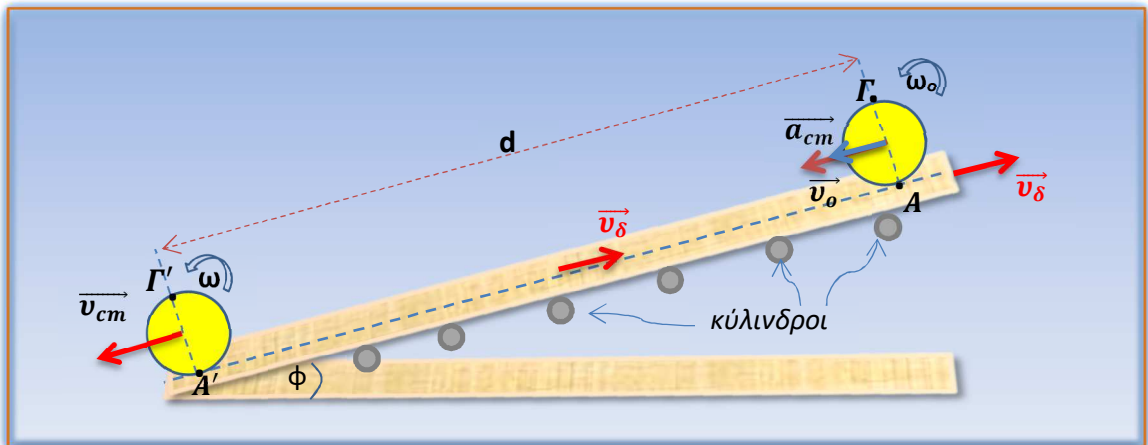


## Κύλιση πάνω σε κυλιόμενο διάδρομο



Σε supermarket υπάρχουν κυλιόμενοι διάδρομοι ανόδου και καθόδου κλίσης  $\phi$  (ημ $\phi=0,6$ , συν $\phi=0,8$ ), που κινούνται με σταθερή ταχύτητα μέτρου  $v_\delta = 1 \text{ m/s}$ , το μήκος τους είναι  $d=8\text{m}$  και κυλίνουν χωρίς ολίσθηση πάνω σε κυλίνδρους σταθερού οριζώντιου άξονα, και η διάμετρός τους είναι  $\delta=6\text{cm}$ . Ένα αγόρι, που αγόρασε μια μπάλα ακτίνας  $R=0,1\text{m}$ , την αφήνει πάνω στο διάδρομο, και αφού ολισθήσει για πολύ λίγο, αρχίζει να κυλάει χωρίς ολίσθηση από ένα σημείο A του **πάνω** άκρου του **διαδρόμου ανόδου**, τη χρονική στιγμή  $t_0=0$  με αρχική γωνιακή ταχύτητα  $\omega_0$  και αρχική ταχύτητα  $u_0=0,4 \text{ m/s}$  του κέντρου της. Παρατηρεί ότι φτάνει στο κάτω άκρο τη χρονική στιγμή  $t=2\text{s}$  διανύοντας το μήκος  $d=8\text{m}$  του διαδρόμου κινούμενη με σταθερή επιτάχυνση του κέντρου της.

