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-1)(3x+5) = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0(\delta\iota\pi\lambda ή) \\ ή \\ x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \\ ή \\ 3x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{3} \end{array} \right.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΡΙΖΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω η πολυωνυμική εξίσωση : $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ με ακεραίους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωση, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :
Αν ο $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε διαδοχικά έχουμε :
$\alpha_\nu \rho^\nu + \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} + ... + \alpha_1\rho + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = -\alpha_\nu\rho^\nu - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} - ... - \alpha_1\rho \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha_0 = \rho\left(-\alpha_\nu\rho^{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2} - ... - \alpha_1\right)$. Επειδή οι αριθμοί $\rho, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ είναι ακέραιοι έπεται ότι και ο αριθμός $-\alpha_\nu\rho^{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2} - ... - \alpha_1$ είναι ακέραιος. Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε, ότι ο ρ είναι διαιρέτης του α_0.

Παρατηρήσεις – Σχόλια :

- Μια πολυωνυμική εξίσωση ν-οστου βαθμού έχει το πολύ ν πραγματικές ρίζες. Δηλαδή, μια εξίσωση 3^{ου} βαθμού έχει το πολύ 3 ρίζες.

- **Μεθοδολογία :** Για να λύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση (3^{ου} βαθμού και πάνω), χρησιμοποιούμε το θεώρημα ακεραίων ριζών. Με τη βοήθεια του σχήματος **Horner** και τους κλασικούς τρόπους **παραγοντοποίησης**, φέρνουμε την εξίσωση σε μορφή $P_1(x)\cdot P_2(x)\cdot \ldots \cdot P_\nu(x)=0$ οπότε $P_1(x)=0$ ή $P_2(x)=0$ ή …ή $P_\nu(x)=0$
  (Στο σχήμα Horner όλες οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι διαιρέτες του σταθερού όρου.)
  (Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι όλα τα πολυώνυμα $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_\nu(x)$ να είναι το πολύ 2^{ου} βαθμού)

- **Μεθοδολογία :** Σε πιο σύνθετες μορφές κάνουμε αντικατάσταση μιας ποσότητας, ώστε να προκύψει πιο εύκολη εξίσωση.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

2. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $x^3-2x^2-5x+6=0$

ii. $2x^3+15x^2+19x+6=0$

Λύση :

i.Οι διαιρέτες του σταθερού όρου είναι $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$. Παρατηρώ όμως ότι το άθροισμα των συντελεστών της εξίσωσης είναι 0, άρα η ρίζα είναι το 1.

1	-2	-5	6	1
	1	-1	-6	
1	-1	-6	0	

Άρα : $x^3-2x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-x-6)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ ή
$x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=-2$

ii. Οι διαιρέτες του σταθερού όρου είναι $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$. Όταν όλοι οι συντελεστές της εξίσωσης είναι ομόσημοι (είτε θετικοί, είτε αρνητικοί), τότε η εξίσωση δεν μπορεί να έχει θετικές ρίζες. Έτσι δοκιμάζω με όλες τις αρνητικές. Τελικά :

2	15	19	6	-1
	-2	-13	-6	
2	13	6	0	

Άρα : $2x^3+15x^2+19x+6=0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2+13x+6)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή
$2x^2+13x+6=0 \Leftrightarrow x=-6$ ή $x=-\frac{1}{2}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

3. i. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $a_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές. Να βρείτε, ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι ψευδής.

Α. Αν ο ακέραιος ρ≠0 είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του $α_0$.
Β. Αν ο ακέραιος ρ δεν είναι διαιρέτης του $α_0$, τότε ο ρ δεν είναι ρίζα της εξίσωσης.
Γ. Πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του $α_0$.
Δ. Αν ο ρ είναι διαιρέτης του $α_0$, τότε ο ρ είναι ρίζα της εξίσωσης.

ii. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $a_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές. Να βρείτε, ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι ψευδής.

Α. Αν οι αριθμοί $α_0,α_1,…,α_ν$ είναι θετικοί, τότε η εξίσωση δεν έχει θετική ρίζα.
Β. Αν οι αριθμοί $α_0,α_1,…,α_ν$ είναι αρνητικοί, τότε η εξίσωση δεν έχει αρνητική ρίζα.
Γ. Αν οι όροι της εξίσωσης με τις περιττές δυνάμεις του x έχουν συντελεστές αρνητικούς αριθμούς και με τις άρτιες δυνάμεις του x έχουν συντελεστές θετικούς, τότε η εξίσωση δεν έχει αρνητική ρίζα.
Δ. Αν $α_0$≠0, τότε η εξίσωση έχει ρίζα το 0.
Ε. Αν $α_0+α_1+…+α_ν=0$, τότε η εξίσωση έχει ρίζα το 1.

iii. Έστω η εξίσωση $\chi^5 - 3\chi^2 - \alpha\chi + 12 = 0$, α∈Ζ.

Να εξετάσετε, ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι ψευδής.

Α. Αποκλείεται το 5 να είναι ρίζα της εξίσωσης.
Β. Αν ο ακέραιος ρ είναι ρίζα της εξίσωσης και ρ>7, τότε ρ=12.
Γ. Έστω ρ∈Ζ και ρ>4. Αν ρ≠6 και ρ≠12, τότε ο ρ δεν είναι ρίζα της εξίσωσης.
Δ. Αν ρ∈Ζ και ο ρ είναι διαιρέτης του 12, τότε ο ρ είναι ρίζα της εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4. Να βρεθούν οι ακέραιες ρίζες της εξίσωσης : $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$.

5. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $(x-1)^3 - 3(x^2-1) + 2(x-1) = 0$ ii. $x^3 - 1 + 6(x^2-1) = x^2 - 2x + 1$
iii. $2x^3 - 5x^2 = 5 - 2x$ iv. $x^6 - 32x = 0$
v. $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$ vi. $(x^2-2)^4 - 16 = 0$
vii. $x^3 + x^2 - 12 = 0$ viii. $2x^3 - x^2 - 7x + 6 = 0$
ix. $6x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4 = 0$ x. $x^4 - 9x^2 + 4x + 12 = 0$

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + 5x^3 + x - 2 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

7. Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in Z$ για τις οποίες η εξίσωση $x^3 - \kappa x^2 + 6x + 2 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

8. Να λυθεί η εξίσωση : $(x^2 + x - 1)^2 - 3(x^2 + x + 3) + 14 = 0$

9. Να λυθεί η εξίσωση : $x^6 - 3x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

10. Να λυθεί η εξίσωση : $(x^2 + 2x - 2)^3 - 4(x^2 + 2x - 3)^2 - 23(x^2 + 2x - 4) - 24 = 0$

11. Ομοίως : i. $\frac{1}{20}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{10}x-\frac{4}{10}=0$ ii. $x^4-2x^3-13x^2-2x+1=0$ *(Αντίστροφη εξίσωση)*

12. Το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\lambda x^2-20x+\mu$ έχει παράγοντα το $x+2$, ενώ διαιρούμενο με το $x-1$ δίνει υπόλοιπο -15.
i. Να βρείτε τα $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

13. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης τη συνάρτησης : $f(x)=x^3+4x^2-7x-10$ με τον άξονα x΄x.
*(**Υπόδειξη :** για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με τον άξονα x΄x, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=0$)*

14. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων : $f(x)=x^4+2x^3-5x^2+7x$ και $g(x)=2x^3+x^2+6$
*(**Υπόδειξη :** για να βρούμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων δυο συναρτήσεων f,g λύνουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$)*

15. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x)=2x^3+\alpha x^2-11x-2\alpha$ διέρχεται από το σημείο $M(-1,6)$. Να βρείτε :
i. το $\alpha\in\Re$. ii. τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

16. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=3x^3+\alpha x^2-5x-\alpha-2$ τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο με τεταγμένη 6. Να βρείτε :
i. το $\alpha\in\Re$. ii. τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

17. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=2x^3+\alpha x^2-13x+\beta$ και $g(x)=x^3-\beta x^2+\alpha x+10$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $f(x)$ με το $x-1$ είναι -12 και το πολυώνυμο $g(x)$ έχει παράγοντα το $x+2$. Να βρείτε :
i. τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ii. τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f,g.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσουμε μια πολυωνυμική ανίσωση 3ου ή μεγαλύτερου βαθμού,

Βήμα 1 : μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος
Βήμα 2 : κάνουμε παραγοντοποιηση (αν χρειαστεί με τη βοήθεια του σχήματος Horner), ώστε να φέρουμε την ανίσωση στη μορφή : $\mathrm{A}(x)\cdot \mathrm{B}(x)\cdot\ldots\cdot \Phi(x)>0$ ή $\mathrm{A}(x)\cdot \mathrm{B}(x)\cdot\ldots\cdot \Phi(x)<0$ (όπου οι παράγοντες $\mathrm{A}(x),\mathrm{B}(x),\ldots,\Phi(x)$ είναι είτε 1ου είτε 2ου βαθμού)
Βήμα 3 : βρίσκουμε τις ρίζες (αν υπάρχουν) των παραγόντων $\mathrm{A}(x),\mathrm{B}(x),\ldots,\Phi(x)$
Βήμα 4 : διατάσσουμε τις ρίζες σε έναν άξονα (από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη)
Βήμα 5 : κάτω από τον άξονα σχηματίζουμε πίνακα με τα πρόσημα των παραγόντων, στα διαστήματα που χωρίζεται ο άξονας από τις ρίζες.
Βήμα 6 : στην τελευταία γραμμή του πίνακα βρίσκουμε το πρόσημο του γινομένου εφαρμόζοντας τους κανόνες προσήμου :

- $(+)\cdot(+)=(+)$ $\quad(-)\cdot(-)=(+)$
- $(+)\cdot(-)=(-)$ $\quad(-)\cdot(+)=(-)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

18. Να λυθεί η ανίσωση : $x^3-3x+2<0$

Λύση: Έχω $x^3-3x+2=0$

1	0	-3	2	1
	1	1	-2	
1	1	-2	0	

Άρα : $x^3-3x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-2$

x	- ∞	-2		1	+ ∞
$x-1$	-		-	0	+
x^2+x-2	+	0	-	0	+
Γινόμενο	-	0	+	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^3-3x+2<0$ τότε $x\in(-\infty,-2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

19. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i. $(1-x)(x^2-3x+2)(x^2+x+2)>0$
ii. $x^3+5x^2-x-5>0$
iii. $x^3(x+1)-2>x(x-1)$
iv. $x^5-5x^3+4x<0$
v. $x^3+2x^2-11x-12<0$
vi. $-4x^3-4x^2+7x-2\geq 0$
vii. $x^4+3x^3+x^2-3x-2<0$
viii. $x^4-7x^3+16x^2-15x+9\geq 0$
ix. $x^4-5x^3+10x^2-12x+8<0$

20. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση τη συνάρτησης $f(x)=x^3-3x^2-6x+8$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x. Πότε βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x ;

*(**Υπόδειξη :** Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται **πάνω από τον x΄x** λύνουμε την ανίσωση $f(x)>0$. Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται **κάτω από τον x΄x** λύνουμε την ανίσωση $f(x)<0$.)*

21. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση τη συνάρτησης $P(x)=4x^5+12x^4+x^3-18x^2-5x+6$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

22. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση τη συνάρτησης $f(x)=x^4+3x^3-3x^2-11x-6$ δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

23. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2x^3+2x^2-2x+1$ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x^3+4x^2+4$.

(**Υπόδειξη :** *Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται **πάνω** από τη C_g λύνουμε την ανίσωση $f(x)>g(x)$. Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται **κάτω** από τη C_g λύνουμε την ανίσωση $f(x)<g(x)$.*)

24. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\sqrt{x^3+x^2-2}$

ii. $f(x)=\sqrt[4]{x^3+5x^2+2x-8}$

iii. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2-5x+6}}{x^3-6x^2+5x+12}$

25. Δίνονται τα πολυώνυμα : $\mathrm{P}(x)=x^3+x^2+\alpha x-3\beta-1$ και $Q(x)=x^3+\beta x^2+(\alpha-3)x+15$. Το $\mathrm{P}(x)$ έχει παράγοντα το $x-2$, ενώ το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το $x+1$ είναι 24.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-10$ και $\beta=-3$.

ii. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων $\mathrm{P}(x)\geq 0$ και $Q(x)\leq 0$.

26. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2x^3+\alpha x^2-17x+4\alpha$ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(3,-36)$.

i. Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

iii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x^3-7x-36$.

27. Το πολυώνυμο : $\mathrm{P}(x)=2x^3-5x^2-2x+\alpha$ διαιρούμενο με το $2x-1$ αφήνει υπόλοιπο 5.

i. Να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $\mathrm{P}(x)$ με το $2x-1$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{P}(x)\geq 5$.

28. Το πολυώνυμο : $\mathrm{P}(x)=12x^3-8x^2-10x+\alpha$ έχει παράγοντα το $3x+1$.

i. Να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{P}(x)\leq 3x+1$.

29. Το πολυώνυμο : $\mathrm{P}(x)=2x^3+\lambda x^2-20x+\mu$ έχει παράγοντα το $x+2$, ενώ διαιρούμενο με το $x-1$ αφήνει υπόλοιπο -15.

i. Να βρείτε τις τιμές των $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\mathrm{P}(x)=0$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{P}(x)<0$.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4</u> : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΡΙΖΑΣ ΜΕ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Για να βρούμε μια ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης P(x)=0 με προσέγγιση δεκάτου, ενεργούμε ως εξής :

- Βρίσκουμε ένα διάστημα (α,α+1), έτσι ώστε P(α)P(α+1)<0 (ο α ακέραιος)
- Θεωρούμε τις τιμές α+0,1 , α+0,2 ,…, α+0,8 , α+0,9 και εξετάζουμε για ποιο γειτονικό ζευγάρι το γινόμενο των τιμών τους είναι αρνητικό.
- Συνεχίζουμε με την ίδια διαδικασία για το ζευγάρι που βρήκαμε, στο οποίο προσθέτουμε 0,01 , κι έτσι προκύπτουν 9 ενδιάμεσοι αριθμοί. Βρίσκουμε τα γειτονικό ζευγάρι που έχει αρνητικό γινόμενο τιμών, το οποίο θα έχει κοινά τα ψηφία των μονάδων και των δεκάτων. Ο αριθμός αυτός είναι ρίζα της εξίσωσης P(x)=0 με προσέγγιση δέκατου.

Με παρόμοιο τρόπο ενεργούμε για να βρούμε μια ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης P(x)=0 με προσέγγιση εκατοστού, χιλιοστού κτλ.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

30. Αφού αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3+5x^2-3=0$ έχει μια ρίζα τουλάχιστον στο διάστημα (0,1), να βρείτε μια λύση της στο (0,1) με προσέγγιση :

i. δέκατου

ii. εκατοστού.

4.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσω μια κλασματική εξίσωση, δηλ. μια εξίσωση που έχει άγνωστο στον παρανομαστή,
Βήμα 1 : παραγοντοποιώ τους παρανομαστές και βρίσκω το ΕΚΠ τους,
Βήμα 2 : παίρνω περιορισμούς, δηλαδή $\text{Ε.Κ.Π} \neq 0$
Βήμα 3 : πολλαπλασιάζω κάθε όρο με το ΕΚΠ ώστε να γίνει απαλοιφή παρανομαστών και λύνω την εξίσωση που προκύπτει,
Βήμα 4 : ελέγχω αν οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τους περιορισμούς.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 1 σελ. 153 Α΄ Ομάδας)
Να λύσετε τις εξισώσεις :

ii. $\frac{x^2}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{4}{x^2-1}$

Λύση :

Έχω : $\frac{x^2}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{4}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{4}{(x-1)(x+1)}$, $\quad \text{ΕΚΠ}=(x-1)(x+1)$

Πρέπει $(x-1)(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \,\&\, x\neq -1$

Έπειτα κάνω απαλοιφή παρανομαστών :

$$(x-1)(x+1)\frac{x^2}{x-1}-(x-1)(x+1)\frac{2}{x+1}=(x-1)(x+1)\frac{4}{(x-1)(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+1)-2(x-1)=4 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x+2-4=0 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x-2=0$$

1	1	−2	−2	−1
	−1	0	2	
1	0	−2	0	

Άρα : $x^3+x^2-2x-2=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-2)=0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} x+1=0 \Leftrightarrow x=-1, \text{Απορ.} \\ \acute{\eta} \\ x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}, \text{Δεκτές} \end{array}\right.$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2</u> : ΑΡΡΗΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Είναι οι εξισώσεις που περιέχουν 1 τουλάχιστον ρίζα. Για να τις λύσουμε :
<u>Βήμα 1</u> : παίρνουμε τους περιορισμούς (υπόρριζη ποσότητα≥ 0),
<u>Βήμα 2</u> : βάζουμε το ένα ριζικό στο 1^{ο} μέλος και πηγαίνουμε όλους τους υπόλοιπους όρους στο 2^{ο},
<u>Βήμα 3</u> : αν στο 2^{ο} μέλος έχει άγνωστο τότε παίρνουμε περιορισμό και για το 2^{ο} μέλος≥ 0
<u>Βήμα 4</u> : υψώνουμε και τα δυο μέλη σε δύναμη ίση με την τάξη του ριζικού του 1^{ου} μέλους
<u>Βήμα 5</u> : τέλος λύνουμε την εξίσωση και εξετάζουμε ποιες από τις λύσεις είναι δεκτές και ποιες απορρίπτονται.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

2. Να λύσετε τις εξισώσεις :
i. $\sqrt{4-2x}=1$ ii. $\sqrt{x+3}-x=1$ iii. $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+4}=1$

<u>Λύση :</u>

i. πρέπει $4-2x\geq 0 \Leftrightarrow 2x\leq 4 \Leftrightarrow x\leq 2$

$\sqrt{4-2x}=1 \Leftrightarrow \sqrt{4-2x}^2=1^2 \Leftrightarrow 4-2x=1 \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ δεκτή

ii. Έχω : $\sqrt{x+3}-x=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=x+1$
πρέπει $x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3$ (1) και $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$ (2). Από (1)&(2) ισχύει $x\geq -1$.
$\left(\sqrt{x+3}\right)^2=(x+1)^2 \Leftrightarrow x+3=x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=1$(δεκτή) ή $x=-2$ (απορ.)

iii. Έχω : $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+4}=1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+6}=\sqrt{x+4}+1$
πρέπει $2x+6\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3$ (1) και $x+4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -4$ (2). Από (1)&(2) ισχύει $x\geq -3$.
$\left(\sqrt{2x+6}\right)^2=\left(\sqrt{x+4}+1\right)^2 \Leftrightarrow 2x+6=x+4+2\sqrt{x+4}+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+4}=x+1$ εδώ επίσης πρέπει $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$ (3). Άρα από (1), (2)&(3) ισχύει $x\geq -1$. Οπότε : $\left(2\sqrt{x+4}\right)^2=(x+1)^2 \Leftrightarrow 4(x+4)=x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2-2x-15=0 \Leftrightarrow x=5$(δεκτή) ή $x=-3$ (απορ.)

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3</u> : ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

- Μια κλασματική ανίσωση της μορφής $\frac{\mathrm{A}(x)}{\mathrm{B}(x)}>0$ ή $\frac{\mathrm{A}(x)}{\mathrm{B}(x)}<0$ γράφεται ισοδύναμα $\mathrm{A}(x)\cdot\mathrm{B}(x)>0$ ή $\mathrm{A}(x)\cdot\mathrm{B}(x)<0$ [όπου $\mathrm{B}(x)\neq 0$] και αυτό γιατί το γινόμενο και το πηλίκο δυο αριθμών έχουν το ίδιο πρόσημο.

- Μια κλασματική ανίσωση της μορφής $\frac{\mathrm{A}(x)}{\mathrm{B}(x)}>\Gamma(x)$ γράφεται :
$\frac{\mathrm{A}(x)}{\mathrm{B}(x)}-\Gamma(x)>0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{A}(x)-\mathrm{B}(x)\cdot\Gamma(x)}{\mathrm{B}(x)}>0 \Leftrightarrow [\mathrm{A}(x)-\mathrm{B}(x)\cdot\Gamma(x)]\cdot\mathrm{B}(x)>0$
και λύνεται όπως η προηγούμενη.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $\dfrac{x^2+3x}{x^2-5x+4} \le 0$ ii. $\dfrac{x^2+3}{x^2-5x+6} < 0$ iii. $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} \ge \dfrac{8}{x^2-1}$

Λύση :

i. Πρέπει $x^2-5x+4 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 1$ και $x \ne 4$

Έχω : $\dfrac{x^2+3x}{x^2-5x+4} \le 0 \Leftrightarrow (x^2+3x)(x^2-5x+4) \le 0$

$(x^2+3x)(x^2-5x+4) = 0$

$\Leftrightarrow x^2+3x = 0 \Leftrightarrow x(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0, ή, x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

ή $x^2-5x+4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 4$

x	-∞	-3		0		1		4	+∞
x^2+3x	+	0	-	0	+		+		+
x^2-5x+4	+		+		+	0	-	0	+
Γινόμενο - Πηλίκο	+	0	-	0	+		-		+

Άρα επειδή θέλω $\dfrac{x^2+3x}{x^2-5x+4} \le 0 \Leftrightarrow (x^2+3x)(x^2-5x+4) \le 0$ τότε $x \in [-3,0] \cup (1,4)$.

