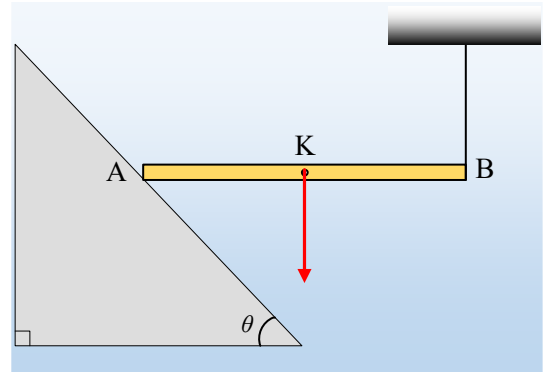


Η ισορροπία και η κίνηση μιας ράβδου

Στο σχήμα βλέπετε μια οριζόντια ομογενή ράβδο AB μήκους 2m και βάρους 100N, όπου το άκρο της A στηρίζεται σε κεκλιμένο επίπεδο, κλίσεως θ ($\eta\mu\theta=0,8$), ενώ το άλλο της άκρο B είναι δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου, μη εκτατού νήματος.

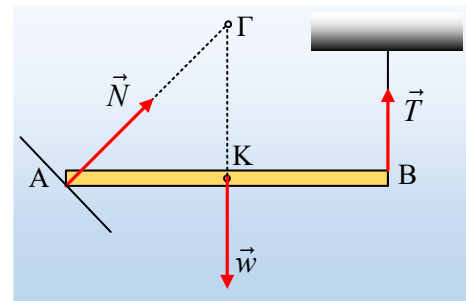


- i) Υποστηρίζεται ότι αν το επίπεδο είναι λείο, η εικόνα δείχνει μια ράβδο σε ισορροπία. Να εξετάσετε αν αυτό μπορεί να συμβαίνει.
- ii) Αν το επίπεδο δεν είναι λείο και η ράβδος ισορροπεί, να υπολογιστεί η τριβή που ασκείται στη ράβδο.
- iii) Αν η ράβδος έχει αφεθεί να κινηθεί, σε επαφή με το επίπεδο και τη στιγμή που η ράβδος βρίσκεται στη θέση του σχήματος το άκρο της B έχει ταχύτητα μέτρου $v_1=3\text{m/s}$, με το νήμα τεντωμένο, ζητούνται για την θέση αυτή:
 - α) Ποια η διεύθυνση της ταχύτητας του B;
 - β) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του άκρου A της ράβδου.
 - γ) Η ταχύτητα (v_{cm}) του μέσου K της ράβδου καθώς και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της.

Απάντηση:

- i) Αν το επίπεδο είναι λείο, τότε στη ράβδο ασκούνται οι δυνάμεις που φαίνονται στο διπλανό σχήμα, όπου N η κάθετη αντίδραση του επιπέδου. Αλλά τότε ως προς το σημείο Γ, σημείο τομής των φορέων της N και του βάρους, με την υπόθεση ότι η ράβδος ισορροπεί, θα ισχύει:

$$\Sigma\tau=0 \rightarrow N \cdot 0 + w \cdot 0 + T \cdot d = 0$$



Πράγμα άτοπο. Άρα η ράβδος δεν μπορεί να ισορροπεί, αν το επίπεδο είναι λείο.

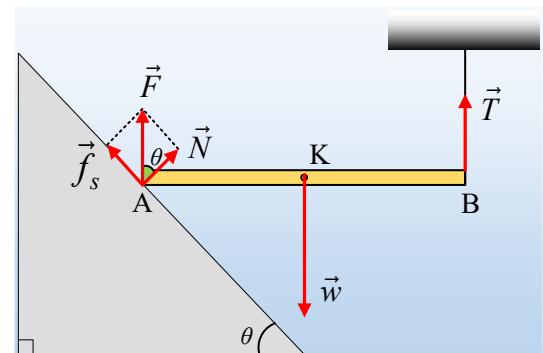
Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να δουλέψουμε με τη συνισταμένη δύναμη και τη συνθήκη $\Sigma F=0$. Εδώ όμως η N θα μας δώσει μια οριζόντια συνιστώσα, οπότε $\Sigma F_x \neq 0$ και η ράβδος δεν ισορροπεί.

- ii) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις, στην περίπτωση που η ράβδος ισορροπεί ενώ πάνω της ασκείται δύναμη $\vec{F}$ από το κεκλιμένο επίπεδο. Από τη συνθήκη ισορροπίας της ράβδου παίρνουμε:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma \tau = 0 \quad (2)$$

Η (1) γράφεται:

$$\vec{F} + \vec{T} + \vec{w} = 0 \rightarrow \vec{F} = -(\vec{T} + \vec{w})$$



Αλλά αφού βάρος και τάση του νήματος είναι κατακόρυφες και η δύναμη F , ως αντίθετη της συνισταμένης τους, είναι επίσης κατακόρυφη.

Ερχόμαστε τώρα στην (2) παίρνοντας το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς το άκρο B:

$$w \cdot \frac{\ell}{2} - F \cdot \ell = 0 \rightarrow F = \frac{w}{2} = \frac{100N}{2} = 50N$$

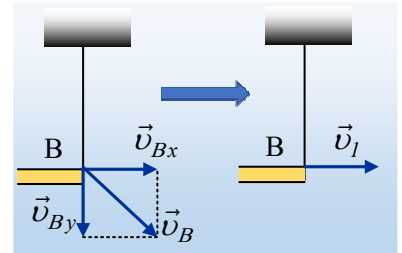
Οπότε για το μέτρο της ασκούμενης τριβής f_s (η συνιστώσα της F η παράλληλη στο επίπεδο) έχουμε:

$$f_s = F \cdot \eta \mu \theta = 50N \cdot 0,8 = 40N$$

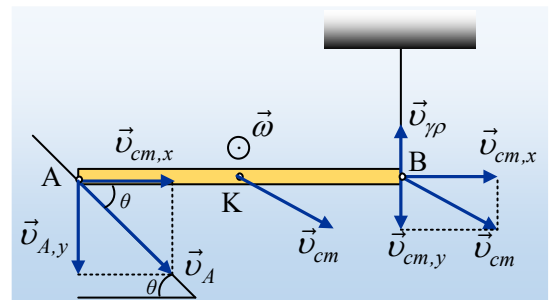
Εναλλακτικά θα μπορούσε κάποιος να αναλύσει την τριβή και την N σε συνιστώσες, μια οριζόντια και μια κατακόρυφη, δουλεύοντας με άξονες και την ισορροπία $\Sigma F_x = 0$ και $\Sigma F_y = 0$.

iii) α) Εστω ότι η ταχύτητα του άκρου B είναι η v_B , όπως στο πρώτο σχήμα.

Τότε αναλύοντάς την σε μια οριζόντια και μια κατακόρυφη συνιστώσα, θα είχαμε το άκρο του νήματος να έχει στην κατακόρυφη διεύθυνση ταχύτητα ίση με v_{By} , πράγμα που θα μπορούσε να συμβεί μόνο αν αυξανόταν το μήκος του, πράγμα αδύνατο. Με την ίδια λογική η ταχύτητα του άκρου B δεν θα μπορούσε να ήταν πλάγια με φορά προς τα πάνω, αφού το νήμα θα χαλάρωνε. Δεν μένει παρά η ταχύτητα v_1 να είναι οριζόντια, όπως στο δεύτερο σχήμα.

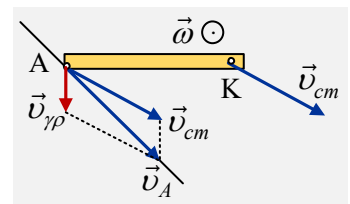


β) Στο διπλανό σχήμα έχει σημειωθεί η ταχύτητα του μέσου της ράβδου K ($v_K = v_{cm}$), καθώς και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου, αντίθετη από την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, θεωρώντας την κίνηση σύνθετη. Αλλά τότε η ταχύτητα του άκρου B θα προκύψει ως το διανυσματικό άθροισμα της v_{cm} και της $v_{\gamma\rho}$, κάθετης στη ράβδο όπως στο σχήμα. Αλλά αφού η ταχύτητα του άκρου B είναι οριζόντια θα ισχύει:



$$v_{cmx} = v_1 = 3m/s \quad \text{και} \quad v_{cmy} = v_{\gamma\rho} = \omega \frac{\ell}{2} \quad (1)$$

Εξάλλου η ταχύτητα του άκρου A, θα έχει την διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου (το άκρο A γλιστράει πάνω στο επίπεδο), ενώ θα είναι ίση με το διανυσματικό άθροισμα $\vec{v}_A = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma\rho}$. Η οριζόντια συνιστώσα της v_A , δεν είναι άλλη παρά η συνιστώσα που οφείλεται στην κίνηση του κέντρου μάζας η v_{cmx} , ενώ η κατακόρυφη συνιστώσα της έχει μέτρο:



$$v_{Ay} = v_{cmy} + v_{\gamma\rho} = v_{cmy} + \omega \frac{\ell}{2} \xrightarrow{(1)} v_{Ay} = 2v_{cmy} \quad (2) \rightarrow$$

$$\sigma \nu \theta = \frac{v_{cmx}}{v_A} \rightarrow v_A = \frac{v_{cmx}}{\sigma \nu \theta} = \frac{v_1}{\sigma \nu \theta} = \frac{3m/s}{0,6} = 5m/s$$

γ) Για την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας του άκρου Α, θα έχουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{v_{Ay}}{v_A} \rightarrow v_{Ay} = v_A \cdot \eta\mu\theta = 5\text{ m/s} \cdot 0,8 = 4\text{ m/s} \xrightarrow{(2)}$$

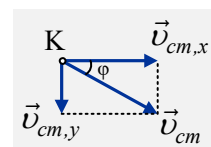
$$2v_{cmy} = 4\text{ m/s} \rightarrow v_{cmy} = 2\text{ m/s} \xrightarrow{(1)}$$

$$\omega = \frac{2v_{cmy}}{\ell} = \frac{2 \cdot 2}{2} \text{ rad/s} = 2\text{ rad/s}$$

Με βάση δε το Π.Θ. για το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας Κ, θα έχουμε:

$$v_{cm} = \sqrt{v_{cmx}^2 + v_{cmy}^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} \text{ m/s} = \sqrt{13} \text{ m/s} \text{ ενώ}$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{v_{cmy}}{v_{cmx}} = \frac{2}{3}$$



Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονόσης Μάργαρης