1. Ποια σχέση συνδέει τα μέτρα των ταχυτήτων :  $v_A = v_\delta$  του κυλιόμενου διαδρόμου, του κέντρου K της μπάλας  $v_{cm}$  και της γραμμικής ταχύτητας  $v_{γρ.(A)}$ ; Ποια σχέση συνδέει το μέτρο της επιτάχυνσης  $\vec{a}_{cm}$  με το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης  $\vec{a}_{γων.}$  και την ακτίνα  $R$ ; Δικαιολογήστε. Κατόπιν υπολογίστε την αρχική γωνιακή ταχύτητα  $\omega_0$ , το μέτρο της επιτάχυνσης  $\vec{a}_{cm}$  του κέντρου της καθώς και τη γωνιακή επιτάχυνση  $\vec{a}_{γων.}$ .
2. Υπολογίστε την ταχύτητα του κέντρου της  $v_{cm}$  καθώς και την γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  τη στιγμή που φτάνει στο κάτω άκρο του κυλιόμενου διαδρόμου.
3. Υπολογίστε τον αριθμό περιστροφών N της μπάλας, καθώς και του κάθε κυλίνδρου στο χρόνο καθόδου της μπάλας.
4. i) Υπολογίστε την ταχύτητα του σημείου  $\Gamma'$ , αντιδιαμετρικού του σημείου επαφής  $A'$ , τη στιγμή που έχει φτάσει στο κάτω άκρο του διαδρόμου.  
ii) Βρείτε τις θέσεις M και N δύο σημείων της επιφάνειας της μπάλας, που βρίσκονται στον κατακόρυφο κύκλο που διέρχεται από το κέντρο K, και έχουν ταχύτητα μέτρου όσο και το κέντρο της μπάλας στην κατώτερη θέση και τη στιγμή που έχει κατέλθει.

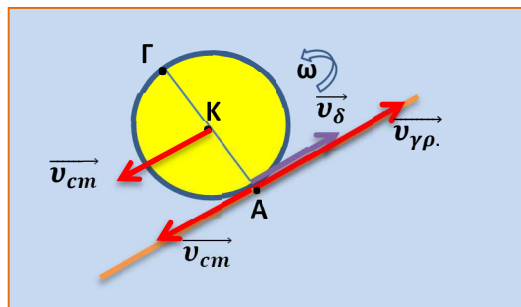
Τη στιγμή που τοποθετούμε την μπάλα στον κυλιόμενο διάδρομο, αναπτύσσεται τριβή ολίσθησης και η μπάλα αποκτά την ταχύτητα  $u_0=0,4 \text{ m/s}$  και γωνιακή ταχύτητα  $\omega_0$ , διανύοντας πολύ μικρή απόσταση  $\Delta x_0 = \frac{2}{45} \text{ m}$  προς τα κάτω, και κατόπιν αρχίζει την κύλιση της χωρίς ολίσθηση.

5. Υπολογίστε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας της  $\alpha_0$  καθώς και την γωνιακή επιτάχυνση  $\alpha_{0,γων.}$  στο μικρό χρονικό διάστημα της ολίσθησής της.

### Απαντήσεις

1. Το σημείο επαφής A της μπάλας με το διάδρομο, αφού κατά την κύλιση δεν έχουμε ολίσθηση, θα έχει την ταχύτητα του διαδρόμου κάθε χρονική στιγμή  $v_A = v_\delta = 1 \text{ m/s}$ .

Επίσης η μπάλα κάνει σύνθετη κίνηση, άρα το σημείο A της μπάλας θα έχει γραμμική ταχύτητα  $v_{\gamma\rho.} = \omega_o \cdot R$  προς τα πάνω, και την ταχύτητα του κέντρου μάζας της  $v_{o,cm} = 0,4 \text{ m/s}$ , που η συνισταμένη τους θα είναι προς τα πάνω.



Έτσι θα έχουμε  $v_\delta = v_{\gamma\rho.} - v_{cm} = 1 \text{ m/s}$

$$v_{\gamma\rho.} = 1,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \omega_o \cdot R = 1,4 \Rightarrow \omega_o = 14 \text{ rad/s}$$

Είδαμε ότι κατά την κύλιση ισχύει:

$$v_\delta = v_{\gamma\rho.} - v_{cm} \xrightarrow{v_{\gamma\rho.} = \omega R} \frac{dv_\delta}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot R - \frac{dv_{cm}}{dt} \xrightarrow{a_\gamma = \frac{d\omega}{dt}} 0 = a_\gamma R - a_{cm} \Rightarrow$$

$$\mathbf{a_{cm} = a_\gamma R}$$

$$a_\gamma = \frac{a_{cm}}{R} = 36 \text{ rad/s}^2$$

2. Η κίνηση του κέντρου K της μπάλας είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, άρα έχουμε

$$d = v_{o,cm} \cdot t + \frac{1}{2} a_{cm} t^2 \Rightarrow a_{cm} = \frac{2(d - v_{o,cm} \cdot t)}{t^2} = \frac{2 \cdot (8 - 0,4 \cdot 2)}{4} = 3,6 \text{ m/s}^2$$

