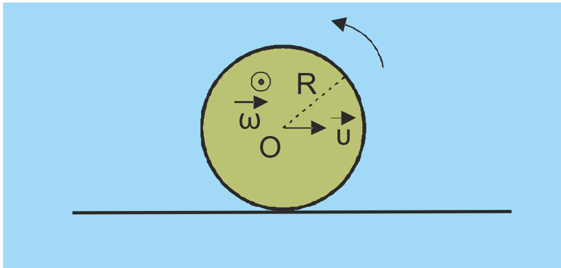
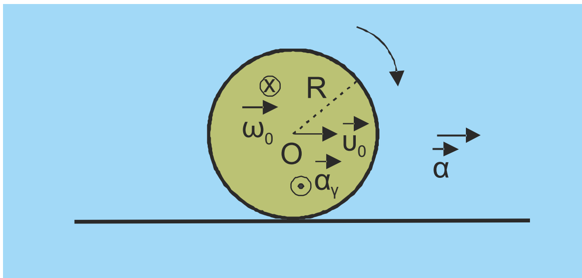
Μια κίνηση τροχού

Κατακόρυφος τροχός ακτίνας R = 0,5m κινείται σε οριζόντιο έδαφος.



Α. Ο τροχός έχει σταθερή οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ=10m/s προς τα δεξιά και σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω =20rad/s αντιωρολογιακής φοράς. Κάποιος ισχυρίζεται ότι ο τροχός εκτελεί κύλιση, εφόσον ισχύει $\upsilon = \omega \cdot R$. Συμφωνείτε ή όχι με τον ισχυρισμό αυτό;

Β. Σε μια άλλη περίπτωση, τη χρονική στιγμή t = 0 ο τροχός έχει αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0 = 10 m/s προς τα δεξιά και αρχική γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_0 = 50 rad/s ωρολογιακής φοράς και αποκτά μεταφορική επιτάχυνση μέτρου α = 2,5 m/s^2 ομόρροπη της ταχύτητάς του και γωνιακή επιτάχυνση μέτρου α_γ = 10 rad/s^2 αντίρροπη της γωνιακής του ταχύτητας. Να υπολογίσετε:



α. την ταχύτητα του σημείου επαφής του τροχού με το δάπεδο τη στιγμή t = 0

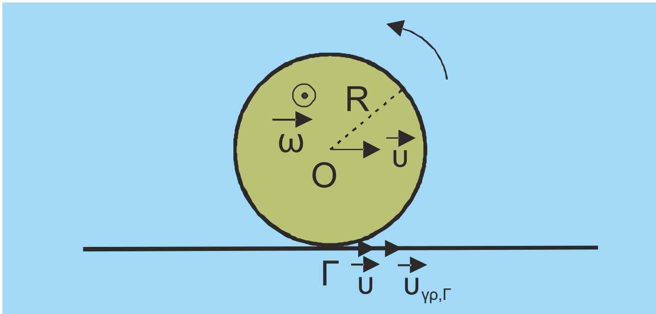
β. το μέτρο της επιτάχυνσης του ανώτατου σημείου του τροχού τη στιγμή t = 0

γ. να εξηγήσετε γιατί κάποια στιγμή η ταχύτητα του σημείου επαφής του τροχού με το δάπεδο θα μηδενιστεί και να υπολογίσετε ποιά στιγμή θα συμβεί αυτό

δ. το μέτρο της ταχύτητας και της οριζόντιας επιτάχυνσης ενός σημείου Σ του τροχού, που βρίσκεται πάνω σε μια οριζόντια ακτίνα του τροχού και βρίσκεται σε απόσταση r = 0,25m δεξιά του κέντρου του τροχού τη χρονική στιγμή t =3s

ε. την μετατόπιση του τροχού και το τόξο που διέγραψε ένα σημείο της περιφέρειάς του μέχρι τη στιγμή t = 3s.

Απάντηση



Α. Ο τροχός εκτελεί κύλιση, αν δεν ολισθαίνει. Θα πρέπει τότε το εκάστοτε σημείο επαφής του με το έδαφος να έχει την ταχύτητα του εδάφους, δηλαδή εν προκειμένω να έχει ταχύτητα ίση με μηδέν. Αντιμετωπίζουμε την κίνηση του τροχού ως σύνθετη, μια μεταφορική με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και μια στροφική γύρω από το κέντρο του τροχού με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. Το σημείο επαφής Γ του τροχού με το έδαφος έχει, λόγω της μεταφορικής κίνησης του τροχού, ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ προς τα δεξιά και λόγω της στροφικής κίνησης του τροχού γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{γρ,Γ}$ επίσης προς τα δεξιά, αφού ο τροχός στρέφεται αντιωρολογιακά. Επομένως η ταχύτητα του σημείου Γ έχει μέτρο