(Στο (1,4) είναι ανοιχτό λόγω του περιορισμού)

ii. Πρέπει $x^2-5x+6 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 2$ και $x \ne 3$

Έχω : $\dfrac{x^2+3}{x^2-5x+6} < 0 \Leftrightarrow (x^2+3)(x^2-5x+6) < 0$

$(x^2+3)(x^2-5x+6) = 0$

$\Leftrightarrow x^2+3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -3, Αδύνατη$

ή $x^2-5x+6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 3$

x	-∞	2		3	+∞
x^2+3	+		+		+
x^2-5x+6	+	0	-	0	+
Γινόμενο - Πηλίκο	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $\dfrac{x^2+3}{x^2-5x+6} < 0 \Leftrightarrow (x^2+3)(x^2-5x+6) < 0$ τότε $x \in (2,3)$.

(Όταν μια παράσταση είναι πάντα θετική τότε δεν επηρεάζει το πρόσημο στην τελευταία σειρά στο πινακάκι. Οπότε θα μπορούσε να παραληφτεί εντελώς.)

iii. Έχω : $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{8}{(x-1)(x+1)} \ge 0$ $\quad ΕΚΠ = (x-1)(x+1)$

Πρέπει $(x-1)(x+1) \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 1 \,\&\, x \ne -1$. (Σε αυτό το σημείο όμως δεν κάνω απαλοιφή παρανομαστών όπως στις αντίστοιχες κλασματικές εξισώσεις, αλλά **ομώνυμα κλάσματα**. Αυτό γιατί η απαλοιφή παρανομαστών δεν επιτρέπεται στις ανισώσεις καθώς η παράσταση με την οποία θα πολλαπλασιάσω κάθε όρο, δεν γνωρίζω αν είναι θετική ή αρνητική)

$$\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}-\frac{8}{(x-1)(x+1)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1)-2(x-1)-8}{(x-1)(x+1)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-2x+2-8}{x^2-1}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2-x-6}{x^2-1}\succ 0 \Leftrightarrow (x^2-x-6)(x^2-1)\geq 0$$

Έχω : $(x^2-x-6)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=-2$ ή $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$

x	$-\infty$	-2		-1		1		3	$+\infty$
x^2-x-6	+	0	-		-		-	0	+
x^2-1	+		+	0	-	0	+		+
Γινόμενο – Πηλίκο	+	0	-		+		-	0	+

Άρα επειδή θέλω $\frac{x^2-x-6}{x^2-1}\geq 0 \Leftrightarrow (x^2-x-6)(x^2-1)\geq 0$ τότε $x\in(-\infty,-2]\cup(-1,1)\cup[3,+\infty)$. (Στο (-1,1) είναι ανοιχτό λόγω του περιορισμού)

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4</u> : ΑΡΡΗΤΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Είναι οι ανίσωσεις που περιέχουν 1 τουλάχιστον ρίζα. Για να τις λύσουμε :

- **ΜΟΡΦΗ :** $\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}$ **ή** $\sqrt{f(x)}<\sqrt{g(x)}$

<u>Βήμα 1</u> : παίρνουμε τους περιορισμούς (υπόρριζες ποσότητες ≥ 0),
<u>Βήμα 2</u> : βάζουμε το ένα ριζικό στο 1^{o} μέλος και το άλλο στο 2^{o},
<u>Βήμα 3</u> : υψώνουμε και τα δυο μέλη σε δύναμη ίση με την τάξη του ριζικού
<u>Βήμα 4</u> : τέλος λύνουμε την ανίσωση και συναληθευουμε με τους περιορισμούς.

- **ΜΟΡΦΗ :** $\sqrt{f(x)}>g(x)$ **ή** $\sqrt{f(x)}<g(x)$

<u>Βήμα 1</u> : παίρνουμε τους περιορισμούς (υπόρριζες ποσότητες ≥ 0),
<u>Βήμα 2</u> : βάζουμε το ένα ριζικό στο 1^{o} μέλος και πηγαίνουμε όλους τους υπόλοιπους όρους στο 2^{o},
<u>Βήμα 3</u> : διακρίνουμε τις περιπτώσεις : $g(x)<0$ και $g(x)\geq 0$ και εξετάζουμε για ποιες τιμές του x ισχύουν.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

4. Να λύσετε τις ανισώσεις :
i. $\sqrt{8-x}>\sqrt{x-2}$ ii. $\sqrt{x-3}+5\geq x$ iii. $\sqrt{x+4}-7\leq x$

<u>Λύση:</u>

i. Πρέπει : $\begin{cases}8-x\geq 0\\ x-2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 8\\ x\geq 2\end{cases}\Leftrightarrow 2\leq x\leq 8$ ή $x\in[2,8]$ (1)

$\sqrt{8-x} > \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{8-x}\right)^2 > \left(\sqrt{x-2}\right)^2 \Leftrightarrow 8-x > x-2 \Leftrightarrow 10 > 2x \Leftrightarrow 2x < 10 \Leftrightarrow x < 5$ (2)

Από (1) και (2) ισχύει : $x \in [2,5)$

ii. Έχω : $\sqrt{x-3}+5 \ge x \Leftrightarrow \sqrt{x-3} \ge x-5$ (1) πρέπει : $x-3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 3$ (2)

Διακρίνω τις περιπτώσεις :

- $x-5<0 \Leftrightarrow x<5$ (3) άρα από (2) και (3) $x \in [3,5)$
- $x-5 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 5$ (καλύπτει τον περιορισμό (2) : $x \ge 3$). Τότε στην ανίσωση (1) και τα δυο μέλη είναι μη αρνητικά ≥ 0 άρα μπορώ να υψώσω στο τετράγωνο, έτσι έχω : $\sqrt{x-3} \ge x-5 \Leftrightarrow (\sqrt{x-3})^2 \ge (x-5)^2 \Leftrightarrow x-3 \ge x^2-10x+25 \Leftrightarrow x^2-11x+28 \le 0$

Είναι $x^2-11x+28=0 \Leftrightarrow x=7$ ή $x=4$

x	$-\infty$	4		7	$+\infty$
$x^2-11x+28$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2-11x+28 \le 0 \Leftrightarrow x \in [4,7]$. Συναληθευοντας τη λύση αυτή με τον περιορισμό $x \ge 5$ προκύπτει ότι $x \in [5,7]$

Άρα τελικά από τις παραπάνω περιπτώσεις προκύπτει ότι η ανίσωση ισχύει αν : $x \in [3,5)$ ή $x \in [5,7]$, δηλαδή τελικά $x \in [3,7]$

iii. Έχω : $\sqrt{x+4}-7 \le x \Leftrightarrow \sqrt{x+4} \le x+7$ (1) πρέπει : $x+4 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -4$ (2)

Διακρίνω τις περιπτώσεις :

- $x+7<0 \Leftrightarrow x<-7$ (3) άρα από (2) και (3) η ανίσωση (1) δεν ορίζεται.
- $x+7 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -7$, τότε για $x \in [-7,-4)$ η (1) δεν ορίζεται, ενώ για $x \in [-4,+\infty)$ τα δυο μέλη της ανίσωσης (1) είναι μη αρνητικά ≥ 0 άρα μπορώ να υψώσω στο τετράγωνο, έτσι έχω : $\sqrt{x+4} \le x+7 \Leftrightarrow (\sqrt{x+4})^2 \le (x+7)^2 \Leftrightarrow x+4 \le x^2+14x+49 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2+13x+45 \ge 0$ $\Delta=-11$, άρα :

x	$-\infty$ $+\infty$
$x^2-13x+45$	+

άρα $x^2+13x+45 \ge 0$ ισχύει για κάθε $x \in \Re$ σε συνδυασμό με τον περιορισμό $x \ge -4$ ισχύει τελικά $x \in [-4,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

5. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{3x-10}{x^2-4}=2x-\dfrac{x-3}{x-2}$ ii. $\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x^2-4}$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\dfrac{2x}{3x-6}-\dfrac{x}{2x-4}=1+\dfrac{5x-12}{12-6x}$ ii. $\dfrac{1}{2x^2-x}=\dfrac{2}{2x-1}+x^2$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\sqrt{3x-7}=2$

ii. $\sqrt{2x+7}=x+2$

iii. $\sqrt{x+2}+x=4$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\sqrt{x-4}-14=2-x$

ii. $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x-1}=2$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$

ii. $\sqrt{x+32}+\sqrt{x}=16$

iii. $\sqrt[3]{4x-1}+4=x$

iv. $\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt{x-6}$

10. Να λυθεί η εξίσωση : $\dfrac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}=\dfrac{4-\sqrt{x}}{2}$

11. Να λυθεί η εξίσωση : $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$.

12. Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=\sqrt{8x+1}$

13. Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{4x-4}-5x+13=0$.

14. Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=4$

15. Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{9x^2+1}=3x-\lambda$, για κάθε $\lambda\in\Re$.

16. Να λυθεί η εξίσωση : $\eta\mu^3x+4\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu x+2=0$

17. Να λυθεί η εξίσωση : $2\eta\mu^4x+5\eta\mu^3x+8\sigma\upsilon\nu^2x-17\eta\mu x-14=0$

18. Να λυθεί η εξίσωση : $(x^2-3x-2)^2+(x^2-3x-4)^2-8=0$

19. Να λυθεί η εξίσωση : $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}-6=0$

20. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i. $\dfrac{x^2-1}{x+2} \geq 0$

ii. $\dfrac{x^2-2x-3}{x-2} \geq 0$

iii. $\dfrac{(x+2)(x^2-9)}{-x^2-2x+3} \geq 0$

iv. $\dfrac{x-1}{x+2} \geq 2x$

v. $\dfrac{x^3-4x+15}{x^2-9} < -3$

vi. $\dfrac{x^3+3x-8}{x-3} \leq 2$

vii. $\dfrac{x^3+3x-8}{x-3} \leq 2$

viii. $\dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2-3x-18} \geq 0$

ix. $x^2+x+3+\dfrac{5(x^2+1)}{x-3} \leq 0$

x. $\dfrac{3x^2-1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-x} > \dfrac{x^2-3x+2}{x}$

xi. $\dfrac{x^2}{x+1} + \dfrac{4}{x-1} \geq \dfrac{16}{x^2-1}$

21. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i. $\sqrt{x+1} < 3$

ii. $\sqrt{2x+6} - \sqrt{9-x} \leq 0$

iii. $\sqrt{x+10} \geq x-2$

iv. $\sqrt{x+7} \leq x+1$

v. $\sqrt{3x-5} \leq 0$

vi. $\sqrt{x-2} \geq \sqrt{2x+1}$

22. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i. $\sqrt{x+3} < x-2$

ii. $\sqrt{x^2-8x+15} > \sqrt{x^2+x-2} - 4$

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΟ 4$^{\text{Ο}}$ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 1 15113

Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2\left(x^3 - 1\right) + 9$ και $Q(x) = \alpha x^2 + 7$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Είναι το πολυώνυμο $P(x)$ $3^{ου}$ βαθμού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του α, ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 2 14981

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x + 6$.

α) Να υπολογίσετε το $P(-2)$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το $x + 2$ είναι παράγοντας του P(x). (Μονάδες 5)

γ) Να παραγοντοποιήσετε το P(x). (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3 15012

Η διαίρεση ενός πολυωνύμου P(x) με το $x - 3$ έχει πηλίκο $x^2 + 2$ και υπόλοιπο 4.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$. (Μονάδες 8)

γ) Είναι το $x = 3$ ρίζα του πολυωνύμου P(x); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 15096

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 και το –1 δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου. (Μονάδες 10)

β) Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x):\left(x^2 + x - 1\right)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 5 15642

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2(x-1)^{20} - 3(x-1)^{10} + 5x^2 - 3x - 2$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x - 1$. (Μονάδες 10)

β) i) Να υπολογίσετε την τιμή P(0). (Μονάδες 5)

ii) Είναι το x παράγοντας του πολυωνύμου P(x); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

4.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 6 15040

Δίνεται η εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$.

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της. (Μονάδες 5)

β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $\left(x^3 - 7x + 6\right) : (x - 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης. (Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 7 15047

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου. (Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο έχει και άλλη ακέραια ρίζα. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 8 15175

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μια ρίζα του πολυωνύμου. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $P(x) = (x - 1)\left(x^2 + 1\right)$. (Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 9 15176

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι το $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου. (Μονάδες 12)

β) Αν $P(x) = (x - 1)\left(x^2 - x + 2\right)$, να βρείτε για ποιες τιμές του x είναι $P(x) > 0$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 10 15246

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το P(x). (Μονάδες 10)

β) Αν $P(x) = (x + 1)^2(x - 1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 11 15247

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το P(x). (Μονάδες 10)

β) Αν $P(x) = (2x - 1)\left(x^2 + 1\right)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 12 15248

Ένα πολυώνυμο P(x) διαιρούμενο με το πολυώνυμο $2x-1$ δίνει πηλίκο x^2-2 και υπόλοιπο 1.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο P(x). (Μονάδες 12)

β) Αν $P(x)=2x^3-x^2-4x+3$

i) να αποδείξετε ότι το P(x) έχει ρίζα το 1 και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$. (Μονάδες 7)

ii) να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 13 15618

α) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-x$ ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 14 15653

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2+2x+2$.

α) i) Να κάνετε τη διαίρεση του P(x) με το $(x+1)$. (Μονάδες 8)

ii) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x+1)$. (Μονάδες 5)

β) Αν $P(x)=(x+1)\left(x^2+2\right)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 15 15654

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-7x+6$.

α) Να δείξετε ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του P(x). (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 16 15674

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^3-x^2-x+2$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. (Μονάδες 10)

β) Αν $P(x)=(x-1)\left(3x^2+2x+1\right)+3$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)<3$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 17 15695

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+2x-3$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $(x+1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)+6=0$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 18 17241

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x+2$.

α) i) Να αποδείξετε ότι το P(x) έχει παράγοντα το $(x+1)$. (Μονάδες 7)

ii) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x+1)$. (Μονάδες 10)

β) Αν $P(x)=(x+1)\left(x^2-x+2\right)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 19 18230

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-8x-4$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει παράγοντα το $(x-2)$. (Μονάδες 9)

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο. (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 20 14955

Η μέση θερμοκρασία Τ (σε βαθμούς Κελσίου) στην επιφάνεια ενός πλανήτη, μετά από x εκατομμύρια χρόνια, έχει εκτιμηθεί ότι είναι $T(x)=x^3-10x^2+31x-30$.

α) Αποδείξτε ότι 2 εκατομμύρια χρόνια μετά, η μέση θερμοκρασία στον πλανήτη θα είναι μηδέν °C. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ με $\alpha<\beta<\gamma$ ώστε να ισχύει $T(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$. (Μονάδες 10)

γ) Θεωρούμε ότι μια χρονική περίοδος παγετώνων στον πλανήτη είναι αυτή στην οποία η μέση θερμοκρασία Τ είναι συνεχώς κάτω από μηδέν °C. Ποιες χρονικές περιόδους θα έχουμε παγετώνες στον πλανήτη; (Μονάδες 10)

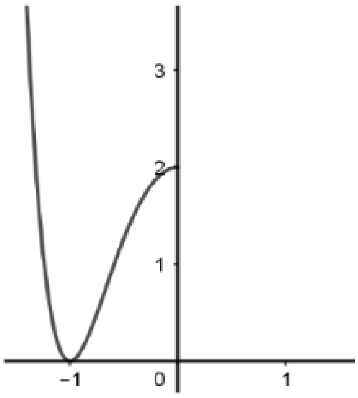
ΘΕΜΑ 21 15005

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^6-3x^2+2$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα x΄x. (Μονάδες 10)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f για $x\le 0$. Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x>0$. (Μονάδες 4)



δ) Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 22 15066

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x)=2x^4-5x^3+4x^2-5x+2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του.

ii) Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του. (Μονάδες 8)

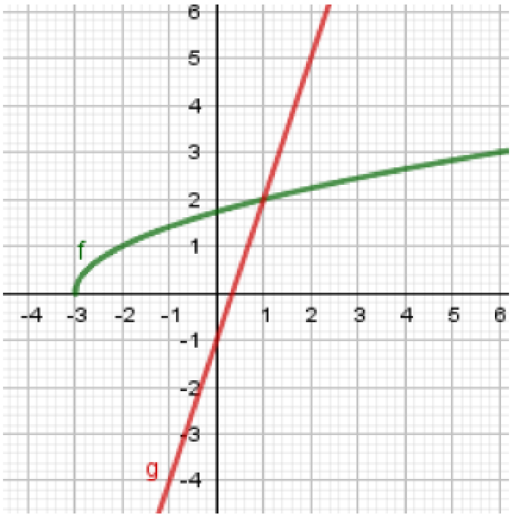
β) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του. (Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 23 15037

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\sqrt{x+3}$ και $g(x)=3x-1$.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g. (Μονάδες 4)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$. (Μονάδες 6)

α) i) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x)<g(x)$. (Μονάδες 7)

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του i ερωτήματος. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 24 15094

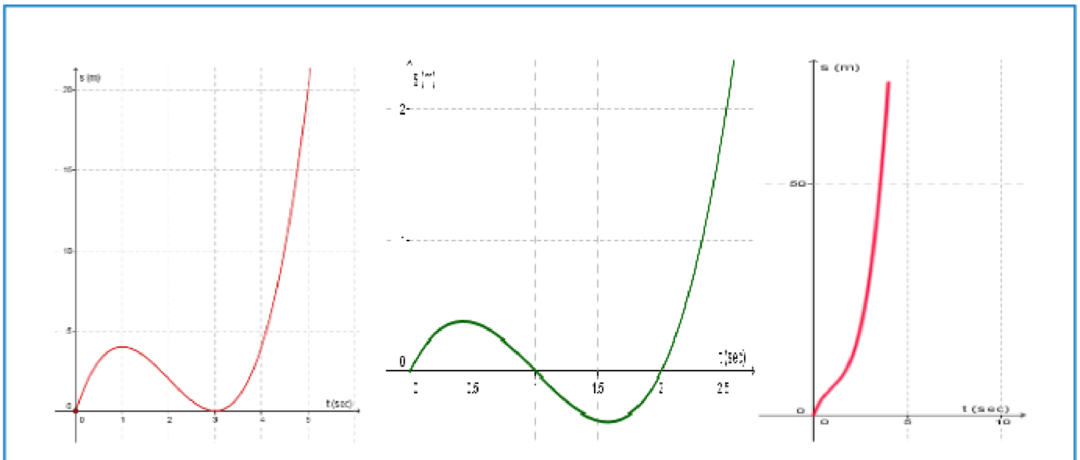
Το διάστημα S(t) σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή t σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση: $S(t)=2t^3-6t^2+10t$.

α) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές $t=0$ και $t=2$. (Μονάδες 3)

β) Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση 30 μέτρων. (Μονάδες 10)

γ) Επειδή το S(t) εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό. (Μονάδες 8)

δ) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνύμων S(t). Μια από αυτές εκφράζει το διάστημα S(t) της εκφώνησης. Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 4)



(I) (II) (III)

ΘΕΜΑ 25 15174

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^4+x^3+\alpha x-4$ και $\delta(x)=x^2-3x+2$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το δ(x), είναι το πολυώνυμο $\upsilon(x)=24x-24$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α. (Μονάδες 8)

β) Για $\alpha=2$,

i. να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $x-1$. (Μονάδες 2)

ii. να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα x΄x με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x). (Μονάδες 8)

iii. να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 26 15250

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^5-4x^3-x^2+\alpha x+\beta$ το οποίο διαιρούμενο με το x^2-4 δίνει υπόλοιπο $4x+1$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):\left(x^2-4\right)$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές των α και β. (Μονάδες 7)

γ) Έστω $\alpha=4$ και $\beta=5$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):\left(x^2-4\right)$ είναι το $\pi(x)=x^3-1$, τότε:

i) να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):\left(x^2-4\right)$. (Μονάδες 4)

ii) να λύσετε την ανίσωση $P(x)<4x+1$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 27 15431

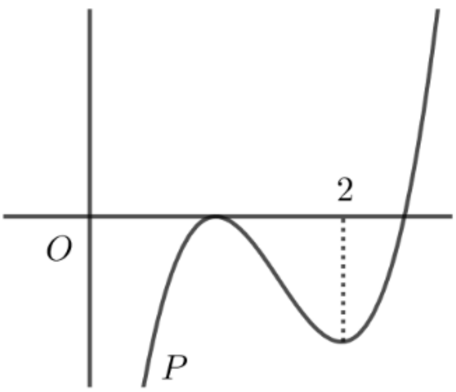
α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2+\beta x-5$, με $x\in\mathbb{R}$.

i) Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x-2)$ είναι -1, να δείξετε ότι: $\begin{cases}2\alpha+\beta=-6 \text{ και}\\ \alpha+\beta=3\end{cases}$ (Μονάδες 6)

ii) να δείξετε ότι $\alpha=-9$ και $\beta=12$. (Μονάδες 5)

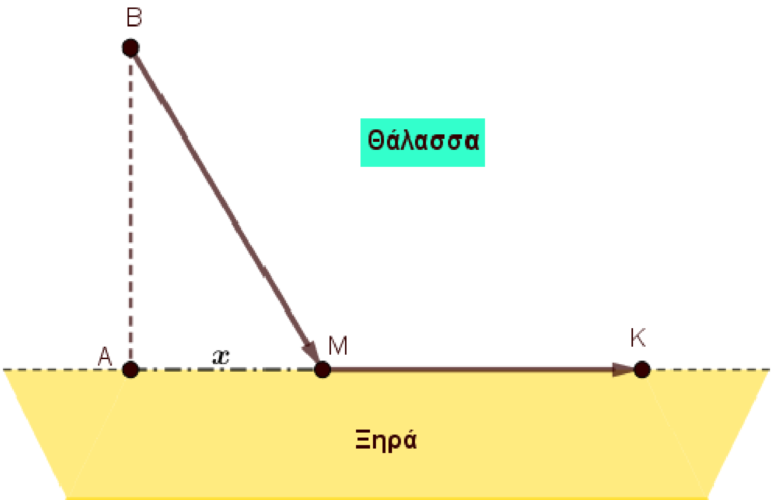
β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)=2x^3-9x^2+12x-5$ είναι κάτω από τον άξονα x΄x. (Μονάδες 10)

γ) Αν η γραφική παράσταση της P(x) είναι η ακόλουθη, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της. (Μονάδες 4)



ΘΕΜΑ 28 15436

Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα, στο σημείο Β σε απόσταση 2 km από το κοντινότερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής. Ο προορισμός του είναι ένα σημείο Κ της ακτής, το οποίο απέχει 4 km από το Α. Η διαδρομή που κάνει είναι η ΒΜ κολυμπώντας στη θάλασσα με σταθερή ταχύτητα 3 km/h και η ΜΚ τρέχοντας στην ακτή με σταθερή ταχύτητα 5 km/h. Γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ του διαστήματος s που διανύει, της ταχύτητας υ και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης t, είναι $υ = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{υ}$.



Αν το σημείο Μ απέχει από το Α απόσταση x km, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $BM = \sqrt{4+x^2}$ (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή-δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η:

$$t(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{4-x}{5},\ x \in [0,4]$$ (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ της ακτής, έτσι ώστε ο χρόνος της διαδρομής του κολυμβητή να είναι $\frac{4}{3}$ ώρες. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 29 15677

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + αx + β$, όπου $α, β \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α,β, αν είναι γνωστό ότι το P(x) διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x) = x^2 - 2x + 1$. (Μονάδες 8)

β) Για $α = 4$, $β = -2$

i) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 + 5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. (Μονάδες 8)

ii) Αν $P(x) = (x^2+5)(x^2-2x-6) + 14x + 28$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 14(x+2)$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 30 15960

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+\kappa x-1$, με $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του κ∈IR για την οποία $f(-x)=f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\kappa=0$,

i) να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$.

(Μονάδες 6)

ii) να δείξετε ότι $f(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

iii) να βρείτε τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 31 15790

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^4-3x^2-4$ και $g(x)=-x^2+4$ με πεδίο ορισμού το IR.

α) Να δείξετε ότι $f(-x)=f(x)$ και $g(-x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

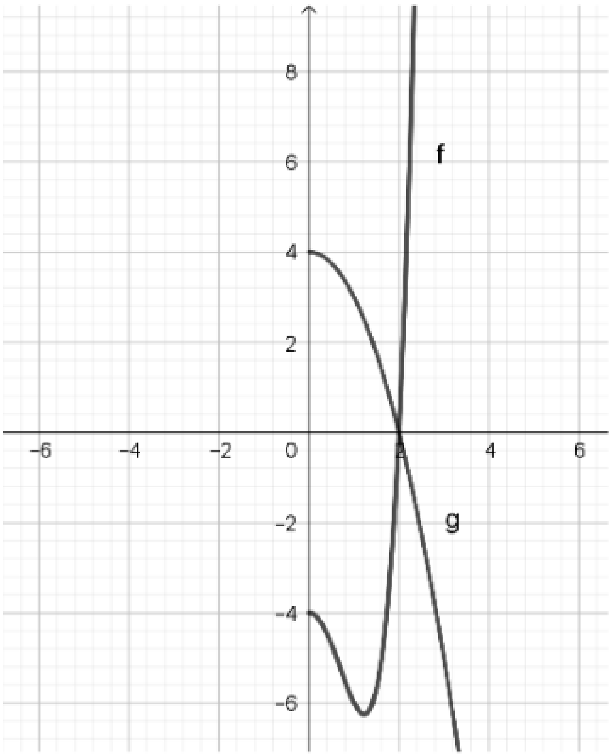
Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το IR. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε, αλγεβρικά ή γραφικά:

i. την εξίσωση $f(x)=g(x)$. (Μονάδες 6)

ii. την ανίσωση $f(x)<g(x)$. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 32 17943

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E=60\text{ cm}^2$, του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 2 cm μεγαλύτερη από τη μια κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση: $x^3+x^2-3600=0$.

(Μονάδες 10)

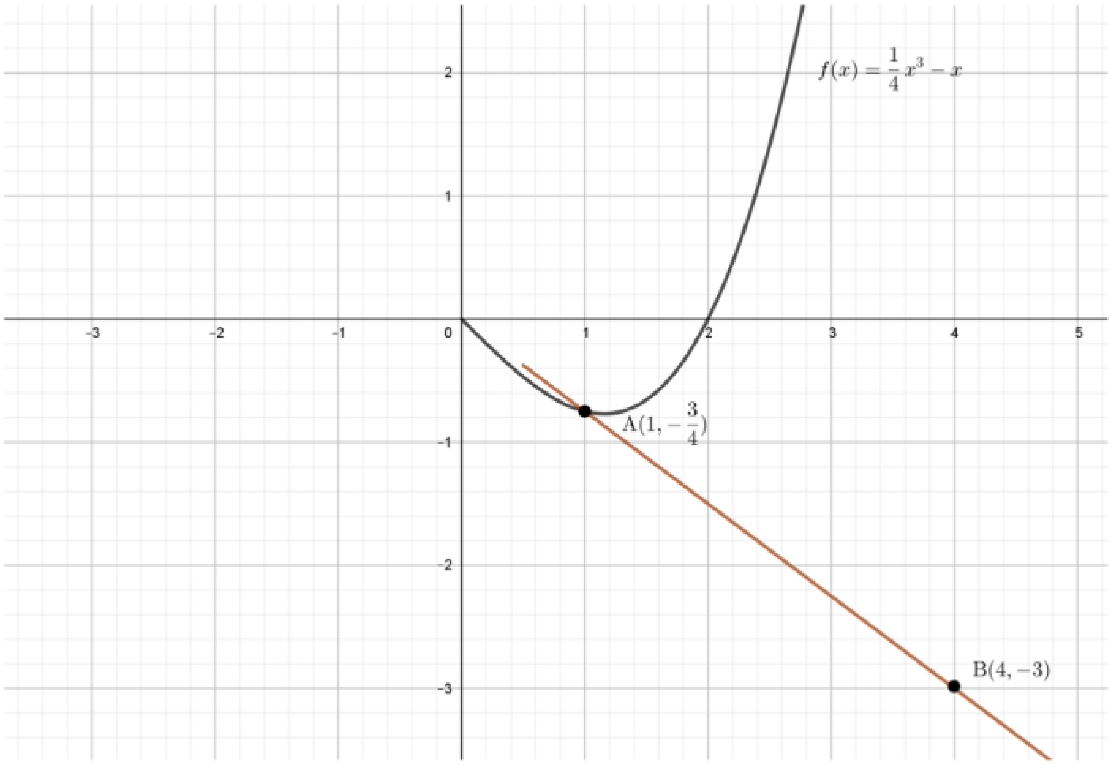
β) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 16, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων τριγώνων που ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 33 17919

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x$, $x\in\mathbb{R}$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ και $B(4,-3)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ. (Μονάδες 6)

β) i) Να αποδείξετε ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

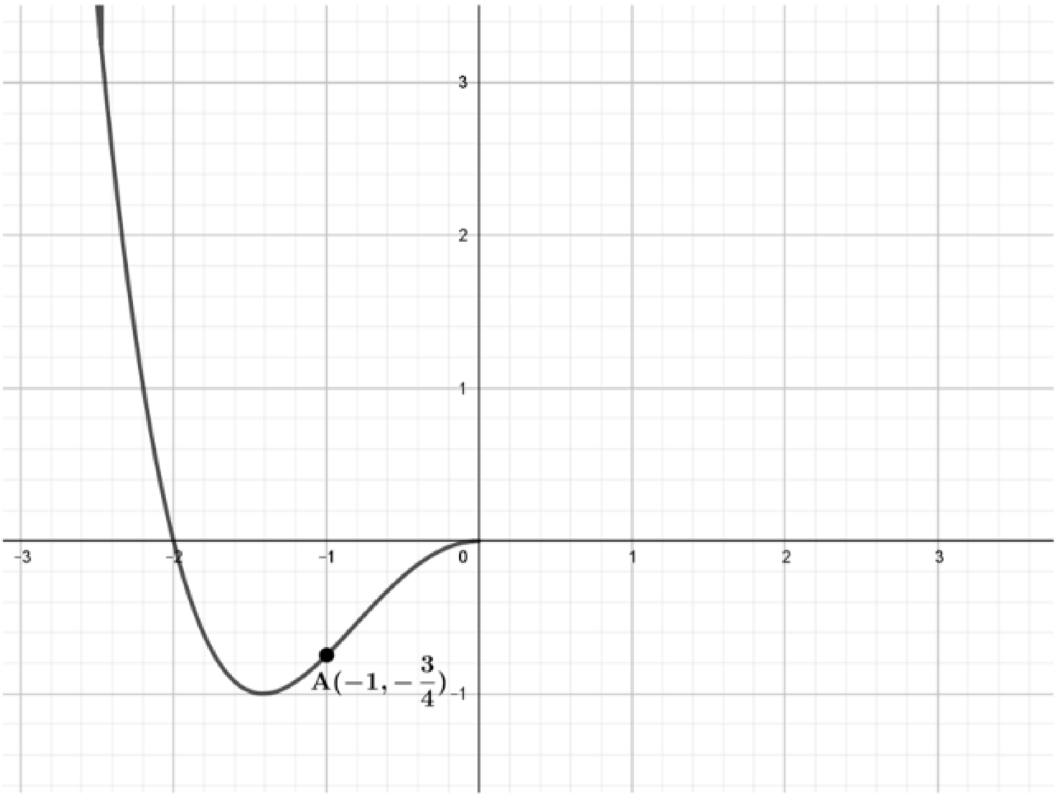
ii) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x<0$. (Μονάδες 6)

γ) Αν η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση $y=-\frac{3}{4}x$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 34 17925

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\alpha x^2$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ και το σημείο $A\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$ αυτής.



α) Να δείξετε ότι $\alpha=-1$. (Μονάδες 6)

β) Για $\alpha=-1$,

i) Να αποδείξετε ότι $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

ii) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x>0$. (Μονάδες 6)

γ) Αφού επιβεβαιώσετε ότι $f\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{3}{4}$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y=-\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 8)

4.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 35 15187

Για τη γωνία ω του παρακάτω σχήματος ισχύει: $5ημ^3ω - 8ημ^2ω - 7ημω + 6 = 0$

α) Να δείξετε ότι $ημω = \frac{3}{5}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε:

i. την τιμή του συνω,

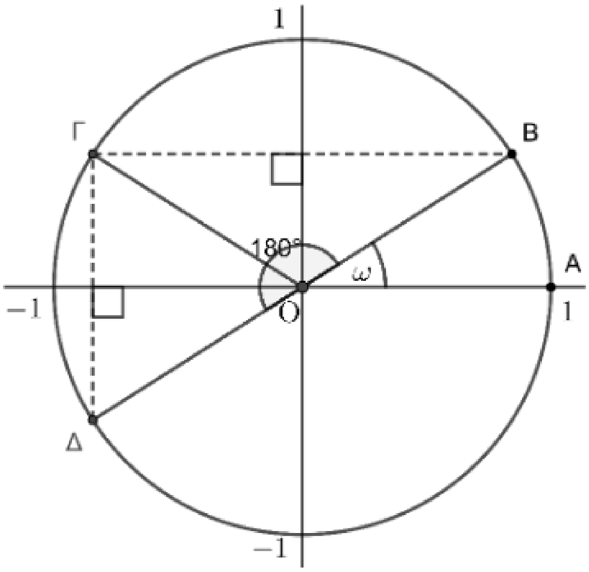
(Μονάδες 6)

ii. τις συντεταγμένες των σημείων Β, Γ και Δ,

(Μονάδες 6)

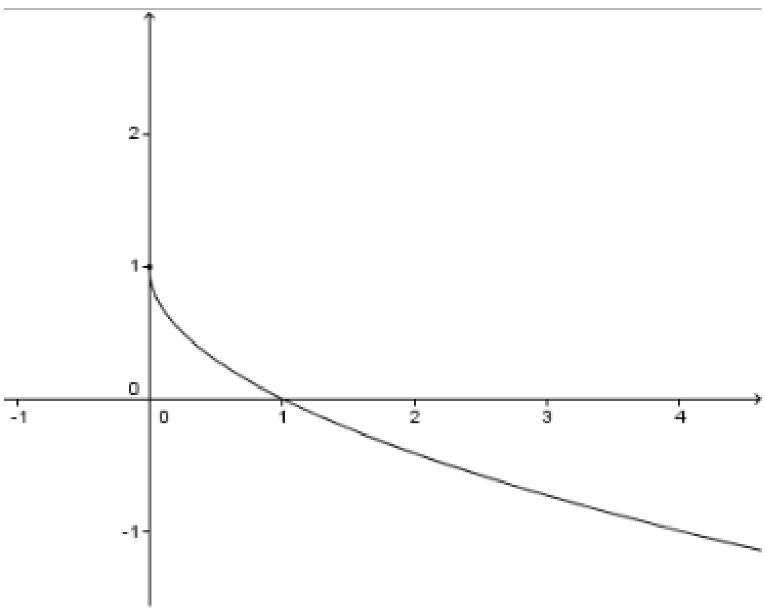
iii. το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών $\widehat{ΑΟΒ}$, $\widehat{ΑΟΓ}$ και $\widehat{ΑΟΔ}$.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 36 15270

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$.



α) Να βρείτε την μονοτονία της και την μέγιστη τιμή της.

(Μονάδες 6)

β) Αν $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ και $0 < α < \frac{1}{4} < β$ να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $P = (2f(α) - 1)(2f(β) - 1)$

(Μονάδες 10)

γ) Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι η $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y = 2x$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 37 15377

Μία κυβική δεξαμενή Α έχει ακμή με μήκος x μέτρα. Αν αυξηθεί η μία μόνο ακμή της κατά μία μονάδα θα μετατραπεί στη δεξαμενή Β σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με τετράγωνη βάση.

α) Να βρείτε τη διαφορά Δ(x) των όγκων των δύο δεξαμενών ως συνάρτηση του x.
(Μονάδες 4)

β) Αν ο όγκος της δεξαμενής Β είναι 36 κυβικά μέτρα να βρείτε:

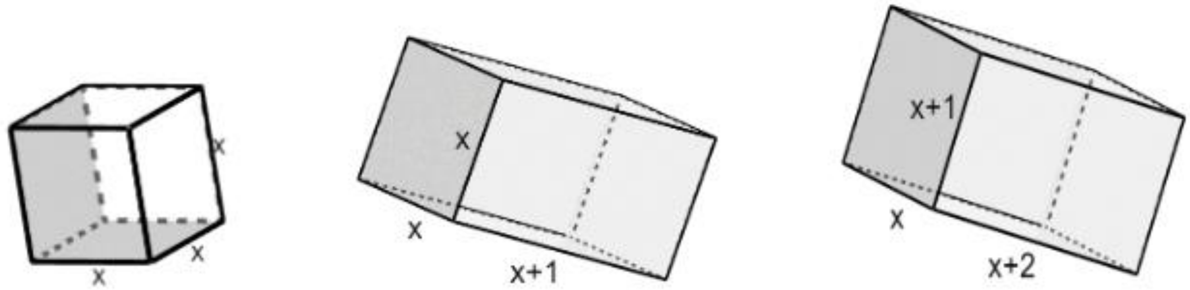
i. Τις διαστάσεις των δεξαμενών Α και Β. (Μονάδες 9)

ii. Τη διαφορά των όγκων Δ(x). (Μονάδες 4)

γ) Αν επιπλέον αυξηθεί η μία ακμή της βάσης της δεξαμενής Β κατά 2 μονάδες, να βρείτε τη μικρότερη τιμή του x ώστε ο όγκος της νέας δεξαμενής Γ να είναι τουλάχιστον 60 κυβικά μέτρα. (Μονάδες 8)

Βοηθητικά δίνονται τα σχήματα των δεξαμενών Α, Β και Γ

Δεξαμενή Α Δεξαμενή Β Δεξαμενή Γ



5.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

- ✓ Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$ ορίζουμε ως δύναμη του α τα εξής : $\boxed{\alpha^\nu = \begin{cases} \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot ... \cdot \alpha}_{\nu\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma} & , \nu > 1 \\ \alpha & , \nu = 1 \end{cases}}$. Επίσης, αν $\alpha \neq 0$, τότε $\boxed{\alpha^0 = 1}$ και $\boxed{\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

- ✓ Αν $\alpha > 0$ και ο εκθέτης είναι ρητός, δηλαδή της μορφής $\frac{\mu}{\nu}$, με $\mu \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$, τότε ορίζουμε : $\boxed{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}\ ,\ \alpha > 0}$ π.χ. $\alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha}$, $\alpha^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\alpha^2}$, $\alpha^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha^4}}$

  Επίσης, αν $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$, ορίζουμε : $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$.

- ✓ Η έννοια της δύναμης επεκτείνεται και στην περίπτωση που ο εκθέτης είναι άρρητος.

- ✓ Οι ιδιότητες των δυνάμεων, ισχύουν και για δυνάμεις με εκθέτη πραγματικό αριθμό. Πιο συγκεκριμένα : αν $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ και $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, τότε :

$$\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1 + x_2}\ ,\quad \frac{\alpha^{x_1}}{\alpha^{x_2}} = \alpha^{x_1 - x_2}\ ,\quad (\alpha \cdot \beta)^x = \alpha^x \cdot \beta^x\ ,\quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{\alpha^x}{\beta^x}\ ,\quad \left(\alpha^{x_1}\right)^{x_2} = \alpha^{x_1 \cdot x_2}$$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

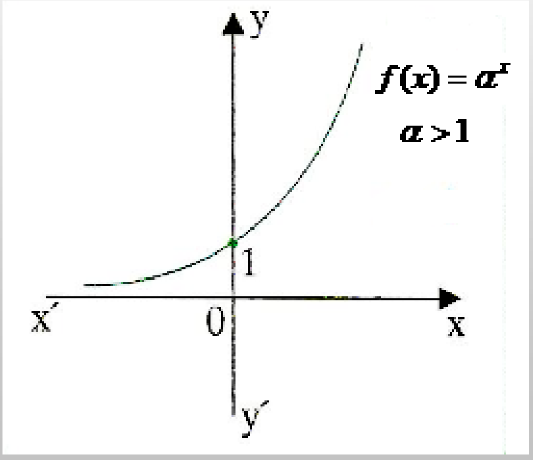
Έστω $\alpha > 0$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η δύναμη α^x. Επομένως αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in \mathbb{R}$ στη δύναμη α^x, ορίζουμε τη συνάρτηση : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha^x$.

- ✓ Αν $\alpha \neq 1$ τότε η $f(x) = \alpha^x$ είναι η εκθετική συνάρτηση
- ✓ Αν $\alpha = 1$ τότε η $f(x) = 1^x = 1$ είναι η σταθερή συνάρτηση

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

- **Η εκθετική συνάρτηση : $f(x)=\alpha^x$, με $\alpha>1$ έχει τις εξής ιδιότητες :**
  - ✓ Το πεδίο ορισμού της είναι $A_f=\mathbb{R}$
  - ✓ Το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0,+\infty)$ (δηλ. παίρνει μόνο θετικές τιμές)
  - ✓ Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, δηλ. για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει :
    αν $x_1<x_2$, τότε $f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow \alpha^{x_1}<\alpha^{x_2}$
  - ✓ Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $A(0,1)$ και έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιαξονα των x.
  - ✓ Καθώς το x τείνει στο $+\infty$ και η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ τείνει στο $+\infty$, ενώ καθώς το x τείνει στο $-\infty$ η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ τείνει στο 0.