1<sup>ος</sup> τρόπος:  $v_{cm} = v_o + a_{cm} \cdot t = 0,4 + 3,6 \cdot 2 = 7,6 \text{ m/s}$ . Επίσης είναι

$$v_{\gamma\rho.} - v_{cm} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{\gamma\rho.} = 8,6 \text{ m/s}$$

$$v_{\gamma\rho.} = \omega R \Rightarrow \omega = 86 \text{ rad/s}$$

2<sup>ος</sup> τρόπος:  $\omega = \omega_o + a_\gamma t = 14 + 36 \cdot 2 = 14 + 72 = 86 \text{ rad/s}$

3. Είναι  $\Delta\theta = \omega_o \cdot t + \frac{1}{2} a_\gamma t^2 = 14 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 2^2 = 100 \text{ rad}$  η γωνία που έκανε η μπάλα,

άρα ο αριθμός περιστροφών της θα είναι  $N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{50}{\pi} \text{ στροφές} = 15,9 \text{ στροφές}$

Ο κάθε κύλινδρος έχει ως γραμμική ταχύτητα, την ταχύτητα του διαδρόμου, άρα

$$v_\delta = v_{\gamma\rho. \text{κυλ.}} = \omega_{\text{κυλ.}} \cdot \frac{\delta}{2} \Rightarrow \omega_{\text{κυλ.}} = \frac{2 \cdot v_\delta}{\delta} = \frac{2 \cdot 1}{6 \cdot 10^{-2}} = \frac{100}{3} \text{ rad/s}$$

$$\Delta\theta_{\text{κυλ.}} = \omega_{\text{κυλ.}} \cdot t = \frac{200}{3} \text{ rad}$$

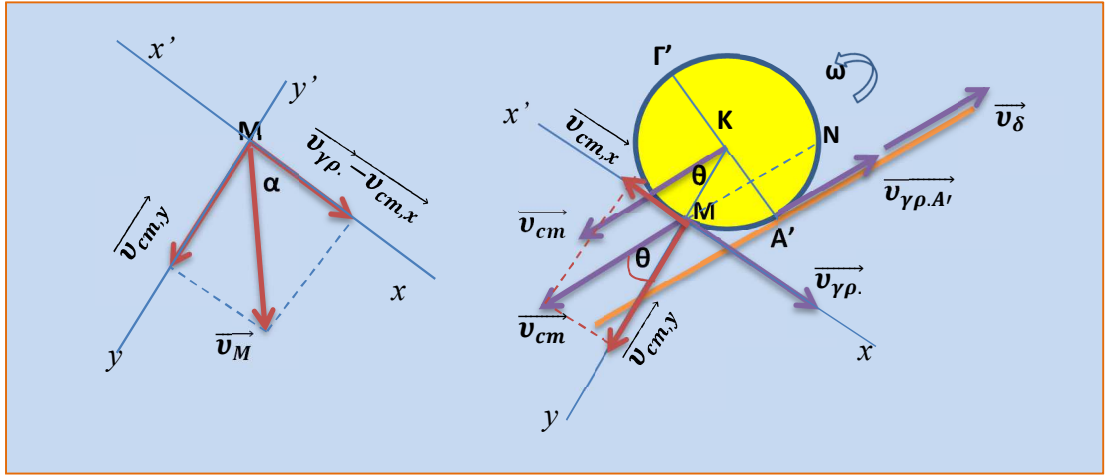
ο αριθμός περιστροφών του κάθε κυλίνδρου θα είναι

$$N_{\text{κυλ.}} = \frac{\Delta\theta_{\text{κυλ.}}}{2\pi} = \frac{100}{3\pi} \text{ περιστροφές ή } N_{\text{κυλ.}} = 10,6$$