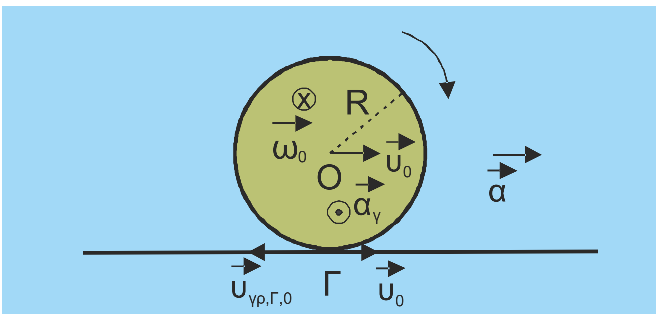
$$\upsilon_Γ = \upsilon + \upsilon_{γρ,Γ} \neq 0$$

οπότε ο τροχός ολισθαίνει και ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

Σχόλιο

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η συνθήκη $\upsilon = \omega \cdot R$ δεν εξασφαλίζει γενικά την κύλιση, σε αντίθεση με την απαίτηση το σημείο επαφής του τροχού να έχει την ταχύτητα του επιπέδου με το οποίο βρίσκεται σε επαφή.

Β. Για τα παρακάτω ερωτήματα, ορίζουμε θετική φορά προς τα δεξιά για τη μεταφορική κίνηση του τροχού και θετική φορά την ωρολογιακή για τη στροφική του κίνηση.

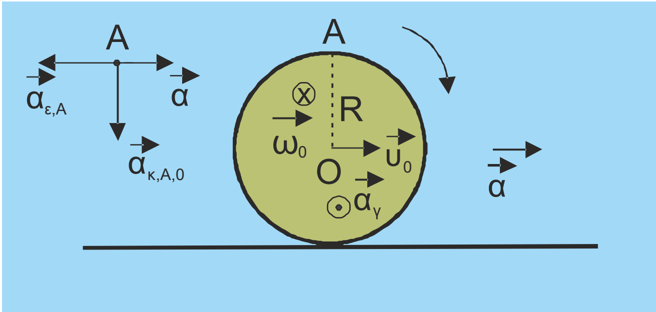


α. Σύμφωνα με το διπλανό σχήμα, το σημείο επαφής Γ του τροχού με το έδαφος έχει τη στιγμή t = 0, λόγω της μεταφορικής κίνησης του τροχού, ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 10\,m/s$ προς τα δεξιά και λόγω της στροφικής κίνησης του τροχού γραμμική ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{γρ,Γ,0} = \omega_0 \cdot R \rightarrow \upsilon_{γρ,Γ,0} = 25\,m/s$ προς τα αριστερά, αφού ο τροχός στρέφεται ωρολογιακά. Επομένως για την ταχύτητα του σημείου Γ τη στιγμή t = 0 θα ισχύει

$$\upsilon_{Γ,0} = \upsilon_0 - \upsilon_{γρ,Γ,0} \rightarrow \upsilon_{Γ,0} = -15\,m/s$$

δηλαδή θα έχει μέτρο 15m/s και φορά προς τα αριστερά.

β. Το ανώτατο σημείο Α του τροχού θα έχει λόγω της μεταφορικής κίνησης του τροχού επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ προς τα δεξιά. Λόγω της στροφικής κίνησης του τροχού, το σημείο Α έχει επιτρόχια επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{\varepsilon,A}$ προς τα αριστερά



αντίρροπη με τη γραμμική του ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho,A}$, αφού ο τροχός επιβραδύνεται και κεντρομόλο επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{\kappa,A}$ με φορά προς το κέντρο Ο του τροχού. Ισχύει

$$\alpha_{\varepsilon,A} = \frac{du_{\gamma\rho,A}}{dt} \rightarrow \alpha_{\varepsilon,A} = \frac{d(\omega \cdot R)}{dt} \rightarrow \alpha_{\varepsilon,A} = \frac{d\omega}{dt} \cdot R \rightarrow \alpha_{\varepsilon,A} = \alpha_{\gamma} \cdot R \rightarrow \alpha_{\varepsilon,A} = 5\,m/s^2$$

και

$$\alpha_{\kappa,A} = \omega^2 \cdot R \xrightarrow{t=0} \alpha_{\kappa,A,0} = \omega_0^2 \cdot R \rightarrow \alpha_{\kappa,A,0} = 1250\,m/s^2$$

Τη χρονική στιγμή t = 0 για την οριζόντια επιτάχυνση του σημείου Α θα είναι

$$\alpha_{A,x} = \alpha - \alpha_{\varepsilon,A} \rightarrow \alpha_{A,x} = -2{,}5\,m/s^2$$

μέτρου 2,5m/s^2 και κατεύθυνσης προς τα αριστερά.