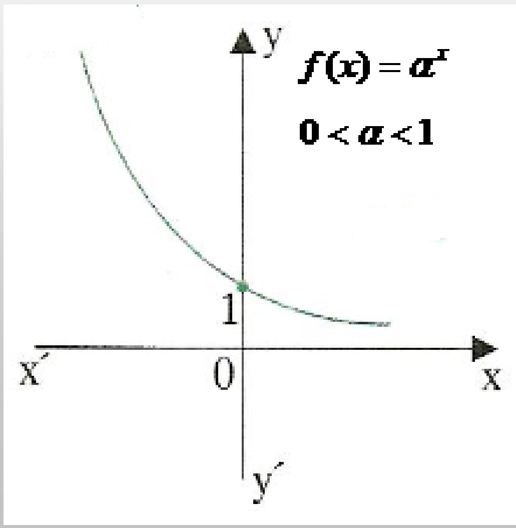
Η γραφική παράσταση της $f(x)=\alpha^x$, με $\alpha>1$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

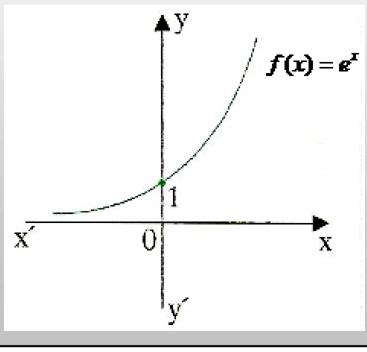
- **Η εκθετική συνάρτηση : $f(x)=\alpha^x$, με $0<\alpha<1$ έχει τις εξής ιδιότητες :**
  - ✓ Το πεδίο ορισμού της είναι το $A_f=\mathbb{R}$
  - ✓ Το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0,+\infty)$ (δηλ. παίρνει μόνο θετικές τιμές)
  - ✓ Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, δηλ. για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ισχύει :
    αν $x_1<x_2$, τότε $f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow \alpha^{x_1}>\alpha^{x_2}$
  - ✓ Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $A(0,1)$ και έχει ασύμπτωτο τον θετικό ημιαξονα των x.
  - ✓ Καθώς το x τείνει στο $+\infty$ και η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ τείνει στο 0, ενώ καθώς το x τείνει στο $-\infty$ η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ τείνει στο $+\infty$.

Η γραφική παράσταση της $f(x)=\alpha^x$, με $0<\alpha<1$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



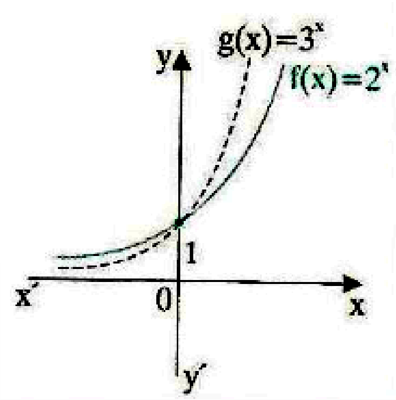
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΟΡΙΣΜΟΣ e

Αν θεωρήσουμε την ακολουθία $\alpha_\nu=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ και δώσουμε πολύ μεγάλες τιμές στο ν, τότε οι τιμές της α_ν προσεγγίζουν έναν πραγματικό αριθμό. Ο αριθμός αυτός είναι άρρητος και τον συμβολίζουμε με e (από τον Euler) και ισχύει : $e=\lim_{\nu\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu\approx 2{,}71828$. Η συνάρτηση $f(x)=e^x$ είναι εκθετική συνάρτηση (η πιο συχνά εμφανιζόμενη) και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :

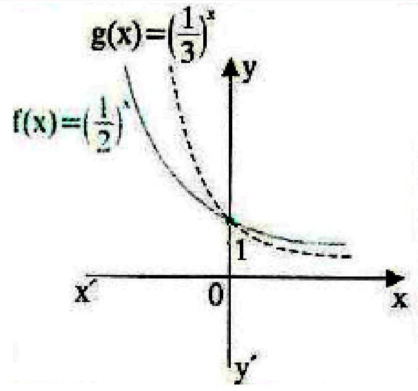


ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

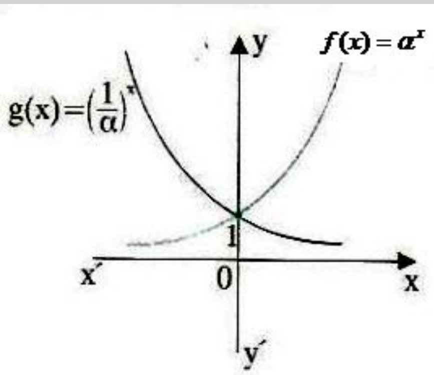
- Για τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων της μορφής : $f(x)=\alpha^x$, με $\alpha>1$, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει το α τόσο η γραφική παράσταση «πλησιάζει» τον άξονα y΄y για $x>0$



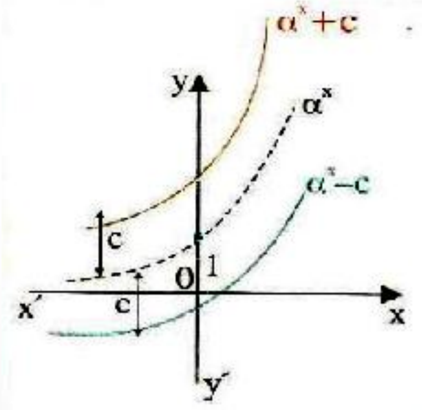
- Για τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων της μορφής $f(x)=\alpha^x$, με $0<\alpha<1$, παρατηρούμε ότι όσο μικραίνει το α τόσο η γραφική παράσταση «πλησιάζει» τον άξονα y΄y για $x<0$



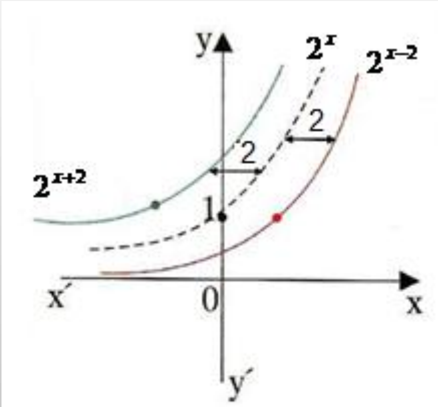
- Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\alpha^x$ και $g(x)=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^x$, με $0<\alpha\neq 1$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y΄y γιατί : $g(x)=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^x=\frac{1}{\alpha^x}=\alpha^{-x}=f(-x)$.



➢ Η γραφική παράσταση της $f(x)=\alpha^x+c$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της α^x κατά c μονάδες : προς τα πάνω αν $c>0$, προς τα κάτω αν $c<0$.



➢ Η γραφική παράσταση της $f(x)=\alpha^{x+\rho}$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της α^x κατά ρ μονάδες : προς τα δεξιά αν $\rho<0$, προς τα αριστερά αν $\rho>0$.



➢ Η γραφική παράσταση της $f(x)=\alpha^{x+\rho}+c$ προκύπτει από δυο διαδοχικές μετατοπίσεις, μια οριζόντια κατά ρ και μια κατακόρυφη κατά c.

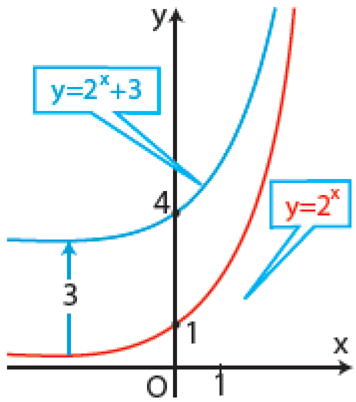
<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

1. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

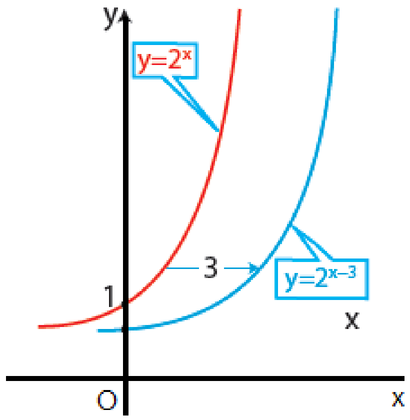
i. $f(x)=2^x+3$ ii. $g(x)=2^{x-3}$ iii. $h(x)=2^{x-3}+2$

<u>Λύση :</u>

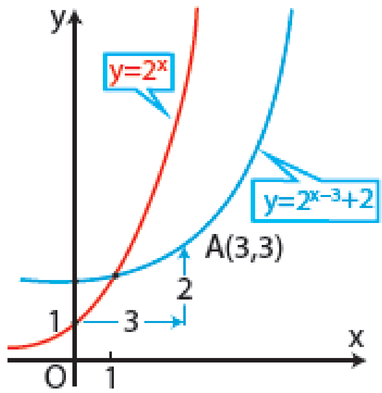
i. Η γραφική παράσταση της $f(x)=2^x+3$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $\phi(x)=2^x$ κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.



ii. Η γραφική παράσταση της $g(x) = 2^{x-3}$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $\phi(x) = 2^x$ κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά.



iii. Η γραφική παράσταση της $h(x) = 2^{x-3} + 2$ προκύπτει από δυο μετατοπίσεις της $\phi(x) = 2^x$: μιας οριζόντιας κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.



<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2</u> : ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΒΑΣΗ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ

Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$

α) ορίζεται σε όλο το $\Re$, αν $\alpha>0$

β) είναι εκθετική, αν $\alpha>0$ και $\alpha\neq 1$

γ) είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, αν $\alpha>1$

δ) είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$, αν $0<\alpha<1$

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

10. (Άσκηση 1 σελ. 171 Β΄Ομάδας σχολικό) *(Λίγο πιο εμπλουτισμένη)*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{2-\alpha}{2\alpha-1}\right)^x$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x)$:

i. έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
ii. είναι εκθετική.
iii. είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
iv. είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

<u>Λύση :</u>

i. Για να έχει η συνάρτηση f πεδίο ορισμού το $\Re$, αρκεί η βάση της δύναμης να είναι θετικός αριθμός, δηλαδή όταν : $\dfrac{2-\alpha}{2\alpha-1}>0\Leftrightarrow(2-\alpha)(2\alpha-1)>0$ με $2\alpha-1\neq 0\Leftrightarrow\alpha\neq\dfrac{1}{2}$.

Είναι :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$2-\alpha$	+		+	0	-
$2\alpha-1$	-	0	+		+
$(2-\alpha)(2\alpha-1)$	-		+		-

Τελικά η f έχει πεδίο ορισμού το $\Re$ όταν $(2-\alpha)(2\alpha-1)>0\Leftrightarrow\alpha\in\left(\dfrac{1}{2},2\right)$.

ii. Η συνάρτηση f είναι εκθετική όταν :

- $\dfrac{2-\alpha}{2\alpha-1}>0\Leftrightarrow(2-\alpha)(2\alpha-1)>0\overset{i.}{\Leftrightarrow}\alpha\in\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ και
- $\dfrac{2-\alpha}{2\alpha-1}\neq 1\Leftrightarrow 2-\alpha\neq 2\alpha-1\Leftrightarrow 3\alpha\neq 3\Leftrightarrow\alpha\neq 1$

Τελικά η συνάρτηση f είναι εκθετική όταν : $\alpha\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,2)$

iii. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα όταν : $0<\dfrac{2-\alpha}{2\alpha-1}<1$

- $\dfrac{2-\alpha}{2\alpha-1}>0\overset{i.}{\Leftrightarrow}\alpha\in\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ (1)

- $\frac{2-\alpha}{2\alpha-1}<1 \Leftrightarrow \frac{2-\alpha}{2\alpha-1}-1<0 \Leftrightarrow \frac{2-\alpha-2\alpha+1}{2\alpha-1}<0 \Leftrightarrow \frac{3-3\alpha}{2\alpha-1}<0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (3-3\alpha)(2\alpha-1)<0$

Είναι :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$3-3\alpha$	+		+	0	-
$2\alpha-1$	-	0	+		+
$(2-\alpha)(2\alpha-1)$	-		+		-

Άρα : $\alpha \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1,+\infty)$ (2)

Τελικά η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα όταν συναληθεύουν οι (1) και (2) δηλαδή όταν : $\alpha \in (1,2)$.

iv. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα όταν : $\frac{2-\alpha}{2\alpha-1}>1 \Leftrightarrow \frac{2-\alpha}{2\alpha-1}-1>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2-\alpha-2\alpha+1}{2\alpha-1}>0 \Leftrightarrow \frac{3-3\alpha}{2\alpha-1}>0 \Leftrightarrow (3-3\alpha)(2\alpha-1)>0 \overset{iii.}{\Leftrightarrow} \alpha \in \left(\frac{1}{2},1\right).$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Είναι οι εξισώσεις που η μεταβλητή x βρίσκεται στον εκθέτη. Οι μορφές που μπορεί να συναντήσουμε είναι οι εξής :

Μορφή 1 : Αν η εξίσωση έχει τη μορφή $\alpha^{f(x)}=\beta^{g(x)}$ τότε προσπαθούμε να γράψουμε και τα δυο μέλη ως εκθετικά με την ίδια βάση και στη συνέχεια εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι οι εκθετικές συναρτήσεις είναι ¨1-1¨. *(Αν δεν μπορούμε να γράψουμε και τα δυο μέλη ως εκθετικά με την ίδια βάση, τότε η εξίσωση λύνεται με τη βοήθεια λογαρίθμων όπως θα μάθουμε σε επόμενη ενότητα.)*

Μορφή 2 : Εξισώσεις που περιέχουν εκθετικά τα οποία μπορούν όλα να γραφούν με την ίδια βάση α, λύνονται συνήθως θέτοντας $\alpha^x=\omega>0$.

Μορφή 3 : Σε εξισώσεις που περιέχουν εκθετικά τα οποία δεν μπορούν να γραφούν όλα με την ίδια βάση, αλλά εμφανίζονται δυο διαφορετικές βάσεις, έστω α,β, τότε εργαζόμαστε ως εξής :

- Μεταφέρουμε τις δυνάμεις με τις ίδιες βάσεις σε ξεχωριστά μέλη
- Καταλήγουμε σε μια εξίσωση της μορφής : $\lambda\cdot\alpha^x=\mu\cdot\beta^x$ η οποία λύνεται ως έξης :

$\lambda\cdot\alpha^x=\mu\cdot\beta^x \Leftrightarrow \frac{\alpha^x}{\beta^x}=\frac{\mu}{\lambda} \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x=\frac{\mu}{\lambda}$ και στη συνέχεια εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι οι εκθετικές συναρτήσεις είναι ¨1-1¨.

Στις παραπάνω μορφές ιδιαίτερα χρήσιμες είναι οι ιδιότητες :

$$\alpha^{\mu+\nu}=\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu, \quad \alpha^{\mu-\nu}=\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}, \quad (\alpha^\mu)^\nu=\alpha^{\mu\nu}.$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

2. (Μορφή 1) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

i. $e^{x^2-5x+6}=1$ ii. $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{81}{16}$ iii. $32^x=16^{1-x}$

Λύση :

i. $e^{x^2-5x+6}=1 \Leftrightarrow e^{x^2-5x+6}=e^0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2, ή, x=3$

ii. $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{81}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{3^4}{2^4} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^4 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \Leftrightarrow x=-4$

iii. $32^x=16^{1-x} \Leftrightarrow \left(2^5\right)^x=\left(2^4\right)^{1-x} \Leftrightarrow 2^{5x}=2^{4-4x} \Leftrightarrow 5x=4-4x \Leftrightarrow 9x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{9}$

3. (Μορφή 2) Να λυθεί η εξίσωση : $3^{2x+1}-26\cdot 3^x-9=0$

Λύση : $3^{2x+1}-26\cdot 3^x-9=0 \Leftrightarrow 3^{2x}\cdot 3-26\cdot 3^x-9=0 \Leftrightarrow 3\cdot\left(3^x\right)^2-26\cdot 3^x-9=0$ (1)

Θέτω $3^x=y$ άρα η (1) γίνεται : $3y^2-26y-9=0$ $\Delta=(-26)^2-4\cdot 3\cdot(-9)=784$

$$y_{1,2}=\frac{26\pm\sqrt{784}}{6}=\frac{26\pm 28}{6} \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} y=9 \\ ή \\ y=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

- Για $y=9 \Leftrightarrow 3^x=9 \Leftrightarrow 3^x=3^2 \Leftrightarrow x=2$
- Για $y=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^x=-\frac{1}{3}$ Αδύνατο.

4. (Μορφή 3) Να λυθεί η εξίσωση : $21\cdot 3^x+5^{x+3}=3^{x+4}+5^{x+2}$

Λύση : $21\cdot 3^x+5^{x+3}=3^{x+4}+5^{x+2} \Leftrightarrow 21\cdot 3^x+5^x\cdot 5^3=3^x\cdot 3^4+5^x\cdot 5^2 \Leftrightarrow$

$21\cdot 3^x+125\cdot 5^x=81\cdot 3^x+25\cdot 5^x \Leftrightarrow 125\cdot 5^x-25\cdot 5^x=81\cdot 3^x-21\cdot 3^x \Leftrightarrow$

$100\cdot 5^x=60\cdot 3^x \Leftrightarrow \frac{5^x}{3^x}=\frac{60}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x=\frac{3}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x=\left(\frac{5}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow x=-1$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4</u> : ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ :

Για την επίλυση εκθετικών ανισώσεων εργαζόμαστε όπως στις εκθετικές εξισώσεις. Έτσι σε οποιαδήποτε περίπτωση καταλήγουμε στην επίλυση ανίσωσης της μορφής : $\alpha^{f(x)}>\alpha^{g(x)}$. Τότε αν :

- $\alpha>1$ έχουμε : $\alpha^{f(x)}>\alpha^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x)$
- $0<\alpha<1$ έχουμε : $\alpha^{f(x)}>\alpha^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

5. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις :

i. $e^{2x-x^2}<1$ ii. $2^{x^2-2x}<8^{x-2}$ iii. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}<2^{4-2x}$

Λύση :

i. $e^{2x-x^2}<1 \Leftrightarrow e^{2x-x^2}<e^0 \overset{\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{\Leftrightarrow} 2x-x^2<0$

Έχω $2x-x^2=0 \Leftrightarrow x(2-x)=0 \Leftrightarrow x=0, \acute{\eta}, x=2$

x	-∞	0		2	+∞
$2x-x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $2x-x^2<0$ τότε $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

ii. $2^{x^2-2x}<8^{x-2} \Leftrightarrow 2^{x^2-2x}<\left(2^3\right)^{x-2} \Leftrightarrow 2^{x^2-2x}<2^{3x-6} \overset{\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{\Leftrightarrow} x^2-2x<3x-6 \Leftrightarrow x^2-5x+6<0$

Έχω $x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2, \acute{\eta}, x=3$

x	-∞	2		3	+∞
x^2-5x+6	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2-5x+6<0$ τότε $x\in(2,3)$

iii. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}<2^{4-2x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-(4-2x)} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4} \overset{\gamma\nu.\phi\theta\iota\nu.}{\Leftrightarrow} x+1>2x-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x>-5 \Leftrightarrow x<5$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5</u> : ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

6. (Άσκηση 5 σελ. 170 Ά ομάδας σχολικό)

Να λυθούν τα συστήματα :

i. $\begin{cases} 8^{2x+1}=32\cdot 4^{4y-1} \\ 5\cdot 5^{x-y}=5^{2y+1} \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 3^x+2^y=11 \\ 3^x-2^y=7 \end{cases}$

<u>Λύση :</u>

i. $\begin{cases} 8^{2x+1}=32\cdot 4^{4y-1} \\ 5\cdot 5^{x-y}=5^{2y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2^3)^{2x+1}=2^5\cdot(2^2)^{4y-1} \\ 5^{x-y+1}=5^{2y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{6x+3}=2^5\cdot 2^{8y-2} \\ 5^{x-y+1}=5^{2y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{6x+3}=2^{8y-2+5} \\ 5^{x-y+1}=5^{2y+1} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+3=8y+3 \\ x-y+1=2y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-8y=0 & (1) \\ x-3y=0 & (2) \end{cases}$, η (1) γίνεται $x=3y$ έτσι η (2) γίνεται $6\cdot 3y-8y=0 \Leftrightarrow y=0$ και $x=3\cdot 0 \Leftrightarrow x=0$. Τελικά $(x,y)=(0,0)$.

ii. $\begin{cases} 3^x+2^y=11 \\ 3^x-2^y=7 \end{cases}$ θέτουμε : $3^x=\alpha>0$ και $2^y=\beta>0$, οπότε το σύστημα γίνεται :

$\begin{cases} 3^x+2^y=11 \\ 3^x-2^y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=11 \\ \alpha-\beta=7 \end{cases}$ προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $2\alpha=18 \Leftrightarrow \alpha=9$ και με αντικατάσταση στην πρώτη : $9+\beta=11 \Leftrightarrow \beta=2$. Τελικά : $\begin{cases} \alpha=9 \Leftrightarrow 3^x=3^2 \Leftrightarrow x=2 \\ \beta=2 \Leftrightarrow 2^y=2 \Leftrightarrow y=1 \end{cases}$

Τελικά $(x,y)=(2,1)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

7. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύπτουν αληθείς προτάσεις:

i. Αν η συνάρτηση f :R→R με f(x)=α^x είναι εκθετική με βάση το α, τότε για το α ισχύει ………………….

ii. Η γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης με βάση το α τέμνει το άξονα y΄y στο σημείο ……………………..

iii. Η γραφική παράσταση με βάση το α, όπου α>1 έχει ασύμπτωτη …………….

iv. Αν 0<α≠1, η συνάρτηση f(x)=α^x έχει σύνολο τιμών το …………

v. Αν 0<α<1, τότε η συνάρτηση f(x)=α^x ως προς τη μονοτονία είναι…………………

vi. Νόμος της εκθετικής μεταβολής είναι η συνάρτηση …………..

vii. Νόμος της εκθετικής απόσβεσης είναι η συνάρτηση ………….. με ……………

8. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

i. Αν το α>0, μ,ν∈Z, ν>0, τότε $a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$

ii. Αν α>0, τότε η συνάρτηση f :R→R με f(x)=α^x λέγεται εκθετική συνάρτηση με βάση α.

iii. Η συνάρτηση f(x)=e^x λέγεται εκθετική.

iv. Αν α>1, η συνάρτηση f(x)=α^x είναι γνησίως φθίνουσα.

v. Αν 0<α<1 και x_1,x_2 ∈R, τότε $\alpha^{\chi_1} < \alpha^{\chi_2} \Leftrightarrow \chi_1 < \chi_2$

vi. Αν 0<α≠1, τότε η συνάρτηση f(x)=α^x έχει σύνολο τιμών το R.

vii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=α^x, α>1 έχει ασύμπτωτη το θετικό ημιάξονα Ox

viii. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: f(x)= α^x και g(x)=α^{-x}, 0<α≠1 είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y΄y.

ix. Αν 0<α≠1 και χ_1,χ_2∈R ,τότε $\alpha^{\chi_1} = \alpha^{\chi_2} \Leftrightarrow \chi_1 = \chi_2$.

x. Αν η συνάρτηση Q(t)=Q_0e^{ct} είναι ο νόμος της εκθετικής μεταβολής, τότε Q_0>0.

xi. Αν η συνάρτηση Q(t)= Q_0e^{ct} είναι ο νόμος της εκθετικής απόσβεσης, τότε c>0.

9. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

i. Η συνάρτηση f(x)=$(\frac{4}{\pi})^{\chi}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Η συνάρτηση f(x)=$(\frac{3}{\pi})^{\chi}$ είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Η συνάρτηση f(x)=$(\frac{3}{e})^{\chi}$ έχει ασύμπτωτη το θετικό ημιάξονα των χ.

iv. $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ v. $3^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

vi. $5^x < 25 \Leftrightarrow x < 2$ vii. $(\frac{2}{3})^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

10. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

i. Αν x>0, τότε e^x>1

ii. Αν x<0, τότε 10^x<1

iii. Οι αριθμοί x και e^x-1 είναι ομόσημοι.

iv. Για κάθε x≠0 είναι $\frac{e^x - 1}{x} > 0$

v. $3^{x^2} \geq 1$

vi. $2^{e^x} > 1$ vii. $(\frac{1}{2})^{|x|} \leq 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

11. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

i. $f(x)=3^{x}$ $\quad g(x)=3^{x+2}$ $\quad h(x)=3^{x+2}-1$

ii. $f(x)=2^{x}$ $\quad g(x)=2^{x-2}$ $\quad h(x)=2^{x-2}+3$

iii. $f(x)=e^{x}$ $\quad g(x)=e^{x-1}$ $\quad h(x)=e^{x-1}-2$

iv. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ $\quad g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ $\quad h(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-3$

v. $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^{x}$ $\quad g(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^{x-3}$ $\quad h(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^{x-3}+2$

12. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

i. $f(x)=3^{|x|}$

ii. $f(x)=3^{-|x|}$

iii. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$

iv. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-|x|}$

13. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

i. $f(x)=2^{|x|+x}$

ii. $f(x)=2^{|x|-x}$

iii. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|+x}$

iv. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|-x}$

v. $f(x)=\sqrt{4\cdot 4^{x}+12\cdot 2^{x}+9}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΒΑΣΗ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{\lambda+4}{2-\lambda}\right)^x$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\Re-\{2\}$ η συνάρτηση $f(x)$:

i. έχει πεδίο ορισμού το $\Re$
ii. είναι εκθετική
iii. είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$
iv. είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(2\alpha-5)^x$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha\in\Re$ η συνάρτηση $f(x)$:

i. έχει πεδίο ορισμού το $\Re$
ii. είναι εκθετική
iii. είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$
iv. είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(|\lambda|-3)^x$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\Re$ η συνάρτηση $f(x)$:

i. έχει πεδίο ορισμού το $\Re$
ii. είναι εκθετική
iii. είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$
iv. είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(3\lambda^2+8\lambda+5)^x$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\Re$ η συνάρτηση $f(x)$:

i. είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$
ii. είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(6\lambda^3-7\lambda^2+1)^x$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\Re$ η συνάρτηση $f(x)$:

i. είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$
ii. είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(\lambda^4+4\lambda^3-7\lambda^2-22\lambda+25)^x$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\Re$ η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{\lambda^3+2\lambda^2-3\lambda-7}{2\lambda-1}\right)^x$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\Re$ η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

21. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $3^{2x} = \frac{1}{81}$ ii. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} = 27$

iii. $2^{-x} = 32$ iv. $\frac{1}{2^x} = 16$

v. $4^{3x} = 2^4 \cdot 16^{\frac{x}{2}}$ vi. $9^x - 2\cdot 3^x - 3 = 0$

22. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $e^{x^2-2x} = 1$ ii. $3^{8-|x|} = 9^{|x|-2}$ iii. $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{64}{27}$ iv. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+5} = \sqrt{2}^{x-4}$

23. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $2\cdot 4^x - 5\cdot 2^x + 2 = 0$ ii. $2^{2x+1} - 4\cdot 2^x = 0$

iii. $4^{x+1} - 9\cdot 2^x + 2 = 0$ iv. $3^x - 7 = \frac{63}{3^{x+1}} - 3^{3-2x}$

24. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $3^{2x} + 9^x = 11\cdot 4^{x-1} + 4^{x+1}$ ii. $3\cdot 2^{x-4} - 2^{x-1} = 5^{x-2} - 6\cdot 5^{x-3}$

iii. $9^{x+1} - 4^{x+2} = 44\cdot 4^{x-1} + 3^{2x}$ iv. $4^{x+1} - 13\cdot 6^x + 9^{x+1} = 0$

25. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $2^{x^2-5x+6} = 1$ i. 2^{4x+10} - 3 $2^{2x+5} + 2 = 0$

iii. $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$ iv. $3^{2x-2} + 3^x = 4$

v. $4^x - 7\cdot 2^x - 8 = 0$ vi. $2\cdot 9^x - 3^{x+1} - 135 = 0$

26. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $2^x - 5\sqrt{2^x} + 4 = 0$ ii. $3^{x+1} - 28 + 9\, 3^{-x} = 0$

ii. $2^{x-2} - 3^{x-3} + 3^{x-4} = 0$ iv. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

v. $9^{x-1} + \sqrt{9^{x+1}} - 10 = 0$ vi. $3^{x-1} + \sqrt{3^{x+1}} - 108 = 0$

27. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $(x^2-5x+5)^{x+2} = 1$ ii. $e^{2x} + e = e^x + e^{x+1}$

iii. $(\sqrt{3}+1)^{x+5} = 1$ iv. $3^{(x^2-9)(x-2)} = 1$

v. $(x^2-3x+1)^{3x-5} = 1$ vi. $(x-3)^{2x^2-5x-3} = (x-3)^{x^2-4x+3}$

28. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $5\cdot 2^{2x} - 7\cdot 10^x + 2\cdot 5^{2x} = 0$

ii. $4^{x+1} - 12\cdot 6^{x-1} - 6\cdot 9^x$

iii. $3^{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

iv. $9^{\eta\mu^2 x} = 27^{1+\sigma\upsilon\nu x}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

29. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $e^{x^2-x}<1$ ii. $e^{x^2-5x}-e^6<0$ iii. $7^{2x-4}>7^{x+1}$

iv. $3^{2x}+3\leq 28\cdot 3^{x-1}$ v. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}<5^{1-2x}$ vi. $3^{x^2-7x+9}<\frac{1}{3}$

30. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $3^{12-5x}<9$ ii. $e^{|2x-1|-5}\geq 1$ iii. $5^{3-4x}\geq -25$

iv. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-2x}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x+10}$ v. $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-9}<-1$ vi. $\left(\frac{1}{27}\right)^{x^2-4x}-\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-3x-4}\geq 0$

31. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $3^{x^2-7x+6}<1$ ii. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}<\left(\frac{1}{4}\right)^{x+\frac{5}{2}}$

iii. $2^{2x}-10\cdot 2^{x-1}+4\geq 0$ iv. $4^x-6\cdot 2^x+8<0$

v. $2^{x+3}+15\cdot 3^{x-1}<3^{x+2}-2^x$ vi. $2^{x-1}-15\cdot 3^{x-6}\leq 4\cdot 2^{x-5}+3^{x-4}$

32. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $4\cdot 2^{x-3}+\frac{16}{2^{x+2}}>3$ ii. $16\cdot 8^{x-1}-13\cdot 4^x+11\cdot 2^{x+1}-8\leq 0$

iii. $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-1}-30\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+1\leq 0$ iv. $\frac{1}{4}\cdot 8^{x+1}-11\cdot 4^x+26\cdot 2^{x-1}-4\geq 0$

33. Να λύσετε την ανίσωση : $(x^2-2x-3)(e^x-1)(2^x-8)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x-\frac{4}{9}\right)\geq 0$.

34. Να λύσετε την ανίσωση : $(x^2-3x-4)(e^x-1)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x-\frac{1}{16}\right)\leq 0$.

35. Να λύσετε την ανίσωση : $(x-2)^{2x^2-3x-5}>1$ με $x>2$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

36. Να λυθούν τα συστήματα:

i. $\begin{cases}9^{x+1}=3^{y+3}\\4^{x+y}=8\cdot 2^x\end{cases}$ ii. $\begin{cases}2^{x-1}\cdot 4^y=1\\3^x\cdot 3^{y-1}=9\end{cases}$ iii. $\begin{cases}5^{3x-1}\cdot 25^{y+1}=1\\4^{2x+4}\cdot 8^{y-1}=8\end{cases}$

37. Να λυθούν τα συστήματα:

i. $\begin{cases} 8^{x-y}\cdot 4^{2y-1}=4\cdot 2^{x} \\ 1000^{x-2}=10\cdot 100^{x+y} \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 2^{x+1}-15\cdot 3^{y-1}=3 \\ 2^{x+2}-3^{y+1}=13 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} 2^{x}=3y \\ y\cdot 3^{x}=12 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} 2^{x}\cdot 3^{y}=108 \\ 2^{y}\cdot 3^{x}=72 \end{cases}$

38. Να λυθούν τα συστήματα:

i. $\begin{cases} 2^{x^2-5x+6}=1 \\ x+y=8 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 4^{x}\cdot 8^{y}=256 \\ 64\cdot 4^{x}-8^{y}=0 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} 2^{x+y}=4 \\ 2^{x+1}+2^{y+1}=10 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} 2^{x+1}-15\cdot 3^{y-1}=3 \\ 2^{x+2}-3^{y+1}=13 \end{cases}$

39. Να λυθούν τα συστήματα:

i. $\begin{cases} 3^{x}-5^{y}=4 \\ 9\cdot 3^{-x}+5^{y}=6 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 3^{x}-5^{y}=4 \\ 27^{x}-125^{y}=604 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} 5^{x}-4^{y+1}=9 \\ 5^{x-1}+4^{y+2}=69 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} \sqrt[x]{x+y}=2 \\ (x+y)\cdot 3^{x-7}=2^{7} \end{cases}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : Ο ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Μια εκθετική συνάρτηση με βαση το e είναι η $\boxed{Q(t)=Q_0\cdot e^{ct}}$. Αυτή εκφράζει ένα φυσικό μέγεθος, που μεταβάλλεται με το χρόνο t. Το Q_0 είναι η αρχική τιμή του Q (για t=0) και είναι $Q_0>0$, ενώ το c είναι μια σταθερά που εξαρτάται κάθε φορά από τη συγκεκριμένη εφαρμογή. Η συνάρτηση αυτή είναι γνωστή ως **νόμος της εκθετικής μεταβολής**. Αν $c>0$ η συνάρτηση Q είναι γνησίως αύξουσα και εκφράζει το νόμο της **εκθετικής αύξησης**, ενώ αν $c<0$ η Q είναι γνησίως φθίνουσα και εκφράζει το νόμο της **εκθετικής απόσβεσης.**

40. Κατά τη διάρκεια του φθινοπώρου, ο μισός πληθυσμός των μυγών πέθαινε κάθε 3 μέρες. Αν αρχικά ο πληθυσμός τους ήταν 1 εκατομμύριο και η συνάρτηση που περιγράφει τη μείωσή τους είναι η $P(t)=P_o 2^{-ct}$, όπου c σταθερά, να βρεθεί ο αριθμός των επιζώντων μυγών μετά από:
i. 15 μέρες, ii. 3 βδομάδες.

41. Σ’ έναν ασθενή με υψηλό πυρετό χορηγείται ένα αντιπυρετικό φάρμακο. Η θερμοκρασία (πυρετός) Θ(t) του ασθενούς t ώρες μετά τη λήψη του φαρμάκου δίνεται από τον τύπο $\Theta(t)=36+4\left(\frac{1}{2}\right)^{t}$ σε βαθμούς Κελσίου.

i. Να βρείτε πόσο πυρετό είχε ο ασθενής τη στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο.
ii. Να βρείτε σε πόσες ώρες η θερμοκρασία του ασθενούς θα πάρει φυσιολογική τιμή (36,5^{o}C).
iii. Αν η επίδραση του αντιπυρετικού διαρκεί 4 ώρες πόση θα είναι η θερμοκρασία του ασθενούς μόλις σταματήσει η επίδραση του φαρμάκου.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

42. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x)=4^x+\lambda$ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2},11\right)$.

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\Re$

ii. Να λύσετε την εξίσωση : $f\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\eta\mu^2x+f\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu x=56(1-\sigma\upsilon\nu x)$

iii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

43. Η συνάρτηση : $f(x)=(-3\lambda^2+12\lambda-8)^x$, με $\lambda\in\mathrm{Z}$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

i.Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathrm{Z}$

ii.Να λύσετε την εξίσωση : $f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\eta\mu\frac{5\pi}{6}\cdot\eta\mu\frac{4\pi}{3}\cdot\eta\mu x=\left[f\left(\frac{5}{2}\right)+f(1)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\sigma\upsilon\nu x$

44. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=3^x-3^{x+\alpha}-2^{x+2}-2^{x-1}$ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(3,-12)$. Να βρείτε:

i. Την τιμή του $\alpha\in\Re$

ii. Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

45. Το πολυώνυμο $f(x)=x^4+5^{2\lambda-1}x^3-2\cdot3^{\lambda+\frac{1}{2}}\cdot x^2+25^{\lambda}\cdot x-1$ έχει παράγοντα το $x-1$.

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\Re$

ii.Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

46. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=(\alpha+2)^x-5\alpha^{x+1}+20$ με $\alpha>0$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(2,-4)$.

i. Να βρείτε τον αριθμό α.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le4$.

iii. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases}2^x\cdot2^y=\left(f(1)\right)^{\frac{3}{2}}\\2^x+2^y=3\left(f(3)\right)^{\frac{1}{2}}\end{cases}$

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{\dfrac{4^x-3\cdot2^{x+1}+8}{2^{x-2}+4}}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $9^{f(x)}-8\cdot3^{f(x)}-9=0$.

48. Δίνετε το σύστημα $\begin{cases} 4^{\alpha-3}\cdot 8^{\beta-2}=2 \\ 7^{3\alpha-2\beta}=1 \end{cases}$

i.Να βρείτε τις τιμές των α και β

ii.Να λύσετε την ανίσωση $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{x} \prec \dfrac{8}{27}$

iii.Να λύσετε την εξίσωση $\alpha^{x-1}\cdot\beta^{x+1}=54$

49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{40}{4^{x+\lambda}-8}$

i. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(3,5)$, να δείξετε ότι $\lambda=-1$.

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

iii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)=-\dfrac{160}{31}$.   (Απ. $x=0$)

iv. Να λύσετε την εξίσωση : $9^{y-1}+\sqrt{9^{y+1}}+f(2)=0$.   (Απ. $y=1$)

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(2^{\lambda-3}-1\right)^{x}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\Re$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και για ποιες είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Να βρείτε το $\lambda\in\Re$, ώστε η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(2,9)$.

iii. Αν $\lambda=5$, να λύσετε την εξίσωση : $f(x)+f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+1$.

iv. Αν $\lambda=5$, να λύσετε την ανίσωση : $f(-2x)-4f(-x)+3\le 0$.

v. Αν $\lambda=5$, να δείξετε ότι : $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\le\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ για κάθε $\alpha,\beta\in\Re$.

51. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=4^{\frac{\eta\mu x}{2}}\cdot 2^{2\sigma\upsilon\nu^2 x-5}+\alpha$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

i. Να δείξετε ότι $\alpha=-\dfrac{1}{8}$.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

iii. Να λύσετε την ανίσωση : $\dfrac{1}{e^4}+f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\left(\dfrac{2}{e}\right)^{|x|}\ge 0$

5.2 ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ : ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

✓ Ο $\log_\alpha \theta$ με $0<\alpha \neq 1$, $\theta>0$, είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε το θ. Δηλ. $\boxed{\log_\alpha \theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta}$ με $x \in \mathbb{R}$. π.χ. $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

✓ Από τον ορισμό του λογάριθμου προκύπτει ότι αν $\alpha>0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για κάθε $x \in \Re$ και $\theta>0$ ισχύει : $\boxed{\log_\alpha \alpha^x = x}$, $\boxed{\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta}$, $\boxed{\log_\alpha 1 = 0}$ και $\boxed{\log_\alpha \alpha = 1}$

✓ Οι ιδιότητες των λογαρίθμων που ισχύουν είναι :
Αν $\alpha>0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in \Re$ ισχύουν :

1. $\boxed{\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2}$

<u>Απόδειξη :</u>

Έστω ότι είναι : $\log_\alpha \theta_1 = x_1$ και $\log_\alpha \theta_2 = x_2$ (1). Τότε έχουμε :
$\alpha^{x_1} = \theta_1$ και $\alpha^{x_2} = \theta_2$ οπότε :
$\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \theta_1 \cdot \theta_2$ και $\alpha^{x_1+x_2} = \theta_1 \cdot \theta_2$. Από τον ορισμό του λογάριθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = x_1 + x_2$ από την οποία, λόγω των (1), έχουμε τελικά : $\boxed{\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2}$

2. $\boxed{\log_\alpha \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2}$

<u>Απόδειξη :</u> Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο.

3. $\boxed{\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha \theta}$

<u>Απόδειξη :</u>

Έστω ότι είναι : $\log_\alpha \theta = x$ (2). Τότε έχουμε $\alpha^x = \theta$ οπότε $\alpha^{\kappa x} = \theta^\kappa$. Από τον ορισμό του λογάριθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa x$ από την οποία, λόγω της (2), προκύπτει ότι : $\boxed{\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha \theta}$

✓ **Δεκαδικός λογάριθμος** λέγεται ο λογάριθμος που έχει βάση το 10 : $\boxed{\log \theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta}$

π.χ.1 $\log 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100$, $\log 1000 = 3 \Leftrightarrow 10^3 = 1000$, $\log 0{,}1 = -1 \Leftrightarrow 10^{-1} = 0{,}1$,
$\log 0{,}0001 = -4 \Leftrightarrow 10^{-4} = 0{,}0001$, $\log 1 = 0 \Leftrightarrow 10^0 = 1$

✓ **Νεπεριος ή φυσικός λογάριθμος** λέγεται ο λογάριθμος που έχει βάση το e : $\boxed{\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta}$, όπου $e \approx 2{,}71$.

