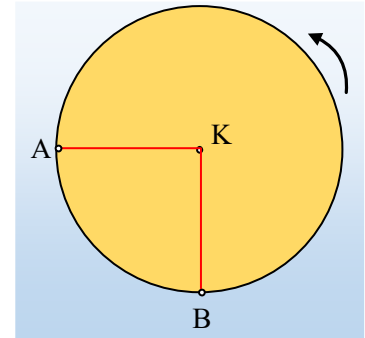


Ομαλή στροφοκική κίνηση και το σπάσιμο του άξονα

Ο δίσκος του σχήματος με ακτίνα $R=4\text{m}$, στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega=(\pi/2)\text{rad/s}$ γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο του K . Δύο σημεία A και B βρίσκονται στα άκρα δύο καθέτων ακτινών και σε μια στιγμή, την οποία παίρνουμε ως αρχή μέτρησης των χρόνων ($t_0=0$), βρίσκονται στις θέσεις που φαίνονται στο σχήμα, όπου η ακτίνα AK είναι οριζόντια.



- i) Να βρεθούν οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις των σημείων A και B τη στιγμή $t=0$.
- ii) Τη χρονική στιγμή $t_1=4,6\text{s}$ ο άξονας περιστροφής σπάει, με αποτέλεσμα ο δίσκος να πέφτει ελεύθερα, Για την στιγμή $t_2=5\text{s}$, ζητούνται:
 - a) Οι θέσεις των σημείων A και B .
 - β) Οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις των δύο σημείων.

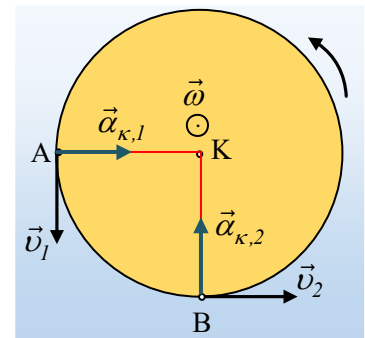
Δίνεται ότι το επίπεδο του δίσκου είναι πάντα κατακόρυφο και ότι η γωνιακή ταχύτητά του παραμένει σταθερή, μετά το σπάσιμο του άξονα, ενώ $g=10\text{m/s}^2$ και $\pi^2 \approx 10$.

Απάντηση:

- i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα διανύσματα των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων των σημείων A και B , τη στιγμή $t_0=0$. Για τα μέτρα τους έχουμε:

$$v_1 = v_2 = \omega R = \frac{\pi}{2} \cdot 4\text{m/s} = 2\pi \text{ m/s} \approx 6,28\text{m/s}$$

$$a_{\kappa,1} = a_{\kappa,2} = \omega^2 R = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 4\text{m/s}^2 = \pi^2\text{m/s}^2 \approx 10\text{m/s}^2.$$



- ii) Μόλις σπάσει ο άξονας ο δίσκος θα εκτελέσει μια κατακόρυφη μεταφορική κίνηση (ελεύθερη πτώση), ενώ θα συνεχίσει να περιστρέφεται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Άρα η κίνησή του είναι σύνθετη, την οποία θα μελετήσουμε ως δύο ανεξάρτητες κινήσεις, μια μεταφορική και μια στροφοκική γύρω από νοητό οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο K του δίσκου.

Η μεταφορική κίνηση του δίσκου είναι ελεύθερη πτώση για την οποία ισχύουν οι εξισώσεις:

$$v_{cm} = g \cdot \Delta t \quad \Delta y = \frac{1}{2} g (\Delta t)^2$$

Με αντικατάσταση $\Delta t = t_2 - t_1 = 5\text{s} - 2,6\text{s} = 0,4\text{s}$, παίρνουμε:

$$v_{cm} = g \cdot \Delta t = 10 \cdot 0,4\text{m/s} = 4\text{m/s}$$

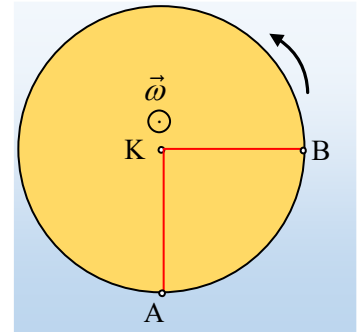
$$\Delta y = \frac{1}{2} g (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} 10 \cdot 0,4^2\text{m} = 0,8\text{m}$$