#### 4.

- i) Το σημείο  $\Gamma'$  έχει την ταχύτητα του κέντρου μάζας της μπάλας, και τη γραμμική ταχύτητα, άρα  $v_{\Gamma'} = v_{cm} + \omega \cdot R = 7,6 + 86 \cdot 0,1 = 16,2 \text{ m/s}$

- ii) Έστω M ένα σημείο που το μέτρο της ταχύτητάς του είναι ίσο με το μέτρο της ταχύτητας του K. Η ταχύτητα  $\vec{v}_M$  είναι η συνισταμένη της ταχύτητας του κέντρου μάζας K ( $\vec{v}_{cm}$ ) και της γραμμικής ταχύτητας ( $\vec{v}_{\gamma\rho.}$ ), δηλαδή  $\vec{v}_M = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma\rho.}$ .



Αναλύουμε την  $\vec{v}_{cm}$  σε κάθετες συνιστώσες  $x x'$  στη διεύθυνση της εφαπτομένης  $γγ'$  στη διεύθυνση της ακτίνας. Έτσι έχουμε:  $v_{cm,x} = v_{cm} \cdot \eta\mu\theta$ , και  $v_{cm,y} = v_{cm} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

$$v_M^2 = v_{cm,y}^2 + (v_{\gamma\rho} - v_{cm,x})^2 \Rightarrow v_M^2 = v_{cm,y}^2 + v_{\gamma\rho}^2 - 2 \cdot v_{\gamma\rho} \cdot v_{cm,x} + v_{cm,x}^2$$

Όμως  $v_{cm,y}^2 + v_{cm,x}^2 = v_{cm}^2 = v_M^2 \Rightarrow v_{\gamma\rho}^2 - 2 \cdot v_{\gamma\rho} \cdot v_{cm,x} = 0 \Rightarrow v_{cm,x} = \frac{v_{\gamma\rho}}{2} = 4,3 \text{ m/s}$

$\eta\mu\theta = \frac{v_{cm,x}}{v_{cm}} = \frac{4,3}{7,6} = 0,565 \Rightarrow \theta = 34,4^\circ \Rightarrow$  άρα το σημείο M βρίσκεται στην περιφέρεια του κατακόρυφου κύκλου που διέρχεται από το K και σχηματίζει η ακτίνα KM με τη διεύθυνση της ταχύτητας  $\vec{v}_{cm}$ , γωνία  $34,4^\circ$ . Το σημείο N είναι το συμμετρικό του M ως προς την  $A'\Gamma'$ .

## 5.

Κατά τη διάρκεια της ολίσθησης μόλις την τοποθετήσουμε στον κυλιόμενο διάδρομο, το κέντρο μάζας της κάνει ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση προς τα κάτω και ομαλά επιταχυνόμενη αντιωρολογιακή στροφική κίνηση. Έτσι έχουμε

$$\Delta x_o = \frac{1}{2} a_o \cdot \Delta t_o^2 \text{ και } v_o = a_o \cdot \Delta t_o \Rightarrow a_o = \frac{v_o^2}{2 \cdot \Delta x_o}$$

$$a_o = \frac{0,4^2}{2 \cdot \frac{2}{45}} = 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ και } \Delta t_o = \frac{v_o}{a_o} = \frac{0,4}{1,8} = \frac{2}{9} \text{ s}$$

$$\text{Στο ερώτημα 1 υπολογίσαμε ότι } \omega_o = 14 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = a_{o,\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t_o \Rightarrow$$

$$a_{o,\gamma\omega\nu} = \frac{14}{\frac{2}{9}} = 63 \text{ rad/s}^2$$

## Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

**Κορκίζογλου Πρόδρομος**