✓ Μπορούμε να γράψουμε οποιονδήποτε αριθμό $x \in \Re$ ως λογάριθμο με βάση α (όπου $0<\alpha \neq 1$) καθώς $x = \log_\alpha \alpha^x$, π.χ. $x = \log 10^x$, $x = \ln e^x$, $3 = \log_4 4^3$

✓ **Ο τύπος αλλαγής βάσης** είναι : $\log_\beta \theta = \dfrac{\log_\alpha \theta}{\log_\alpha \beta}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

i. $\ln\theta = \chi \Leftrightarrow \theta = ...$ ii. $\log\theta = x \Leftrightarrow \theta = ...$

iii. $\log 10 = ...$ iv. $\ln e = ...$ v. $\ln 1 = ...$

vi. $\ln e^{a} = ...$ vii. $e^{\ln\theta} = ...$ viii. $10^{\log 0} = ...$

ix. $e^{x\ln a} = ...$

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

i. Ισχύει ότι $\ln\theta = x \Leftrightarrow \theta = e^{x}$, θ>0

ii. Ισχύει ότι $\log x = y \Leftrightarrow y = 10^{x}$, x>0

iii. Αν $\ln\theta \neq x$, τότε $\theta \neq e^{x}$, θ>0

iv. lne=e

v. $\log 10^{\alpha} = \alpha$ vi. $e^{\ln\theta} = \theta$, θ>0

vii. ln1=1

viii. Αν $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$, τότε ισχύει: α) $\ln(\theta_1+\theta_2) = \ln\theta_1 \ln\theta_2$

β) $\dfrac{\ln\theta_1}{\ln\theta_2} = \ln(\theta_1 - \theta_2)$ γ) $\ln\theta^{\kappa} = \kappa\ln\theta, \kappa \in R$

ix. $\log\theta = \dfrac{\ln\theta}{\ln 10}, \theta > 0$

3. Να αντιστοιχίσετε τις λογαριθμικές παραστάσεις της στήλης Α με τα αναπτύγματά τους στην στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Α. $\ln(xy^2), x>0, y\neq 0$	1. lnx
Β. ln(exy), x>0,y>0	2. ln|x|
Γ. $\ln\dfrac{x}{e^3}, x>0$	3. lnx+2ln|y|
Δ. $\dfrac{1}{2}\ln x^2, x\neq 0$	4. lnx-3 5. 1+lnx+lny

4. Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις της στήλης Α με τις λύσεις τους στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Α. lnx=1	1. $x=\dfrac{1}{10}$
Β. logx=-1	2. x=2
Γ. $\ln x=\dfrac{1}{2}$	3. x=1
Δ. logx=0	4. $x=\sqrt{e}$
	5. x=e

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1</u> : ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ

Αν μας ζητούν να υπολογίσουμε ένα λογάριθμο ή μια μεταβλητή μέσα σε αυτόν, τότε χρησιμοποιούμε τον ορισμό : $\log_a \theta = x \Leftrightarrow a^x = \theta$

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

5. (Άσκηση 1 σελ. 179 Α΄ Ομάδας)
Να υπολογιστούν, χωρίς τη χρήση υπολογιστή τσέπης, οι λογάριθμοι :
i. $\log_{10} 0{,}001$
<u>Λύση</u> :
i. $\log_{10} 0{,}001 = x \Leftrightarrow 10^x = 0{,}001 \Leftrightarrow 10^x = 10^{-3} \Leftrightarrow x = -3$.

6. (Άσκηση 2 σελ. 179 Α΄ Ομάδας)
Για ποια τιμή του $x > 0$ ισχύει :
i. $\log_{10} x = 3$, $x > 0$
<u>Λύση</u> :
i. $\log_{10} x = 3 \Leftrightarrow 10^3 = x \Leftrightarrow x = 1000$

7. (Άσκηση 3 σελ. 179 Α΄ Ομάδας)
Για ποια τιμή του $\alpha > 0$ ισχύει :
i. $\log_\alpha 16 = 4$, $\alpha > 0$
<u>Λύση</u> :
i. $\log_\alpha 16 = 4 \Leftrightarrow \alpha^4 = 16 \Leftrightarrow \alpha^4 = 2^4 \Leftrightarrow \alpha = 2$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

8. Να υπολογίσετε τους λογάριθμους :
i. $\log_4 256$ ii. $\log_3 243$ iii. $\log\sqrt{1000}$ iv. $\log_{0,4} 0{,}16$
v. $\log_4 \frac{1}{32}$ vi. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$ vii. $\log_2 16$ viii. $\log_3 9^{15}$
ix. $\log_5 \sqrt{5}$ x. $\log_{13} 1$ xi. $5^{\log_5 3}$

9. Να υπολογίσετε τους λογάριθμους :
i. $\log 10$ ii. $\ln e$ iii. $\log 1$ iv. $\ln 1$ v. $\log 10000$
vi. $\ln \frac{1}{e^2}$ vii. $\log\left(\ln e^{100}\right)$ viii. $10^{\log 3}$ ix. $e^{\ln 5}$

10. Να υπολογισθεί το χ στις παρακάτω ισότητες.
i. $\log_2 x = -3$ ii. $\log x = 5$ iii. $\ln x = 2$ iv. $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$

11. Να υπολογισθεί το x στις παρακάτω ισότητες.
i. $\log_x 27 = \frac{3}{2}$ ii. $\log_x 125 = -3$ iii. $\log_x (2x^2 - 7x + 12) = 2$ iv. $\ln x^4 = 4e$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Για να λύσουμε αποδεικτικές – υπολογιστικές ασκήσεις χρησιμοποιούμε τον ορισμό και τις ιδιότητες των λογαρίθμων.

(Αν οι λογάριθμοι δεν έχουν την ίδια βάση, χρησιμοποιούμε τον τύπο αλλαγής βάσης, για να έχουμε παντού την ίδια βάση, και στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον ορισμό και τις ιδιότητες ώστε να καταλήξουμε στη ζητούμενη σχέση.)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

12. (Άσκηση 4 σελ. 179 Α΄ Ομάδας)

Να αποδείξετε ότι :

i. $\log_2 3 + 2\log_2 4 - \log_2 12 = 2$

Λύση :

i. Έχουμε : $\log_2 3 + 2\log_2 4 - \log_2 12 = 2 \Leftrightarrow \log_2 3 + \log_2 4^2 - \log_2 12 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\log_2 3 + \log_2 16) - \log_2 12 = 2 \Leftrightarrow \log_2 3\cdot 16 - \log_2 12 = 2 \Leftrightarrow \log_2 \frac{48}{12} = 2 \Leftrightarrow \log_2 \frac{48}{12} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2 4 = 2 \Leftrightarrow 2^2 = 4$ που ισχύει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

13. Να αποδείξετε ότι :

i. $2\log 8 + 4\log 5 - 3\log 2 = 4 - \log 2$

ii. $3\log_2 6 - 2\log_2 12 - 3\log_2 16 - \log_2 3 = -13$

iii. $\log 20 + \log 50 = 3$

iv. $\ln\left(e^4 - e^3\right) - \ln(e-1) = 3$

v. $2\log 5 + \frac{1}{2}\log 16 = 2$

vi. $\dfrac{\ln 25 - \log 9}{\ln\sqrt{5} - \log\sqrt{3}} = 4$

vii. $\dfrac{1 + 4\log 2 - 3\log 4 + \frac{1}{3}\log 8}{\log 75 - 2\log\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$

viii. $\dfrac{2 - \log 4}{\frac{1}{2} + \log\sqrt{\frac{5}{2}}} = 2$

ix. $2^{\log_2 6 - 2\log_2 \sqrt{3} + 1} = 4$

x. $e^{\frac{1}{2}\ln 9 - \frac{2}{3}\ln 8 + \ln 12} = 9$

14. Να αποδείξετε ότι : $2\log_2 3 + \log_2 6 - \log_2 27 = 1$

15. Να αποδείξετε ότι: i. log4+log20-3log2=1 ii. $\frac{1}{2}\ln 4 + \frac{2}{3}\ln 27 - \ln 6 = \ln 3$

16. Να αποδείξετε ότι :

i. $\dfrac{\log\sqrt{125}+\log\sqrt{27}-\log\sqrt{8}}{\log\sqrt{15}-\log\sqrt{2}}=3$

ii. $\dfrac{\log_3\sqrt{27}-\dfrac{1}{12}\log_2\dfrac{1}{64}}{\log_{\sqrt{2}}8+2\log_{\frac{1}{3}}9}=1$

iii. $\dfrac{1}{2}\log 2+\dfrac{1}{2}\log\left(2+\sqrt{2}\right)+\dfrac{1}{2}\log\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)+\dfrac{1}{2}\log\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)=\log 2$

17. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων :

i. $4^{2-\frac{3}{2}\log_2 3}$ ii. $49^{\frac{1}{2}\log_7 20-1}$

18. Για τους αριθμούς α, με $0<\alpha\neq 1$, και $x,y,\omega>0$ ισχύουν $\log_\alpha x=5$, $\log_\alpha y=4$ και $\log_\alpha \omega=3$. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

i. $\mathrm{A}=\log_\alpha\dfrac{\alpha^3\sqrt{x^4y^3}}{\omega^4}$

ii. $\mathrm{B}=\ln\dfrac{x\omega}{y^2}$

19. Να βρείτε την τιμή της παράστασης : $\mathrm{A}=\dfrac{\log^2 20-\log^2 5}{\log\sqrt{2}}$.

20. Να αποδείξετε ότι για κάθε x>0 και 0<α ισχύει : $\log_\alpha x=\log_{\alpha^2}x^2$

21. Να αποδείξετε ότι : $\log_\beta\alpha\cdot\log_\alpha\left(\dfrac{1}{\beta^2}\right)=-2$

22. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων :

i. $\mathrm{A}=\log_2 6-\log_4 9$

ii. $\mathrm{B}=\dfrac{\log 45}{\log 3}-\dfrac{\ln 5}{\ln 3}$

23. Αν 0<α,β,γ να αποδείξετε ότι : $\alpha^{\log_\beta\gamma}=\gamma^{\log_\beta\alpha}$

24. Αν α,β>0 και α,β≠1, να δειχθεί ότι $\dfrac{\log_\alpha\sqrt{\log_\alpha\beta}}{\sqrt{\log_\alpha\beta}}+\dfrac{\log_\beta\sqrt{\log_\beta\alpha}}{\sqrt{\log_\beta\alpha}}=0$.

25. Να αποδείξετε ότι $x^{\log y}=y^{\log x}$, με x,y>0.

26. Δίνεται ο αριθμός : $\alpha = \log\left(\ln\underbrace{\sqrt[10]{\sqrt[10]{\ldots\sqrt[10]{e}}}}_{8\ \rho\iota\zeta\iota\kappa\acute{\alpha}}\right)$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -8$

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $\dfrac{\sqrt[3]{e^2}^{\ln|\alpha|}\cdot x^3 + 2x^2 + \alpha x - 6}{x-1} \leq \log 1000^{x^2+x}$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3</u> : ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Υπόδειξη : Εκμεταλλευόμαστε τα δεδομένα της άσκησης και τα γνωστά από τη θεωρία.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :</u>

27. Η συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση ενός ραδιενεργού υλικού είναι $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{3}}$, όπου $Q(t)$ σε γραμμάρια και t σε έτη.

i. Να βρεθεί ο χρόνος ημιζωής του υλικού.

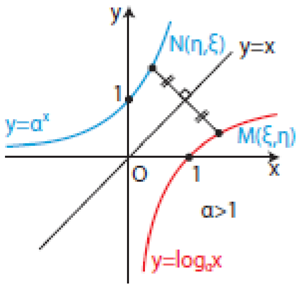
ii. Να βρεθεί η αρχική ποσότητα, αν σε 6 έτη η ποσότητα του υλικού είναι 500e gr.

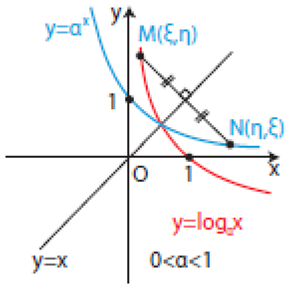
iii. Να βρεθεί πότε το υλικό θα είναι 2.400gr. (δίνεται ότι : ln110,592=4,71)

5.3 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

<u>ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ</u> : ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

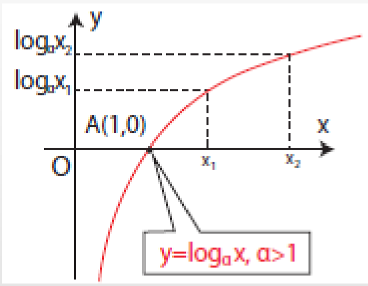
Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=\log_\alpha x$ και $y=\alpha^x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.



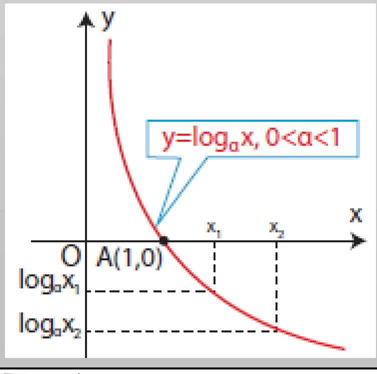


Με δεδομένη την παραπάνω συμμετρία και όσα γνωρίζουμε για την εκθετική συνάρτηση συμπεραίνουμε ότι :

- **Η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\log_\alpha x$ με $\alpha>1$ έχει τις εξής ιδιότητες :**
  - ✓ Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$
  - ✓ Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\Re$
  - ✓ Είναι γνησίως αύξουσα, που σημαίνει ότι αν $x_1<x_2$ τότε $\log_\alpha x_1<\log_\alpha x_2$
    (από το παραπάνω προκύπτει ότι : $\log_\alpha x<0, \alpha\nu\ 0<x<1$ και $\log_\alpha x>0, \alpha\nu\ x>1$)
  - ✓ Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α(1,0) και ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy΄.



- **Η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\log_\alpha x$ με $0<\alpha<1$ έχει τις εξής ιδιότητες :**
  - ✓ Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$
  - ✓ Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\Re$
  - ✓ Είναι γνησίως φθίνουσα, που σημαίνει ότι αν $x_1<x_2$ τότε $\log_\alpha x_1>\log_\alpha x_2$
    (από το παραπάνω προκύπτει ότι : $\log_\alpha x>0, \alpha\nu\ 0<x<1$ και $\log_\alpha x<0, \alpha\nu\ x>1$)
  - ✓ Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α(1,0) και ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ :

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

i. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x)=lnx είναι το σύνολο Α=………

ii. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f(x)=logx είναι το σύνολο f(A)=………

iii. Ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση f(x)=lnx είναι ……………..

iv. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=logx τέμνει τον άξονα x’x στο σημείο …………

v. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=lnx έχει ασύμπτωτη …………………….

vi. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=lnx βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x στο διάστημα του x …………………..

vii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=logx βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x στο διάστημα του x ………………

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

i. Η συνάρτηση f(x)=lnx έχει σύνολο τιμών το (0,+∞).

ii. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(x)=e^x και g(x)=lnx είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

iii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=logx έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα Oy΄.

iv. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=lnx βρίσκεται κάτω από τον άξονα των x στο διάστημα του x∈(0,1).

v. Αν $x_1,x_2>0$ και $\ln x_1=\ln x_2$, τότε $x_1=x_2$

vi. Αν $x_1,x_2>0$, τότε $\ln x_1<\ln x_2 \Leftrightarrow x_1>x_2$

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

i. Αν 0<x<1, τότε lnx<0

ii. Αν x>10, τότε logx>lne

iii. Αν 0<x<e, τότε lnx>log10

iv. Αν x>1, τότε lnx<0

v. Αν x>e, τότε lnx<1

4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

i. Αν x>1, τότε lnx>0

ii. Αν 0<x≠1, οι αριθμοί x-1 και lnx είναι ομόσημοι.

iii. Για κάθε x>1 είναι x-1+lnx>0

iv. Για κάθε 0<x≠1 είναι $\frac{\ln x}{x-1}>0$

5. Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α με τις λύσεις της στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Α. lnx=0	1. x=$\sqrt{e}$
Β. lnx=-1	2. x=2
Γ. lnx=1	3. x=e^2
Δ. lnx=2	4. x=1
Ε. lnx=$\frac{1}{2}$	5. x=e
	6. x=$\frac{1}{e}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ – ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ – ΑΡΤΙΑ – ΠΕΡΙΤΤΗ

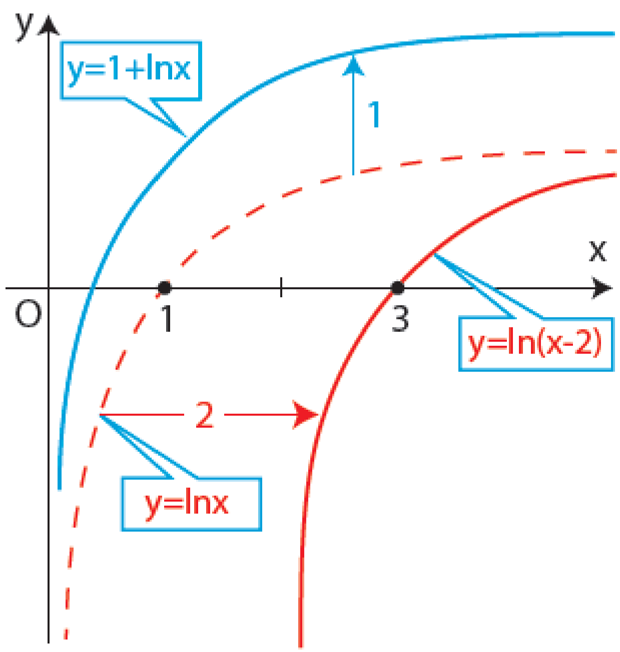
- Για τη μελέτη και τη σχεδίαση της λογαριθμικής συνάρτησης χρησιμοποιούμε τα γνωστά στοιχεία της θεωρίας.
- Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\log_{\alpha} \mathrm{A}(x)$ με $0<\alpha \neq 1$, παίρνουμε τον περιορισμό : $\mathrm{A}(x)>0$
- Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α. Η συνάρτηση f είναι άρτια, όταν για κάθε $x \in \mathrm{A}$ ισχύει και $-x \in \mathrm{A}$ και επιπλέον $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$.
- Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α. Η συνάρτηση f είναι περιττή, όταν για κάθε $x \in \mathrm{A}$ ισχύει και $-x \in \mathrm{A}$ και επιπλέον $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

6. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων : $\phi(x)=\ln x$, $f(x)=\ln x+1$ και $g(x)=\ln(x-2)$

Λύση :

Η γραφική παράσταση της $f(x)=\ln x+1$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\phi(x)=\ln x$ κατά μια μονάδα προς τα πάνω, ενώ της $g(x)=\ln(x-2)$ από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\phi(x)=\ln x$ κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά. Έτσι :



7. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης : $f(x)=\ln(1-e^{x})$

Λύση : Πρέπει : $1-e^{x}>0 \Leftrightarrow e^{x}<1 \Leftrightarrow e^{x}<e^{0} \Leftrightarrow x<0$. Άρα $\mathrm{A}_f=(-\infty,0)$.

8. (Άσκηση 2 σελ. 185 Β΄Ομάδας)
Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές :
i. $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ ii. $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

<u>Λύση</u> :
i. Πρέπει : $\sqrt{x^2+1}+x>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>-x$ (1)
<u>1^{ος} τρόπος</u> :
- Αν $-x>0 \Leftrightarrow x<0$, τότε :
  $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>-x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}^2>(-x)^2 \Leftrightarrow x^2+1>x^2 \Leftrightarrow 1>0$ που ισχύει.
- Αν $-x<0 \Leftrightarrow x>0$, τότε η (1) προφανώς ισχύει.

Οπότε η ανισότητα (1) ισχύει, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τελικά $A_f=\mathbb{R}$
<u>2^{ος} τρόπος</u> :
Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει : $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq -x \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>-x \Rightarrow \sqrt{x^2+1}+x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τελικά $A_f=\mathbb{R}$.

Άρα $A_f=\mathbb{R}$ συμμετρικό ως προς το 0, δηλ. για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$. Επίσης :

$$f(-x)=\ln\left(\sqrt{(-x)^2+1}-x\right)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\ln\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\ln\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln 1-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-f(x)$$

Άρα η f είναι περιττή.

ii. Πρέπει :
- $1+x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$
- $\dfrac{1-x}{1+x}>0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x)>0 \Leftrightarrow 1-x^2>0 \overset{*}{\Leftrightarrow} x\in(-1,1)$

*

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $1-x^2>0$ τότε $x\in(-1,1)$

Τελικά $A_f=(-1,1)$ συμμετρικό ως προς το 0, δηλ. για κάθε $x\in(-1,1)$ και $-x\in(-1,1)$. Επίσης :

$$f(-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\ln\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$$. Άρα η f είναι περιττή.

9. Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή η συνάρτηση : $f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

<u>Λύση :</u>
Πρέπει :
- $x^2+1\geq 0$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $\sqrt{x^2+1}+x\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ καθώς $\sqrt{x^2+1}+x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

- $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}>0 \Rightarrow \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)>0 \Rightarrow x^2+1-x^2>0 \Rightarrow 1>0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $A_f=\mathbb{R}$ συμμετρικό ως προς το 0, δηλ. για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$.

  Επίσης :

  $$f(-x)=\ln\frac{\sqrt{(-x)^2+1}+x}{\sqrt{(-x)^2+1}-x}=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}=\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)^{-1}=-\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}=-f(x)$$

  Άρα η f είναι περιττή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

10. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\ln(x^2-9)$ ii. $f(x)=\log(4x+24)-\ln(35-5x)$ iii. $f(x)=\ln(5+4x-x^2)$

iv. $f(x)=\ln\left(x^2-2x-3\right)+\ln\left(5-|x|\right)$ v. $f(x)=\log\left(|x+1|-3\right)-\ln\left(17-|2x+3|\right)$

11. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\ln(x^3-7x-6)$ ii. $f(x)=\ln\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+x}$

iii. $f(x)=\ln\left(\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x+2}-\dfrac{1}{27}\right)$ iv. $f(x)=\ln\left(4^x-10\cdot 2^x+16\right)$

12. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές :

i. $f(x)=\ln\dfrac{3-x}{3+x}$ ii. $f(x)=x\ln\dfrac{2-x}{2+x}$ iii. $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log[(\kappa-1)x^2-2(\kappa-3)x+\kappa]$. Να βρείτε το κ, ώστε η συνάρτηση f να έχει πεδίο ορισμού $A_f=\mathbb{R}$.

14. Να παρασταθούν γραφικά στο ίδιο σύστημα αξόνων οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων : $\phi(x)=\ln x$, $f(x)=\ln x-2$ και $g(x)=\ln(x+2)$

15. Να παρασταθούν γραφικά στο ίδιο σύστημα αξόνων οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων : $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\ln\dfrac{1}{x}$.

16. Να παρασταθούν γραφικά στο ίδιο σύστημα αξόνων οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων : $f(x)=\log x$ και $g(x)=\log(-x)$.

17. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

i. $f(x)=|\ln x|$ ii. $g(x)=\ln|x|$ iii. $h(x)=\dfrac{1}{2}\ln x^2$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσουμε μια λογαριθμική εξίσωση, ενεργούμε ως εξής :

1ο Βήμα : Βάζουμε περιορισμούς *(λογαριθμίσιμη ποσότητα>0)*

2ο Βήμα : Εξετάζουμε αν οι λογάριθμοι έχουν την ίδια βάση. Αν δεν έχουν την ίδια βάση, τους φτιάχνουμε με την ίδια βάση.

3ο Βήμα : Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες και τον ορισμό του λογάριθμου, προσπαθούμε να φτάσουμε σε εξισώσεις της μορφής : $\log_a[f(x)] = \log_a[g(x)] \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

4ο Βήμα : Ελέγχουμε αν οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τον αρχικό περιορισμό για την επίλυση της εξίσωσης.

Παρατήρηση 1 : Αν δεν είναι εύκολο να λυθούν οι περιορισμοί, τότε λύνουμε πρώτα την εξίσωση και στη συνεχεία επαληθεύουμε τις λύσεις.

Παρατήρηση 2 : Αν η εξίσωση είναι εκθετική και δεν μπορεί να λυθεί με τις μεθόδους που μελετήσαμε στις εκθετικές εξισώσεις, λογαριθμίζουμε και τα δυο μέλη. Μια βολική λύση είναι να παίρνουμε ως βάση του το γινόμενο των βάσεων των δυνάμεων.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

18. (Άσκηση 5 σελ. 185 Α΄ ομάδας)

Να λυθούν οι εξισώσεις : i. $\log(x+1) + \log(x-1) = \log 2$

Λύση :

i. Πρέπει : $\begin{cases} x+1>0 \\ \kappa\alpha\iota \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ \kappa\alpha\iota \\ x>1 \end{cases}$ άρα τελικά για $x>1$ με τον περιορισμό αυτό έχουμε :

$$\log(x+1) + \log(x-1) = \log 2 \Leftrightarrow \log[(x+1)(x-1)] = \log 2 \Leftrightarrow \log(x^2-1) = \log 2 \Leftrightarrow x^2-1 = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \ \ \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta} \ \ \acute{\eta} \ \ x = -\sqrt{3} \ \ \alpha\pi o\rho.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

19. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\ln x^4 = 4$

ii. $\log(x-5) = 0$

iii. $\log(1-x) + \log(x+4) = \log 4$

iv. $\ln(3e-x) = 1$

v. $\ln(x^2-1) - \ln(x-2) = \ln 8$

vi. $\log(x+2) + \log(x-2) = 1 + 5\log 2$

vii. $\log_3 x^2 = 4$

viii. $\log x^2 = 5\cdot(\log x)^2$

ix. $\log\sqrt{x} = \sqrt[3]{\log x}$

20. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $\ln(x+1)+\ln(x-2)=\ln 4$
ii. $2\log x-\log(x+6)=\log 3$
iii. $\log(x-6)+\log(x-7)=1-\log 5$
iv. $\log(1+x)=\log(1-x)$
v. $\log(1+x)=1+\log(1-x)$
vi. $2\log(2x-1)-\log(3x-2x^2)=\log(4x-3)-\log x$
vii. $\ln\frac{x}{2}=\frac{\ln x}{2}$
vii. $2\log x=\log\left(x+\frac{11}{10}\right)+1$

21. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $\log[\log(2x^2+x-11)]=0$
ii. $\frac{1}{2}\log(x+2)+\log\sqrt{x-3}=1+\log\sqrt{3}$
iii. $\ln\left(x^2-2e^2\right)=1+\ln(-x)$
iv. $\ln(x-2e)+\ln(x+e)=2\ln 2+2$
v. $\log\left(x^2+1\right)+2\log\left(\sqrt{5}x\right)=2$
vi. $\ln|x+1|=\ln 2$
vii. $\log(4x-1)=2\log 2+\log\left(x^2-1\right)$
viii. $\ln x+\ln(1+x)+\ln(x+2)=\ln 24$

22. Να λυθούν οι εξισώσεις : i. $(\ln x)^3-2(\ln x)^2-5\ln x+6=0$ ii. $2(\log x)^2+\log x^2=4$

23. Να λυθούν οι εξισώσεις : i. $\frac{\log x+3}{\log x}+\frac{\log x^2-3}{\log x-2}=5$ ii. $\log^2 x^2+\log x^4-8=0$

24. i. Δείξτε ότι $2^{\ln x}=x^{\ln 2}$ ii. Να λυθεί η εξίσωση: $4^{\ln x}-9x^{\ln 2}+8=0$

25. i. Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log\sqrt{3}}$.
ii. Να λύσετε την εξίσωση: $3^{2\log x}-2\cdot 3^{\log x}-100^{\log\sqrt{3}}=0$.

26. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $x(\log 10-\log 5)=\log(4^x-12)$
ii. $x+\log(1+2^x)=x\log 5+\log 6$
iii. $\log 2+\log\left(4^{x-2}+9\right)=1+\log\left(2^{x-2}+1\right)$
iv. $\log\left(2^x+2.3^x\right)+\log 81=x\log 3+\log 178$

27. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $(\log x-1)(\log^2 x+\log x+1)=7$
ii. $x^{\log 16}-13x^{\log 4}+36=0$

28. i. Να αποδείξετε ότι : $x^{\log 5}=5^{\log x}$ για κάθε $x>0$.
ii. Να λυθεί η εξίσωση : $5^{2\log x}=5+4\cdot x^{\log 5}$

29. i. Να αποδείξετε ότι : $x^{\log 2}=2^{\log x}$ για κάθε $x>0$.
ii. Να λυθεί η εξίσωση : $4^{\log x}=x^{\log 2}+2$.

30. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $3^{x-2}=6^{4-x}$
ii. $2^{3+2x}=5^{x-1}$
iii. $2^{x+4}=5^{2-x}$
iv. $x^{\log x}=\sqrt{10x}$

31. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $\log_4(5+x^3)=\log_2(x+3)$
ii. $\log_{x+1}(x^3-9x-8)\cdot\log_{x-1}(x+1)=3$

32. Να λυθεί η εξίσωση : $2^{x-8}=5-\log x$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Για να λύσουμε ένα σύστημα λογαριθμικών εξισώσεων, ενεργούμε ως εξής : θέτουμε τους περιορισμούς και προσπαθούμε να φέρουμε τουλάχιστον μια από τις εξισώσεις στη μορφή $\log_\alpha[f(x)]=\log_\alpha[g(x)]$, όποτε και θα μπορούμε να τη λύσουμε. Αν υπάρχουν δυο διαφορετικοί λογάριθμοι $\log_\alpha[f(x)]$ και $\log_\beta[g(x)]$ και στις δυο εξισώσεις, θέτουμε $\kappa=\log_\alpha[f(x)]$ και $\lambda=\log_\beta[g(x)]$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

33. (Άσκηση 7 σελ. 185 Β΄ ομάδας) Να λύσετε τα συστήματα :

ii. $\begin{cases} xy=8 \\ \log y = 2\log x \end{cases}$

Λύση :

ii. Για να ορίζεται το σύστημα πρέπει : $x,y>0$, έτσι έχουμε :

$$\begin{cases} xy=8 \\ \log y = 2\log x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=8 \\ \log y = \log x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=8 & (1) \\ y=x^2 & (2) \end{cases}$$

Η (1) λόγο της (2) γίνεται : $xy=8 \overset{y=x^2}{\Leftrightarrow} x\cdot x^2=8 \Leftrightarrow x^3=8 \Leftrightarrow x=2$ δεκτή

Άρα η (2) γίνεται : $y=2^2 \Leftrightarrow y=4$ δεκτή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

34. Να λυθούν τα ακόλουθα συστήματα :

i. $\begin{cases} xy=10000 \\ \log x\cdot\log y=3 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 3\ln x-5\ln y=11 \\ \ln x\cdot\ln y=-2 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} \log(20x+10y)=2 \\ \log(x+1)+\log y=1 \end{cases}$

35. Να λυθούν τα συστήματα:

i. $\begin{cases} \ln x+2\ln y=5 \\ 3\ln x-\ln y=1 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x+y=7 \\ \ln x+\ln y=2\ln 2+\ln 3 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} 2^{\log x}-3^{\log y}=1 \\ 4^{\log x}+9^{\log y}=25 \end{cases}$ iv. $\begin{cases} x^2+y^2=425 \\ \log x+\log y=2 \end{cases}$

v. $\begin{cases} \log x+\log y=1 \\ 3^{x-2}\cdot 9^{y-4}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$ vi. $\begin{cases} \log^2 x+\log^2 y=10 \\ \log x-\log y=2 \end{cases}$

vii. $\begin{cases} \ln(xy)=4 \\ \ln x\ln y=-12 \end{cases}$ viii. $\begin{cases} x+y=2 \\ \ln x-\ln y=\ln 3 \end{cases}$

ix. $\begin{cases} x+y=15 \\ \ln x+\ln y=\ln 36 \end{cases}$ x. $\begin{cases} \ln x+\ln y=0 \\ e^x e^{x+y}=e^3 \end{cases}$

xi. $\begin{cases} \ln x-\ln 4=\ln 3-\ln y \\ e^x=e^{y+1} \end{cases}$ xii. $\begin{cases} x^{\log y}+y^{\log x}=20 \\ \log\sqrt{xy}=1 \end{cases}$.

36. Να λυθούν τα συστήματα:

i. $\begin{cases} \log^2 x + \log^2 y = 10 \\ \log x - \log y = 2 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x^3 - \log y^4 = 2 \end{cases}$

37. α) Να δειχθεί ότι $\alpha^{\log\beta} = \beta^{\log\alpha}$.

β) Να λυθεί το σύστημα: $\begin{Bmatrix} (2x)^{\log y} + y^{\log(2x)} = 8x^2 \\ \dfrac{y}{4x^2} = y^{\log(2x)} \end{Bmatrix}$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4</u> : ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Για τις ανισώσεις ενεργούμε όπως στις εξισώσεις, με τη διαφορά ότι επιπλέον χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα :

- Αν $0 < \alpha < 1$ τοτε ισχύει : $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$
- Αν $\alpha > 1$ τότε ισχύει : $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

38. (Άσκηση 8 σελ. 185 Β΄ ομάδας) Να λύσετε τις ανισώσεις :

ii. $\log(x^2 - 4) < \log 3x$

<u>Λύση :</u>

ii. Για να ορίζεται η ανίσωση πρέπει :

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 & (1) \\ \kappa\alpha\iota \\ 3x > 0 \Leftrightarrow x > 0 & (2) \end{cases}$$

Για την ανίσωση (1) έχω $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x^2 - 4$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2 - 4 > 0$ τότε $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Και επειδή από (2) είναι $x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$ άρα τελικά $x \in (2, +\infty)$

Οπότε για $x \in (2, +\infty)$ η ανίσωση γίνεται :

$\log(x^2 - 4) < \log 3x \Leftrightarrow x^2 - 4 < 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 < 0$

Είναι : $x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \quad \acute{\eta} \quad x = -1$

x	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
$x^2 - 3x - 4$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2 - 3x - 4 < 0$ τότε $x \in (-1, 4)$. Όμως από περιορισμό $x \in (2, +\infty)$ άρα τελικά $x \in (2, 4)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

39. Να συγκριθούν οι ακόλουθοι αριθμοί :

i. $\log_3 4$ και $\log_3 6$ ii. $\log_{0,4} 3$ και $\log_{0,4} 5$

iii. $\ln(2x)$ και $\ln(x^2+1)$ x>0 iv. $\log(2xy)$ και $\log(x^2+y^2)$ με x, y > 0

40. Να δείξετε ότι : $\log_2 3 > \log_6 9$

41. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i. $\log(2x+4) < \log(13-x)$ ii. $\log(x-1)+\log(x-2) \geq \log(x+2)$ iii. $\ln(2x-e) < 1$

iv. $\log(x-1) < 2$ v. $\ln\left(|x|-3\right) < 0$ vi. $\log(7-x) \geq 1-\log x$

42. Να λυθούν οι ανισώσεις :

ii. $\ln(2x+4) < 3+\ln x$ ii. $\log_{0,2}(x^2-2) > \log_{0,2} x$ iii. $\log x^2 > (\log x)^2$

iv. $\log\sqrt{x} > \sqrt{\log x}$ v. $e^{\log x} > 10$ vi. $\ln[\ln(x+3)] > 1$

43. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i. $\ln(2x-1)(x+3) \geq 2\ln 3$ ii. $\ln(x+e)+\ln(x-e) \leq 2+\ln 3$

iii. $\log(x+1)+\log(x+2) \geq \log 3+\log\left(\frac{3}{2}x+1\right)$

44. Να λυθούν οι ανισώσεις :

i. $\ln(x+3)+\ln(2-x) < \ln(5-x)$ ii. $\log(7-x) \geq 1-\log x$ iii. $(\log x)^2 - \log x^2 \geq 3$

iv. $x^{2-\ln x} \geq \frac{1}{e^{15}}$ v. $\dfrac{\log x^2}{\log\frac{1}{3}} < 2$

45. Να λυθεί η ανίσωση : $\ln x < \frac{1}{x} - 1$.

46. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \log x$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+12} < \log\dfrac{2x^2+3}{x^2+12}$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 5ΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3-\log(10-2x)$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

ii. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$

iii. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

iv. Να λύσετε την εξίσωση $8^{\frac{|x|}{3}-1}=f\left(\frac{99}{20}\right)$

48. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\log\left(\sqrt{x^2+100}-x\right)+\alpha$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

i. Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

iii. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

iv. Να λύσετε την εξίσωση : $2\sigma\upsilon\nu^3 x+7\eta\mu^2 x+2\sigma\upsilon\nu x=\left(\frac{1}{100}\right)^{f\left(\frac{15}{2}\right)}$.

49. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x,y>0$ ισχύει $x^{\log y}=y^{\log x}$

i.Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^{\log y}+y^{\log x}=20 \\ \log\sqrt{xy}=1 \end{cases}$

ii.Αν ο αριθμός x που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα είναι λύση της εξίσωσης $\log\left[\log\left(x^2+x\log\theta-110\right)\right]=0$, να βρείτε την τιμή του θ, όπου θ θετικός πραγματικός αριθμός.

50. Οι αριθμοί $\ln\left(3^\alpha-1\right)$, $\ln\left(3^\alpha+1\right)$, $3\ln 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

i. Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x+\ln y=\alpha \\ y-e^x+e=\alpha \end{cases}$

51. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\frac{16\cdot 2^x-8}{4^x+7\cdot 2^x}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le\ln 4-\ln 3$

52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)=2\ln 2$

iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f(x)>0$

53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\dfrac{4^x-2^x}{2^{x+1}+4}\right)$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-2\ln 2$

iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$

iv. Να δείξετε ότι $f(x)=(x-1)\ln 2+\ln\left(\dfrac{2^x-1}{2^x+2}\right)$

54. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(e^{2x}-2e^x+3)$ και $g(x)=\ln 3+\ln(e^x-1)$.

i. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f,g.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f,g.

iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f(x)>2g(x)$

55. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^{2x}-e^2}{e^x-e}-e$

i. Να βρείτε πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii. Να αποδείξετε ότι f(χ)=e^x.

iii. Να λυθεί η εξίσωση f($2x$)=2·f(x)+3

56. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+\ln x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=-1$

iii. Να βρείτε τα διαστήματα του x στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

57. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = ln(2 – e^x) – ln(e^x + 1)

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Δ της συνάρτησης.

ii. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον αρνητικό ημιάξονα Ox΄.

iii. Να βρείτε για ποιες τιμές του Δ, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία g(x) = ln2.

58. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\sqrt{17-2^{x+1}-2^{3-x}}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να βρείτε τα σημεία της C_f που έχουν τεταγμένη $\sqrt{7}$.

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x΄x.

iv. Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο.

v. Να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστο στο 1.

59. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\ln\sqrt{4\cdot 2^x-9\cdot 3^x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να βρείτε το $\alpha\in\Re$, ώστε οι αριθμοί : $\ln 5,\ f(2\alpha),\ \alpha\cdot\ln 6$ με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

iii. Για $\alpha=-2$, να λύσετε την ανίσωση : $\log(\log y)+\log(\log y^3+\alpha)<0$.

60. Το πολυώνυμο : $P(x)=x^3-(4^{\lambda-2}+1)x^2+5x+4^{\lambda-\frac{1}{2}}+4^{\lambda-1}-10$ έχει παράγοντα το $x+2$.

i. Να δείξετε ότι $\lambda=3$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση : $5\cdot 6^x-4^{x+\frac{1}{2}}=\lambda^{2x+1}$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση : $\lambda^{\eta\mu^2 x}+\lambda^{\sigma\upsilon\nu^2 x}=4$.

iv. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases}2^x-\lambda^y=\lambda\\ 2^{2-x}+\lambda^y=2\end{cases}$.

61. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση: $f(x)=(10^{\log 2}-2)x^4+2^{\log\theta}x^3-4x^2-x+2^{2-\log\theta}+1$ με $\theta>0$. Να δείξετε ότι:

i. Η πολυωνυμική συνάρτηση είναι τρίτου βαθμού.

ii. Αν το $x-1$ είναι παράγοντας της πολυωνυμικής συνάρτησης τότε $\theta=10$.

iii. Για $\theta=10$, η πολυωνυμική συνάρτηση έχει τη μορφή $f(x)=2\chi^3-4x^2-x+3$.

iv. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f να μην βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x-1$.

62. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\ln\dfrac{9^x-1}{3^x+5}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να βρείτε το σημείο της C_f που έχει τεταγμένη $2\ln 2$.

iii. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

iv. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f γίνεται : $f(x)=\ln(3^x-1)+\ln\left(1-\dfrac{4}{3^x+5}\right)$.

v. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .

63. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\log\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+\lambda\right)$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-6,1+\log 6)$.

i. Να αποδείξετε ότι $\lambda=-4$.

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f(x)<1$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση : $2^{\log y}+y^{f(-3)}=2$

v. Για $\alpha,\beta<-1$ να αποδείξετε ότι : $2f(\alpha+\beta)\geq f(2\alpha)+f(2\beta)$.

64. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\ln(e^{2x}+\alpha)-x$, με $\alpha>0$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\ln 3,\dfrac{1-\log 3}{\log e}\right)$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

iii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)=\ln 5-\ln 2$.

iv. Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

v. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$.

vi. Να λύσετε την ανίσωση : $f\left(\log\frac{1}{99}\right)\cdot\frac{2\log y+1}{\log y+1} > f(\log 99)$.

65. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

iv. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathrm{A}_f$ ισχύει :

a. $\frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \in \mathrm{A}_f$

b. $f\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)=2f(\alpha)$

v. Θεωρούμε τον αριθμό $\rho = f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{e-3}{e+3}\right)$ και το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=x^3-3x^2+\alpha x+\alpha+14$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-\rho$.

a. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός ρ είναι ακέραιος.

b. Να αποδείξτε ότι $\alpha=-6$.

c. Να λύσετε την εξίσωση : $\mathrm{P}(x)=0$.

vi. Αν $\lambda = f\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$, να λύσετε την εξίσωση : $8^x-12\cdot 4^{x-\lambda}-3\cdot 2^{x+\lambda}+8=0$.

66. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+\lambda}-x\right)$, $\lambda>0$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

i. Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$.

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

iii. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

iv. Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x}{2}=\frac{f\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5}\right)}{f\left(\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{5}\right)}$.

v. Αν το σημείο $\mathrm{M}(\alpha,\beta)$ ανήκει στη C_f, να αποδείξετε ότι το σημείο $\mathrm{N}(\beta,\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της $g(x)=\frac{e^{-x}-e^x}{2}$.

67. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\frac{6\ln x+\alpha}{\ln^3 x-\ln\sqrt[4]{x}}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}\left(e^2,\frac{14}{15}\right)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-5$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)=6-f\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$.