Ενώ μέχρι τη στιγμή t_2 ο δίσκος, εκτελώντας ομαλή στροφική κίνηση, έχει περιστραφεί κατά:

$$\Delta\theta = \omega \cdot t_2 = \frac{\pi}{2} \cdot 5 \text{rad} = \frac{5\pi}{2} \text{rad} = \left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \text{rad}$$

Έχει δηλαδή κάνει μια πλήρη περιστροφή και το $\frac{1}{4}$ της περιστροφής.

α) Με βάση τα παραπάνω, τη στιγμή t_2 , το κέντρο K του δίσκου έχει κατέβει κατακόρυφα κατά 0,8m, ενώ ταυτόχρονα ο δίσκος έχει περιστραφεί, με αποτέλεσμα τα σημεία A και B να βρίσκονται στις θέσεις που φαίνονται στο διπλανό σχήμα, όπου τώρα η ακτίνα KB είναι οριζόντια.



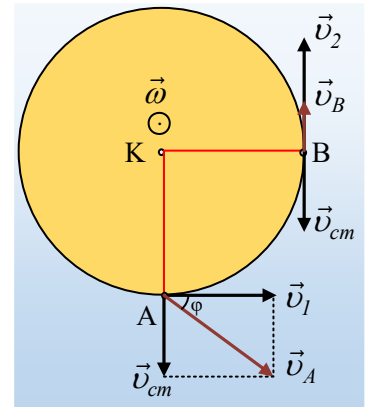
β) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι ταχύτητες των σημείων A και B ως το διανυσματικό άθροισμα των ταχυτήτων λόγω της μεταφορικής κίνησης (κοινή ταχύτητα και για τα δύο σημεία v_{cm}) και της ταχύτητας λόγω στροφικής κίνησης, μέτρου $v_1=v_2=6,28\text{m/s}$, όπως και στο i) ερώτημα.

Με βάση το σχήμα, για την ταχύτητα του σημείου A έχουμε:

$$v_A = \sqrt{v_1^2 + v_{cm}^2} = \sqrt{(2\pi)^2 + 4^2} \text{ m/s} = \sqrt{56} \text{ m/s} \approx 7,5 \text{ m/s}$$

Ενώ η κατεύθυνσή της σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία φ , όπου:

$$\epsilon\varphi\varphi = \frac{v_{cm}}{v_1} = \frac{4}{2\pi} \approx 0,64$$



Αντίθετα για το σημείο B, η ταχύτητα είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω και μέτρο:

$$v_B = v_2 - v_{cm} = 6,28 \text{ m/s} - 4 \text{ m/s} = 2,28 \text{ m/s}$$

Με την ίδια συλλογιστική κάθε σημείο έχει επιτάχυνση ίση με το διανυσματικό άθροισμα της κεντρομόλου επιτάχυνσης, λόγω τη στροφικής κίνησης και της επιτάχυνσης της βαρύτητας, λόγω μεταφορικής κίνησης, με κατευθύνσεις όπως στο σχήμα.

Αλλά τότε για το σημείο A θα έχουμε:

$$\alpha_A = \alpha_{\kappa,1} - \alpha_{cm} = 10 \text{ m/s}^2 - 10 \text{ m/s}^2 = 0$$

Ενώ η επιτάχυνση του σημείου B έχει μέτρο:

$$\alpha_B = \sqrt{\alpha_{2,\kappa}^2 + \alpha_{cm}^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} \text{ m/s}^2 = 10\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

Ενώ η διεύθυνσή της σχηματίζει με την οριζόντια ακτίνα γωνία $\rho=45^\circ$, αφού το παραλληλόγραμμο των επιταχύνσεων, το οποίο σχεδιάσαμε είναι τετράγωνο.