Έτσι το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου Α τη χρονική στιγμή t = 0 θα είναι

$$\alpha_{A,0} = \sqrt{\alpha^2_{A,x} + \alpha^2_{\kappa,A,0}} \rightarrow \alpha_{A,0} = \sqrt{2{,}5^2 + 1250^2}\ m/s^2$$

γ. Είδαμε παραπάνω ότι τη στιγμή μηδέν το σημείο επαφής του τροχού με το δάπεδο έχει ταχύτητα προς τα αριστερά, αφού $\upsilon_0 = 10\,m/s < \upsilon_{\gamma\rho,\Gamma,0} = 25\,m/s$.

Ο τροχός επιταχύνεται μεταφορικά, αφού η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπη με την $\vec{\upsilon}_0$, ενώ επιβραδύνεται στροφικά, αφού η γωνιακή επιτάχυνσή του $\vec{\alpha}_{\gamma}$ είναι αντίρροπη της γωνιακής του ταχύτητας $\vec{\omega}_0$. Έτσι η μεταφορική ταχύτητα του τροχού θα αυξάνεται ενώ η γραμμική ταχύτητα των σημείων του θα μειώνεται, οπότε κάποια στιγμή οι δύο αντίρροπες ταχύτητες του σημείου επαφής του τροχού θα γίνουν αντίθετες και η ταχύτητά του θα μηδενιστεί. Τότε για το σημείο επαφής Δ του τροχού θα έχουμε

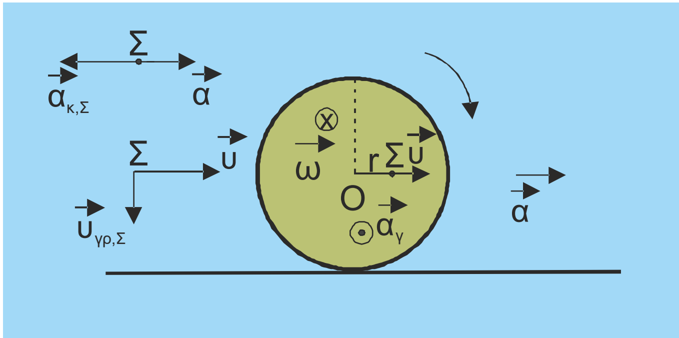
$$\upsilon_{\Delta} = 0 \rightarrow \upsilon - \upsilon_{\gamma\rho,\Delta} = 0 \rightarrow \upsilon - \omega \cdot R = 0 \rightarrow \upsilon_0 + \alpha \cdot t - (\omega_0 + \alpha_{\gamma} \cdot t) \cdot R = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 10 + 2{,}5 \cdot t - (50 - 10 \cdot t) \cdot 0{,}5 = 0 \rightarrow t = 2\,s$$

δ. Τη χρονική στιγμή t = 3s είναι

$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha \cdot t \rightarrow \upsilon = 17{,}5\,m/s$$

και

$$\omega = \omega_0 + \alpha_\gamma \cdot t \rightarrow \omega = 20\,rad/s$$



Για το σημείο Σ εκείνη τη στιγμή είναι $\upsilon_{\gamma\rho,\Sigma} = \omega \cdot r \rightarrow \upsilon_{\gamma\rho,\Sigma} = 5\,m/s$ οπότε

$$\upsilon_\Sigma = \sqrt{\upsilon^2 + \upsilon_{\gamma\rho,\Sigma}^2} \rightarrow \upsilon_\Sigma = \sqrt{17{,}5^2 + 5^2}\ m/s$$

ενώ για την οριζόντια επιτάχυνσή του είναι

$$\alpha_{\Sigma,x} = \alpha - \alpha_{\kappa,\Sigma} \rightarrow \alpha_{\Sigma,x} = \alpha - \omega^2 \cdot r \rightarrow \alpha_{\Sigma,x} = -97{,}5\,m/s^2$$

με μέτρο 97,5 m/s^2 και κατεύθυνση προς το O.

ε. Η μετατόπιση του τροχού θα είναι

$$\Delta x = \upsilon_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \Delta t^2 \xrightarrow{\Delta t = 3s} \Delta x = 41{,}25\,m$$

και η γωνιακή μετατόπισή του θα είναι

$$\Delta\theta = \omega_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \alpha_\gamma \cdot \Delta t^2 \xrightarrow{\Delta t = 3s} \Delta\theta = 105\,rad$$

Επομένως το τόξο που διέγραψε ένα σημείο της περιφέρειάς του μέχρι τη στιγμή αυτή θα είναι

$$\Delta S_{\pi\varepsilon\rho} = \Delta\theta \cdot R \rightarrow \Delta S_{\pi\varepsilon\rho} = 52{,}5\,m$$

Σχόλιο

Παρατηρούμε ότι στον ίδιο χρόνο $\Delta x \neq \Delta S_{\pi\varepsilon\rho}$, γεγονός που εξηγείται από το ότι ο τροχός ολισθαίνει...

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Παπάζογλου Αποστόλης