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΓΙΑ ΤΟ 5^{Ο} ΚΕΦΑΛΑΙΟ

5.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΘΕΜΑ 2ο

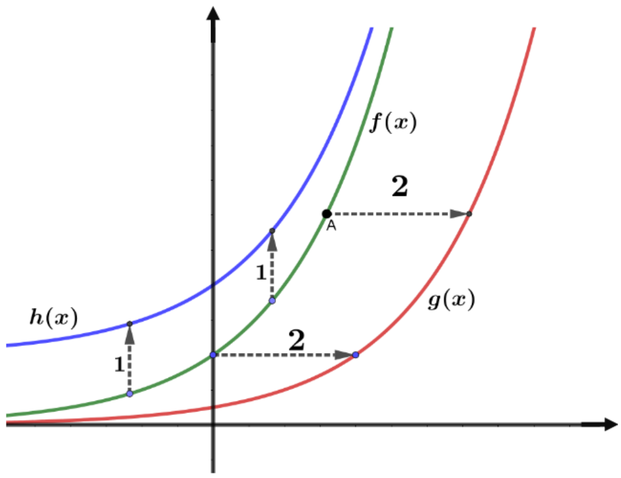
ΘΕΜΑ 1 15393

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=2^x$, $x\in\mathbb{R}$ και δύο άλλων συναρτήσεων g(x) και h(x), $x\in\mathbb{R}$ που προέκυψαν από μετατοπίσεις τη γραφικής παράστασης της f(x).

α) Να εξηγήσετε με τι είδους μετατοπίσεις προέκυψαν οι γραφικές παραστάσεις των g(x) και h(x) από την γραφική παράσταση της f(x). (Μονάδες 8)

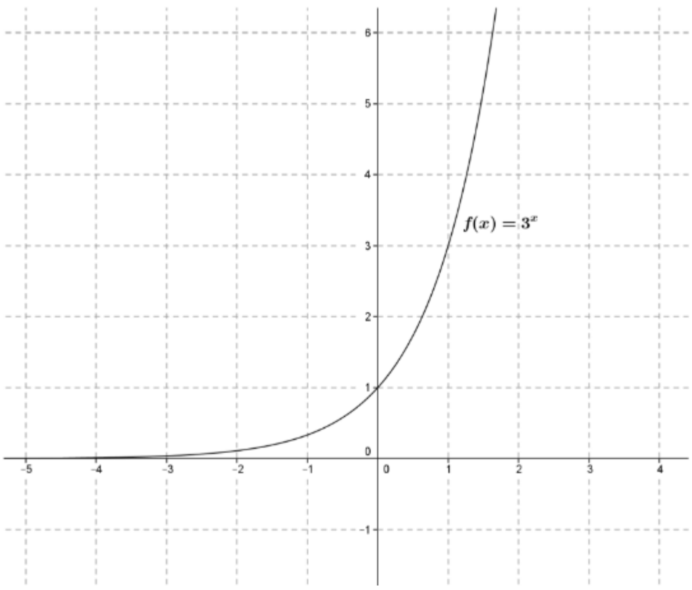
β) Να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων g(x) και h(x). (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Α της γραφικής παράστασης της f του οποίου η τεταγμένη είναι 16. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 2 21451

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=3^x$ με $x\in\mathbb{R}$.



α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=3^x+1$ και $h(x)=3^x-1$, μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Μονάδες 12)

β) Ποια είναι η ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g και ποια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h; (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 3 21444

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους $f(x)=4^x$ και $g(x)=2^x-\frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο A, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g, με εξαίρεση το σημείο A. (Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 21471

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot 2^x+\beta$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της
συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(1,3)$ και $\mathrm{B}(2,13)$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β. (Μονάδες 7)

Αν $\alpha=5$ και $\beta=-7$,

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>4^x-3$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 5 21448

Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου τη χρονική στιγμή $t=0$, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του $f(t)$ (σε mg) να μειώνεται μετά από t ημέρες σύμφωνα με τη συνάρτηση : $f(t)=q_0\cdot\alpha^t$, $t\geq 0$, όπου οι αριθμοί α,q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0<\alpha<1$. (Μονάδες 6)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\frac{1}{2}$. (Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f, εκφράζοντας τις τιμές $f(t)$ ως συνάρτηση της αρχικής τιμής q_0.

(Μονάδες 4)

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$					

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha = \frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της $4^{ης}$ ημέρας είναι 25 mg.

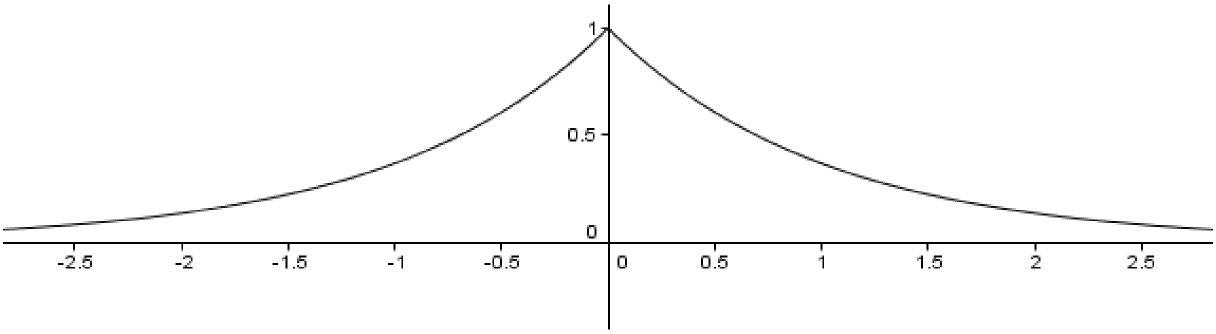
i. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής. (Μονάδες 5)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6]$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 6 15269

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διπλού τύπου.



α) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε μια ακριβώς από τις παρακάτω συναρτήσεις να επιλέξετε ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f .

Α. $f(x) = \begin{cases} e^x, & x<0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$ Β. $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x<0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη μονοτονία και την μέγιστη τιμή της. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α, το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f με την παραβολή $y = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$ είναι το σημείο $(0, 1)$. (Μονάδες 5)

5.2 ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 7 15687

Δίνεται η παράσταση $A = \log_4 3 + \log_4 \alpha - \log_4 \beta$, όπου α, β θετικοί αριθμοί.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \log_4 \dfrac{3\alpha}{\beta}$ (Μονάδες 13)

β) Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $3\alpha = 16\beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης Α.
(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 8 15816

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2$, $\beta = \ln 4$, $\gamma = \ln 8$.

α) Να αποδείξετε ότι $2\beta = \alpha + \gamma$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\beta + \gamma = 5\alpha$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 9 15817

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2$ και $\beta = \ln 3$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < \alpha < \beta$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\beta - \alpha < 1$. (Μονάδες 13)

Δίνεται $e \simeq 2.71$.

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 10 15251

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + (\alpha - 2)x - 6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x - 1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α. (Μονάδες 6)

β) Για $\alpha = 15$

i) να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : \left(x^2 - 3x + 2\right)$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης. (Μονάδες 6)

ii) αν $P(x) = \left(x^2 - 3x + 2\right)(2x - 3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$. (Μονάδες 7)

iii) να αποδείξετε ότι $P(\ln 2) < 0$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 11 15474

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = e^{\ln e}x^3 + 4x^2 \ln\sqrt{e} + 2$.

α) Να δείξετε ότι $P(x) = ex^3 + 2x^2 + 2$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) με την ευθεία $\varepsilon : y = ex + 4$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα διαστήματα x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) είναι πάνω από την ευθεία $\varepsilon : y = ex + 4$. (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης: $P(e) - e^2 - 4$. (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 12 15822

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + x$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ και $\alpha \neq 0$, το οποίο έχει 3 ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

α) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του P(x). (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 0$. (Μονάδες 6)

γ) Με $\alpha = -1$ και $\beta = 0$,

i) να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$. (Μονάδες 6)

ii) να αποδείξετε ότι $P\left(\log\sqrt{10}\right) > 0$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 13 15823

Ένα πολυώνυμο P(x) διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2 - 1$ δίνει πηλίκο $3x - 2$ και υπόλοιπο 1.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 1$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $P(\log 5) \neq 1$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (–1,0). (Μονάδες 5)

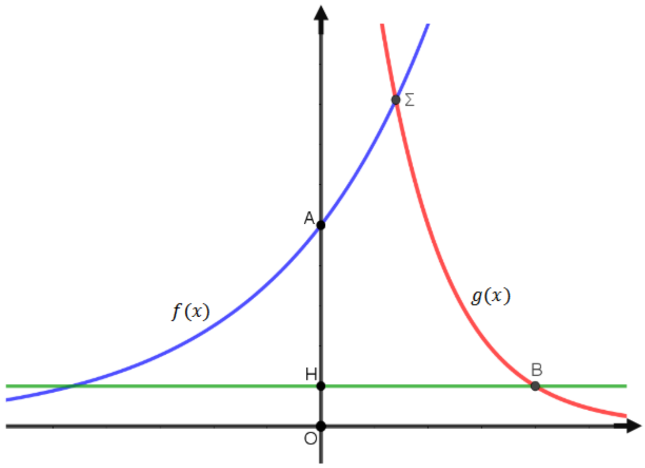
ΘΕΜΑ 14 15392

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$ και $g(x) = 5^{1-x}$, $x \in$ IR. Μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x΄x τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $H\left(0, \frac{1}{5}\right)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Σ. (Μονάδες 10)

γ) Αν είναι x_B, x_Σ οι τετμημένες των σημείων Β,Σ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $x_B - x_\Sigma = \log 20$. (Μονάδες 7)



5.3 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 15 21473

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $\mathrm{A}=\ln x+\ln(x+6)$. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση : $\ln x+\ln(x+6)=\ln 7$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 16 21472

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(x+1)=\ln(2x)$. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(x+1)>\ln(2x)$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 17 21450

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x^2+4)$ και $g(x)=\ln x+\ln 4$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 18 21449

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 10)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y=\ln x$. (Μονάδες 7)

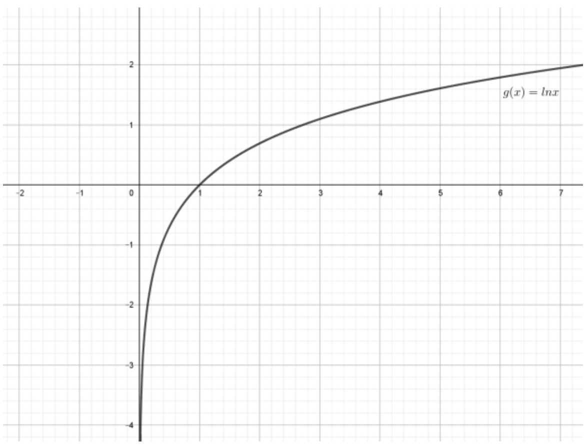
ΘΕΜΑ 19 15808

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 8)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\ln x$.



Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $f(x)=\ln(x+2)$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 20 17318

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(3)$. (Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $ln3 + 3ln2 - f(3) = ln4$. (Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = ln4$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 21 15675

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 22 15267

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = 1 + \log 3 - \log 6$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται $\log(x^2 + 1) = \log 5$. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 23 15676

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx'.
(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον xx'.
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 24 21445

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log\dfrac{4^x - 1}{2^x + 5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log 3 - \log 7$. (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \log 3 - \log 7$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 25 15093

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = log(10^x - 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.
(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x΄x$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) + x = log(10^{2x} - 10^x)$, $x > 0$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = -x$. (Μονάδες 6)

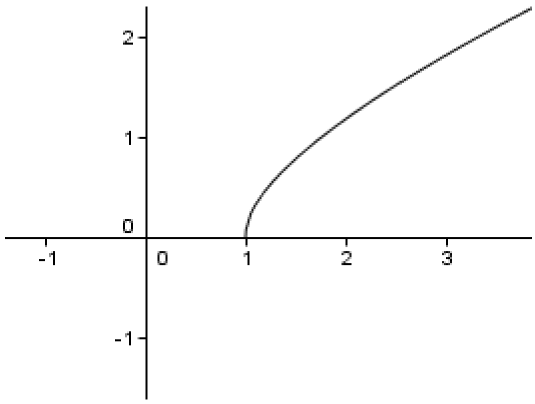
ΘΕΜΑ 26 16001

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x\ln x}$ και $g(x)=\sqrt{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους. (Μονάδες 4)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω. (Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f.



γ) i. Να βρείτε τη μονοτονία της. (Μονάδες 4)

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$. (Μονάδες 5)

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y=1-x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x)=1-x$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 27 15690

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2,\ x\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)=\ln x$. (Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2,\ x\neq 0$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y=2$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 28 21446

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-2\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+x=3\ln 2$. (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)+x\geq 3\ln 2$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 29 15679

Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A}=\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}\right)$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{\omega^2-1}{\omega-3}>0$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\mathrm{A}=-\ln 3$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 30 15015

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2-2x$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x-\ln^2 x-2\ln x=0$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x-\ln^2 x-2\ln x>0$. (Μονάδες 10)

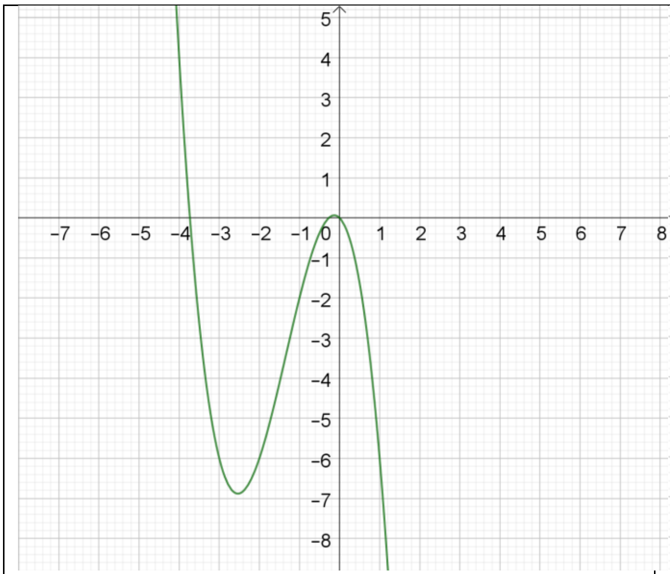
ΘΕΜΑ 31   15678

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$.

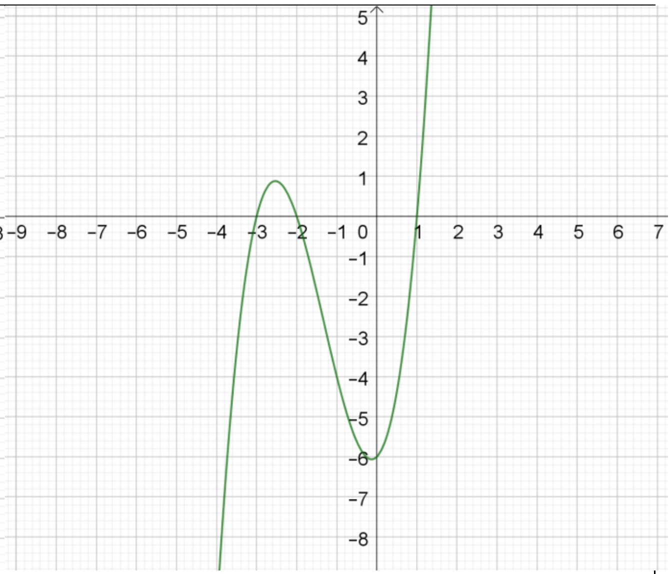
α) Να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{P}(x) < 0$. (Μονάδες 10)

β) Από τα παρακάτω σχήματα, ένα μόνο μπορεί να αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $\mathrm{P}(x)$. Να βρείτε ποιο αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

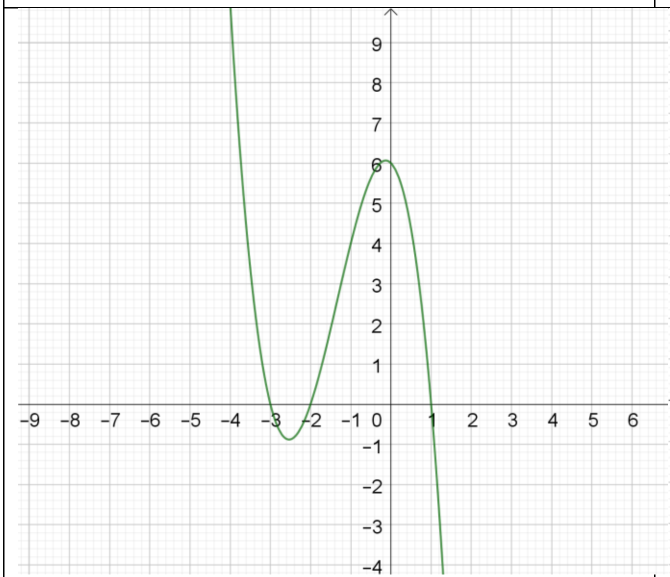
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathrm{P}(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$. (Μονάδες 8)



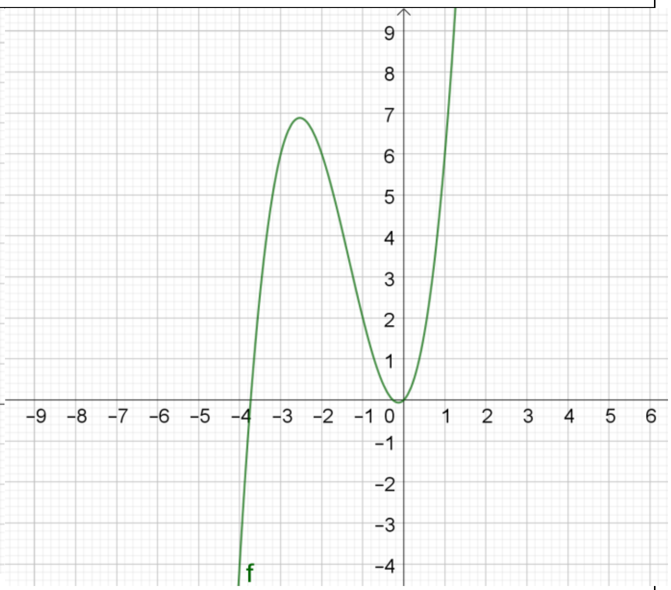
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

ΘΕΜΑ 32 15694

Στην Αστρονομία, οι αστέρες ταξινομούνται ανάλογα με την λαμπρότητα τους με βάση την σχέση $m - M = 5 \cdot log\left(\frac{d}{10}\right)$, (I) όπου d η απόσταση του αστέρα από τον παρατηρητή, m είναι το φαινόμενο μέγεθός τους (το πόσο λαμπροί φαίνονται) και M το απόλυτο μέγεθός τους. Το απόλυτο μέγεθος ορίζεται να είναι το φαινόμενο μέγεθος σε απόσταση 10 parsec από τον παρατηρητή, όπου 1 parsec είναι η μονάδα μέτρησης της απόστασης d και ισούται με $3{,}26$ έτη φωτός $= 30{,}9 \cdot 10^{12} Km$.

α) Για ποιες τιμές της απόστασης d το φαινόμενο μέγεθος ενός αστέρα είναι μικρότερο από το απόλυτο μέγεθός του; (Μονάδες 7)

β) Ένας αστέρας έχει φαινόμενο μέγεθος $m = 1{,}157$ και βρίσκεται σε απόσταση $d = 100$ parsec από έναν παρατηρητή. Ποιο είναι το απόλυτο μέγεθος αυτού του αστέρα;

(Μονάδες 6)

γ) Να επιλύσετε την σχέση (I) ως προς d. (Μονάδες 7)

δ) Ο αστέρας Betelgeuse έχει φαινόμενο μέγεθος $0{,}46$ και απόλυτο μέγεθος $-5{,}14$. Ποια είναι η απόστασή του από τον παρατηρητή; Δίνεται ότι $\sqrt[25]{10^{53}} \cong 131$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 33 21474

Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 λίτρα ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της 1ης και στο τέλος της 2ης εβδομάδας. (Μονάδες 8)

β) Ο όγκος V του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση $V(t) = V_0 \cdot \alpha^t$, όπου V_0 και α σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς V_0 και α.

(Μονάδες 8)

γ) Αν ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη σχέση $V(t) = 10 \cdot (0{,}85)^t$, να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής. (Δίνεται ότι: $\log(0{,}5) \simeq -0{,}3$ και $\log(0{,}85) \simeq -0{,}07$). (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 34 21447

Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο

$$P(t) = 200 \cdot e^{ct},$$

Όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος ($t = 0$). Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328.

(Δίνεται ότι $\ln(1{,}64) \cong 0{,}5$ και $\ln 10 \cong 2{,}3$)

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $c = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 35 21470

Μια ποσότητα Q ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου *t* (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t)=Q_0\cdot e^{ct}$. Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας και μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό.

α) Να δείξετε ότι $Q(t)=Q_0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε (για $t=0$). (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.
(Μονάδες 9)