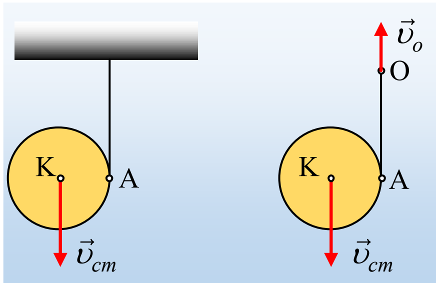
Η σύνθετη κίνηση ενός γιο- γιο!



Γύρω από έναν κύλινδρο ακτίνας R=0,1m τυλίγουμε ένα νήμα, το άλλο άκρο του οποίου δένουμε στο ταβάνι. Αφήνουμε τον κύλινδρο να πέσει, όποτε έχουμε τη δημιουργία ενός γιο-γιο, το οποίο στρέφεται αριστερόστροφα, ενώ πέφτει κατακόρυφα και σε μια στιγμή το κέντρο Κ του κυλίνδρου, έχει ταχύτητα μέτρου υ_{cm}=2m/s.

i) Για την θέση αυτή να υπολογιστούν:

α) Η ταχύτητα του σημείου Α του κυλίνδρου, όπου αρχίζει να ξετυλίγεται το νήμα.

β) Η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου.

γ) Η ταχύτητα του σημείου Β, του αντιδιαμετρικού σημείου του Α.

δ) Η επιτάχυνση του σημείου Α.

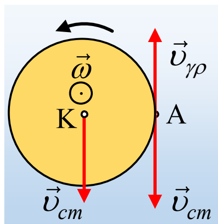
ii) Ελευθερώνουμε το νήμα από το ταβάνι και πιάνουμε με το χέρι μας το άκρο Ο του νήματος. Αφήνουμε ξανά τον κύλινδρο να πέσει, ενώ τραβάμε προς τα πάνω το άκρο Ο του νήματος. Τη στιγμή που ξανά το κέντρο Κ του κυλίνδρου έχει ταχύτητα υ_{cm}=2m/s, με φορά προς τα κάτω, έχει και κατακόρυφη επιτάχυνση α_{cm}=4m/s^2, επίσης με φορά προς τα κάτω, το άκρο Ο του νήματος έχει ταχύτητα προς τα πάνω με μέτρο υ_o=4m/s (η ταχύτητα που κινούμε το χέρι μας) και επιτάχυνση α_o=8m/s^2 με κατεύθυνση επίσης προς τα πάνω. Για τη στιγμή αυτή:

α) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου.

β) Να υπολογισθεί η ταχύτητα και η κατακόρυφη επιτάχυνση του σημείου Β, του αντιδιαμετρικού σημείου του Α.

Απάντηση:

i) Θεωρούμε την κίνηση του κυλίνδρου (γιο-γιο) σύνθετη. Μια μεταφορική, με ταχύτητα ίση με αυτή του κέντρου Κ και μια στροφική, γύρω από νοητό οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, που περνά από το κέντρο μάζας του κυλίνδρου.



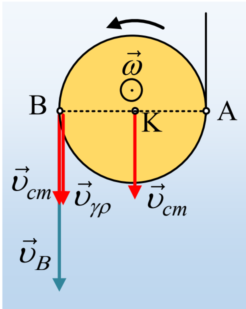
α) Το νήμα παραμένει ακίνητο, συνεπώς και κάθε σημείο του έχει μηδενική ταχύτητα. Αλλά τότε και το σημείο του νήματος που έρχεται σε επαφή με τον κύλινδρο, στο σημείο Α που ξετυλίγεται το νήμα, έχει μηδενική ταχύτητα, ίση και με την ταχύτητα του σημείου Α του κυλίνδρου.

β) Το σημείο Α, λόγω της μεταφορικής κίνησης έχει ταχύτητα ίση με την υ_{cm} του κέντρου του κυλίνδρου, ενώ λόγω της στροφικής κίνησης έχει ταχύτητα $\upsilon_{\gamma\rho}$=ωR, κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω, όπως στο σχήμα.

Αλλά τότε:

$$\upsilon_{\gamma\rho} - \upsilon_{cm} = 0 \rightarrow \omega R = \upsilon_{cm} \rightarrow$$

$$\omega = \frac{\upsilon_{cm}}{R} = \frac{2}{0,1} rad/s = 20 rad/s$$

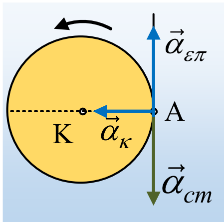


γ) Με την ίδια λογική το αντιδιαμετρικό του Α, σημείο Β, έχει ταχύτητα, λόγω μεταφορικής κίνησης την ταχύτητα υ_{cm} και λόγω της στροφικής κίνησης την $\upsilon_{\gamma\rho}$, ίσου μέτρου, με φορά επίσης προς τα κάτω.

