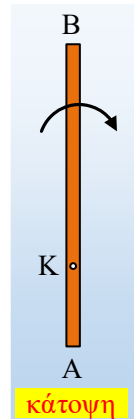


Μια επιταχυνόμενη κίνηση ράβδου

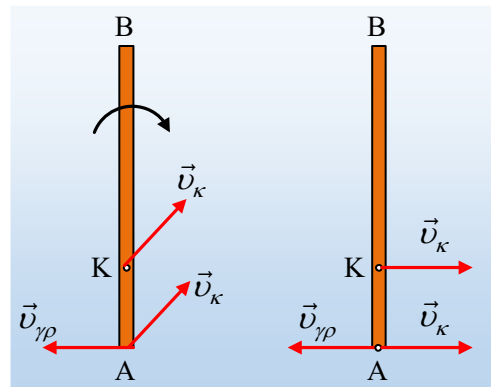
Η ράβδος AB του σχήματος, μήκους $\ell=2\text{m}$ κινείται οριζόντια πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, στρεφόμενη με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω , γύρω από κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος περνά από το σημείο K, όπου $(AK)=\frac{1}{4}\ell$, με φορά των δεικτών του ρολογιού. Ο άξονας z κινείται ευθύγραμμα και θεωρώντας την στιγμή που η ράβδος βρίσκεται στη θέση του σχήματος, ως αρχή μέτρησης των χρόνων ($t_0=0$), η ταχύτητα του άξονα μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο, σύμφωνα με την εξίσωση $v_K=1+(2/\pi)t$ (S.I.). Αν τη στιγμή $t=0$ το άκρο A της ράβδου έχει μηδενική ταχύτητα, να βρεθούν:



- Η κατεύθυνση της ταχύτητας του άξονα z.
- Η ταχύτητα του άκρου B, τη στιγμή $t_0=0$.
- Η ταχύτητα και η μετατόπιση του άκρου A, μόλις η ράβδος ολοκληρώσει μια περιστροφή, τη στιγμή t_1 .
- Η ταχύτητα του άκρου B τη χρονική στιγμή $t_2=(5\pi/4)$ s.

Απάντηση:

- Έστω ότι η ταχύτητα του άξονα z, ίση με την ταχύτητα του σημείου K, είναι αυτή του πρώτου από τα διπλανά σχήματα. Η ράβδος, εκτελεί μια σύνθετη κίνηση, την οποία μελετάμε ως σύνθεση μιας μεταφορικής κίνησης, με ταχύτητα ίση με αυτή του άξονα $\vec{v}_K$ και μια περιστροφική γύρω από τον άξονα z, με γωνιακή ταχύτητα ω . Αλλά τότε το άκρο A θα έχει την ταχύτητα του άξονα $\vec{v}_K$ και μια ταχύτητα $\vec{v}_{\gamma\rho}$ κάθετη στην



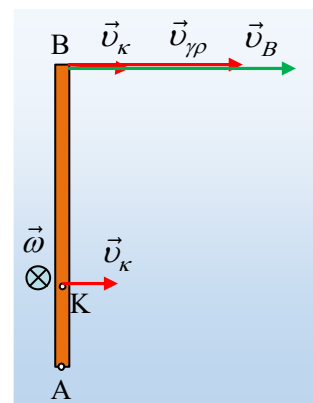
ράβδο με μέτρο $v_{\gamma\rho}=\omega \cdot (AK)$. Για να έχει όμως μηδενική ταχύτητα το σημείο A, θα πρέπει οι δυο αυτές ταχύτητες να είναι αντίθετες, πράγμα που σημαίνει ότι η κατάσταση είναι αυτή που φαίνεται στο δεύτερο σχήμα, η ταχύτητα δηλαδή του άξονα, τη στιγμή $t=0$, είναι κάθετη στη ράβδο, με φορά προς τα δεξιά, ως το πούμε στη διεύθυνση x.

- Με βάση τα παραπάνω:

$$\vec{v}_A = 0 \rightarrow v_K = v_{\gamma\rho} \rightarrow \omega \frac{\ell}{4} = v_K \rightarrow$$

$$\omega = \frac{4v_K}{\ell} = \frac{4 \cdot 1}{2} \text{ rad/s} = 2 \text{ rad/s}$$

Οπότε, με βάση το διπλανό σχήμα η ταχύτητα του άκρου B, είναι κάθετη στην ράβδο, με φορά προς τα δεξιά και μέτρο:



$$v_B = v_K + v_{\gamma\rho} = v_K + \omega \cdot \frac{3\ell}{4} \rightarrow$$

$$v_B = 1 \text{ m/s} + 2 \cdot \frac{3 \cdot 2}{4} \text{ m/s} = 4 \text{ m/s}$$

iii) Η περίοδος περιστροφής της ράβδου είναι ίση:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} \text{ s} = \pi \text{ s}$$

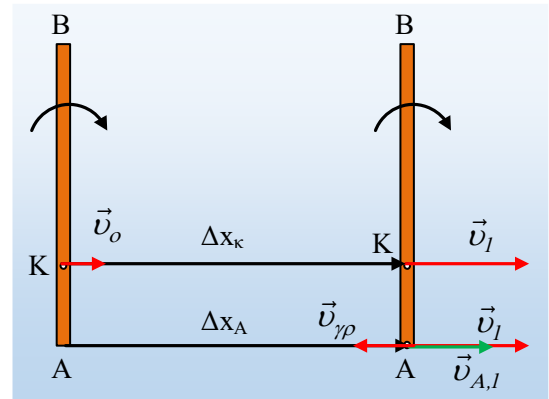
Με βάση την εξίσωση $v_K = 1 + (2/\pi)t$ προκύπτει ότι ο άξονας κινείται ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενα με επιτάχυνση $a = (2/\pi) \text{ m/s}^2$, οπότε σε χρόνο μιας περιόδου ο άξονας μετατοπίζεται ευθύγραμμα στην διεύθυνση x, κατά:

$$\Delta x_K = v_o t + \frac{1}{2} a t^2 = \left(1 \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \pi^2 \right) \text{ m} = 2\pi \text{ m} = 6,28 \text{ m}$$

Έχοντας αποκτήσει ταχύτητα v_1 :

$$v_1 = 1 + \frac{2}{\pi} t_1 = \left(1 + \frac{2}{\pi} \cdot \pi \right) \text{ m/s} = 3 \text{ m/s}$$

Στο σχήμα βλέπουμε τις θέσεις της ράβδου τις στιγμές $t=0$ και $t_1=T$, από όπου παρατηρούμε ότι η μετατόπιση του άξονα είναι ίση και με την μετατόπιση του άκρου A της ράβδου, δηλαδή $\Delta x_A = \Delta x_K = 6,28 \text{ m}$.



Όσον αφορά την ταχύτητα του άκρου A, τη στιγμή t_1 , θα έχουμε:

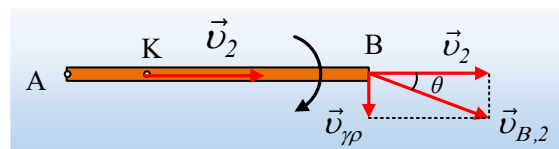
$$v_{A,1} = v_1 - v_{\gamma\rho} = v_1 - \omega \frac{\ell}{4} = 3 \text{ m/s} - 2 \cdot \frac{2}{4} \text{ m/s} = 2 \text{ m/s}$$

iv) Τη χρονική στιγμή t_2 , η ράβδος έχει περιστραφεί κατά:

$$\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t = \omega \cdot t_1 = 2 \cdot \frac{5\pi}{4} \text{ rad} = 2,5\pi \text{ rad} = \left(2\pi + \frac{\pi}{2} \right) \text{ rad}$$

Δηλαδή η θέση της ράβδου είναι όπως στο σχήμα.

Τη στιγμή αυτή ο άξονας έχει ταχύτητα:



$$v_2 = 1 + \frac{2}{\pi} t_2 = \left(1 + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{4} \right) \text{ m/s} = 3,5 \text{ m/s}$$

Οπότε για την ταχύτητα του άκρου B, με βάση το σχήμα, θα έχουμε:

$$v_{B,2} = \sqrt{v_2^2 + \left(\omega \frac{3\ell}{4} \right)^2} = \sqrt{3,5^2 + 3^2} \text{ m/s} \approx 4,6 \text{ m/s} \text{ και}$$

$$\varepsilon_{\varphi\theta} = \frac{v_{\gamma\rho}}{v_2} = \frac{3}{3,5} = \frac{6}{7}$$

Σχόλιο.

Η παραπάνω κίνηση της ράβδου, προφανώς δεν είναι κίνηση ελεύθερου στερεού! Θα μπορούσαμε για παράδειγμα να δώσουμε το παρακάτω:

Ένα φορτηγό κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση, ενώ στην καρότσα του έχουμε στερεώσει μια κατακόρυφη σωλήνα- άξονα, γύρω από τον οποίο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα η ράβδος, διαγράφοντας οριζόντιο επίπεδο...

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης