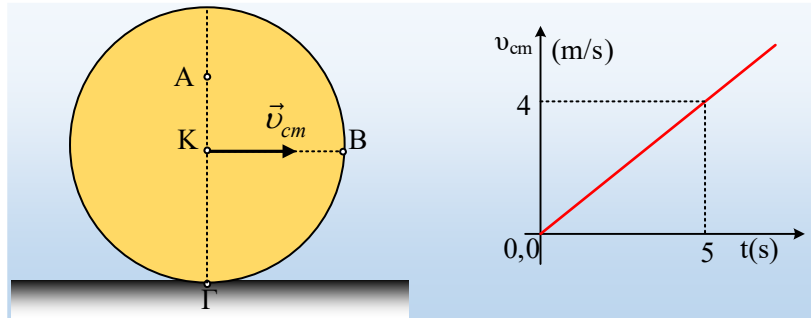


Ένας επιταχυνόμενος δίσκος και οι επιταχύνσεις σημείων

Ένας λεπτός δίσκος, ακτίνας $R=0,8\text{m}$ αρχικά ακίνητος σε οριζόντιο επίπεδο, δέχεται κατάλληλη δύναμη οπότε αρχίζει να κυλιέται (χωρίς να ολισθαίνει). Στο πρώτο σχήμα βλέπετε τον κυλιόμενο δίσκο, ενώ στο δεύτερο δίνεται η ταχύτητα του κέντρου του K (και κέντρου μάζας του), σε συνάρτηση με το χρόνο.



- i) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του κέντρου K , καθώς και η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου.
- ii) Να υπολογιστεί η οριζόντια επιτάχυνση του σημείου A , πάνω στην κατακόρυφο διάμετρο, το οποίο απέχει κατά $(KA)=r=0,4\text{m}$ από το κέντρο του δίσκου.
- iii) Να βρεθεί ποια χρονική στιγμή t_1 το σημείο B , στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας, έχει κατακόρυφη επιτάχυνση. Πόση είναι τη στιγμή αυτή η επιτάχυνση του σημείου Γ , στο άκρο της κατακόρυφης ακτίνας, σημείο επαφής με το οριζόντιο επίπεδο;

Απάντηση:

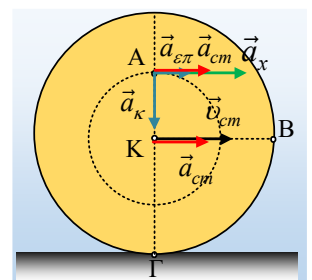
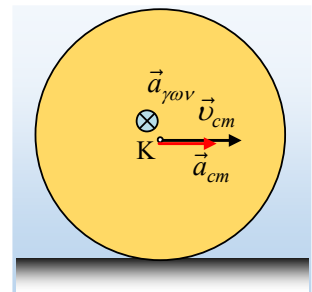
- i) Θεωρούμε την κίνηση του δίσκου σύνθετη, μια μεταφορική και μια περιστροφική γύρω από οριζόντιο νοητό άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο του K . Με βάση το διάγραμμα για την ταχύτητα του κέντρου K του δίσκου, συμπεραίνουμε ότι η μεταφορική κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με επιτάχυνση κέντρου μάζας, ίδιας κατεύθυνσης με την ταχύτητα και μέτρου:

$$a_{cm} = a_K = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4}{5} \text{ m/s}^2 = 0,8 \text{ m/s}^2.$$

Αλλά αφού ο δίσκος κυλιέται, τότε και η στροφική του κίνηση είναι επιταχυνόμενη με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, με διεύθυνση αυτή του άξονα και φορά όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} R \rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{R} = \frac{0,8}{0,8} \text{ rad/s}^2 = 1 \text{ rad/s}^2.$$

- ii) Το σημείο A έχει την επιτάχυνση του κέντρου K του δίσκου a_{cm} , λόγω μεταφορικής κίνησης και έχει επίσης επιτάχυνση, λόγω της κυκλικής κίνησής του γύρω από το K . Η δεύτερη όμως αναλύεται σε δύο συνιστώσες μια οριζόντια, εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά, η οποία μεταβάλλει το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας (της ταχύτητας λόγω της κυκλικής κίνησης), την οποία ονομάζουμε



επιτρόχια επιτάχυνση $a_{\varepsilon\pi}$ και μια στην διεύθυνση της ακτίνας, η οποία μεταβάλλει την διεύθυνση της (γραμμικής) ταχύτητας, a_{κ} την οποία ονομάζουμε κεντρομόλο. Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί τα διανύσματα και των τριών. Αλλά για το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας, σε μια κυκλική κίνηση έχουμε:

$$a_{\varepsilon\pi} = \frac{dv_{\gamma\rho}}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r = a_{\gamma\omega\nu} r$$

Με βάση αυτά στην οριζόντια διεύθυνση, το σημείο A έχει επιτάχυνση, με κατεύθυνση προς τα δεξιά και μέτρο:

$$\alpha_x = a_{cm} + a_{\varepsilon\pi} = a_{cm} + a_{\gamma\omega\nu} r \rightarrow$$

$$\alpha_x = 0,8 m/s^2 + 1 \cdot 0,4 m/s^2 = 1,2 m/s^2.$$

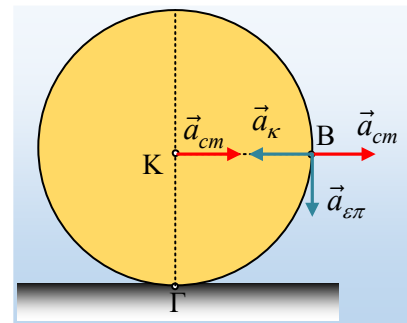
Ας επισημανθούν δύο σημεία:

- Η παραπάνω επιτάχυνση είναι σταθερή και ανεξάρτητη του χρόνου.
- Είναι η επιτάχυνση του εκάστοτε σημείου του δίσκου, που θα βρεθεί στην θέση του σημείου A!

iii) Με την ίδια λογική που σχεδιάσαμε τις επιταχύνσεις του σημείου A, μπορούμε να σχεδιάσουμε και τις επιταχύνσεις του σημείου B, όπως στο σχήμα. Αν όμως τελικά η επιτάχυνση του B είναι κατακόρυφη, αυτό σημαίνει ότι:

$$\alpha_{cm} - a_K = 0 \rightarrow a_K = \alpha_{cm} \rightarrow \omega^2 R = a_{cm} \rightarrow$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{a_{cm}}{R}} = \sqrt{\frac{0,8}{0,8}} \text{ rad/s} = 1 \text{ rad/s}$$



Όμως κατ' αναλογία της εξίσωσης $v=at$, μπορούμε να γράψουμε:

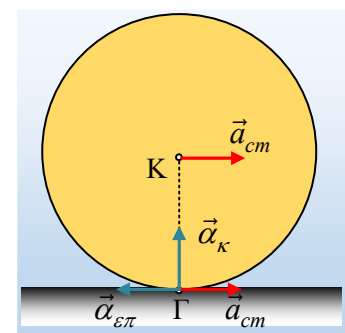
$$\omega = a_{\gamma\omega\nu} t \rightarrow t_1 = \frac{\omega_1}{a_{\gamma\omega\nu}} = \frac{1}{1} s = 1 s$$

Ερχόμαστε τώρα στο σημείο επαφής του δίσκου με το οριζόντιο επίπεδο, σημείο Γ. Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι αντίστοιχες (όπως παραπάνω) επιταχύνσεις. Για το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης ισχύει:

$$a_{\varepsilon\pi} = a_{\gamma\omega\nu} R = a_{cm}$$

Οπότε η ολική οριζόντια επιτάχυνση είναι:

$$a_x = a_{cm} - a_{\varepsilon\pi} = 0$$



Αλλά τότε η συνολική επιτάχυνση του σημείου Γ είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση, με κατακόρυφη διεύθυνση και μέτρο $a_{\kappa} = a_{cm} = 0,8 m/s^2$, αντίθετη της επιτάχυνσης του σημείου B!

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονόσης Μάργαρης