Αλλά τότε η ταχύτητα του σημείου Β είναι κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω και μέτρο:

$$\upsilon_B = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} = 2\upsilon_{cm} = 4m/s.$$

δ) Αλλά και για τις επιταχύνσεις του σημείου Α, ισχύει η αρχή της επαλληλίας. Έτσι έχει μια κατακόρυφη επιτάχυνση ίση με α_{cm}, λόγω μεταφορικής κίνησης, αλλά εκτελεί ταυτόχρονα και μια επιταχυνόμενη κίνηση, με αποτέλεσμα να έχει μια συνιστώσα επιτάχυνση $\vec{a}_{\varepsilon\pi}$, εφαπτόμενη στην τροχιά, υπεύθυνη για την αλλαγή στο μέτρο της γραμμικής ταχύτητας και μια κεντρομόλο επιτάχυνση α_κ, με φορά προς το κέντρο Κ της κυκλικής τροχιάς, όπως στο σχήμα. Για τα **μέτρα** τους έχουμε:

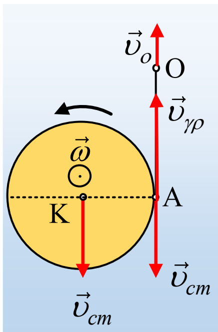


$$\upsilon_{\gamma\rho} - \upsilon_{cm} = 0 \rightarrow \frac{d\upsilon_{\gamma\rho}}{dt} = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} \rightarrow \alpha_{\varepsilon\pi} = \alpha_{cm}$$

$$a_\kappa = \omega^2 R = 20^2 \cdot 0,1 m/s^2 = 40 m/s^2.$$

Έτσι τελικά η επιτάχυνση του σημείου Α, είναι μόνο η οριζόντια επιτάχυνσή του ίση με την α_κ.

ii) Όλα τα σημεία του νήματος έχουν την ίδια επιτάχυνση και την ίδια ταχύτητα με το άκρο του Ο, το σημείο που κινούμε με το χέρι μας. Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι ταχύτητες του σημείου Α, όπου υ_{cm} η ταχύτητα λόγω μεταφορικής και $\upsilon_{\gamma\rho}$ η ταχύτητα λόγω στροφικής κίνησης.



α) Για την ταχύτητα $\upsilon_A = \upsilon_o$ ισχύει:

$$\upsilon_o = \upsilon'_{\gamma\rho} - \upsilon'_{cm} \quad (1)$$

$$\rightarrow \upsilon_o = \omega' R - \upsilon'_{cm} \rightarrow$$

$$\omega' = \frac{\upsilon_o + \upsilon'_{cm}}{R} = \frac{4+2}{0,1} rad/s = 60 rad/s$$

β) Από την εξίσωση (1) παίρνουμε:

$$\upsilon_o = \upsilon'_{\gamma\rho} - \upsilon'_{cm} \quad \rightarrow \frac{d\upsilon_o}{dt} = \frac{d\upsilon'_{\gamma\rho}}{dt} - \frac{d\upsilon'_{cm}}{dt} \rightarrow$$

$$a_o = a'_{\varepsilon\pi} - \alpha'_{cm} \rightarrow$$

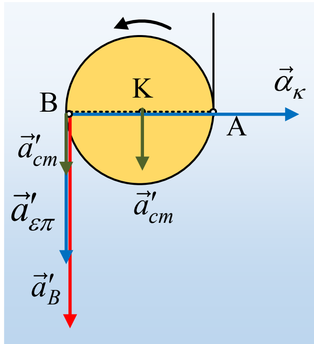
$$a'_{\varepsilon\pi} = a_o + \alpha'_{cm} = 8m/s^2 + 4m/s^2 = 12m/s^2.$$

Όπου $\alpha_{\varepsilon\pi}$ η επιτρόχια επιτάχυνση ενός σημείου στην περιφέρεια του κυλίνδρου, υπεύθυνη για την αλλαγή του μέτρου της γραμμικής του ταχύτητας $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega R$.

Ερχόμενοι τώρα στο σημείο Β, με βάση το σχήμα της ερώτησης i) γ) έχουμε για την ταχύτητά του:

$$\upsilon'_B = \upsilon'_{cm} + \upsilon'_{\gamma\rho} = \upsilon_{cm} + \omega' R = 2m/s + 60 \cdot 0{,}1m/s = 8m/s$$

Με φορά επίσης προς τα κάτω.



Εξάλλου, στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι επιταχύνσεις του σημείου Β, όπου η κεντρομόλος α_κ είναι οριζόντια. Έτσι για το μέτρο της κατακόρυφης επιτάχυνσης του σημείου Β, με φορά προς τα κάτω, θα έχουμε:

$$\alpha'_B = \alpha'_{\varepsilon\pi} + \alpha'_{cm} \rightarrow$$
$$\alpha'_B = 12m/s^2 + 4m/s^2 = 16m/s^2.$$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης