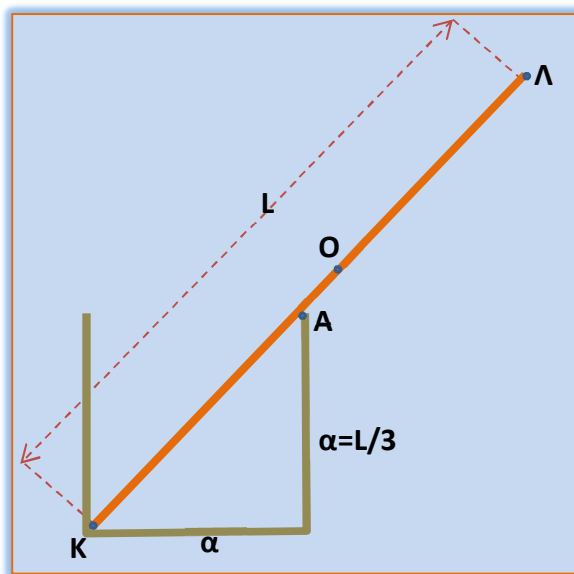


Ράβδος μέσα σε κύβο



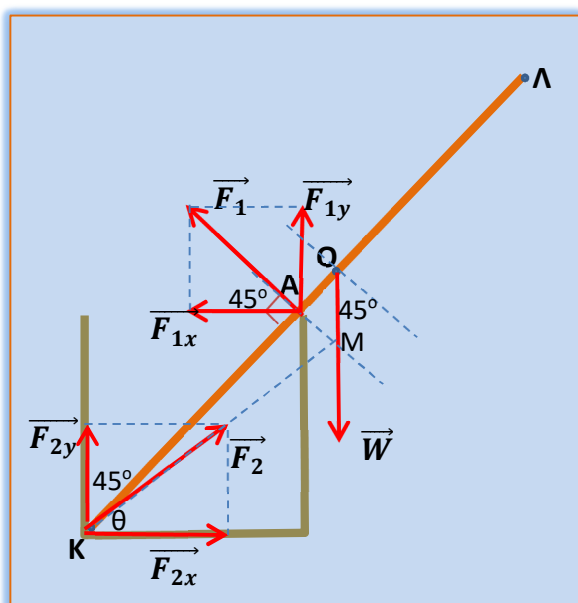
Ράβδος μήκους L και βάρους W ισορροπεί εντός του κύβου ακμής $\alpha = L/3$, όπως στο σχήμα. Στα σημεία επαφής τους δεν εμφανίζονται τριβές.

- Υπολογίστε τις δυνάμεις που ασκεί ο κύβος στη ράβδο στα σημεία επαφής τους.
- Σε ποιο σημείο της παράπλευρης έδρας του κύβου πρέπει να βάλουμε το άκρο Κ της ράβδου, ώστε να ισορροπεί.

$$\text{Δίνεται } \sin 29^\circ = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = 0.873 \cong \sin 30^\circ, \eta \mu 29^\circ = 0.486 \cong \eta \mu 30^\circ$$

Απαντήσεις

- Η δύναμη $\vec{F}_1$ είναι κάθετη στη ράβδο, αφού δεν έχουμε τριβές. Το βάρος $\vec{W}$ και η $\vec{F}_1$ τέμνονται στο σημείο Μ. Για να ισορροπεί η ράβδος πρέπει και η $\vec{F}_2$ να διέρχεται από το Μ, αλλιώς η συνολική ροπή ως προς το Μ δεν θα μηδενίζονταν. Αναλύουμε τις δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ σε οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα και θα έχουμε:



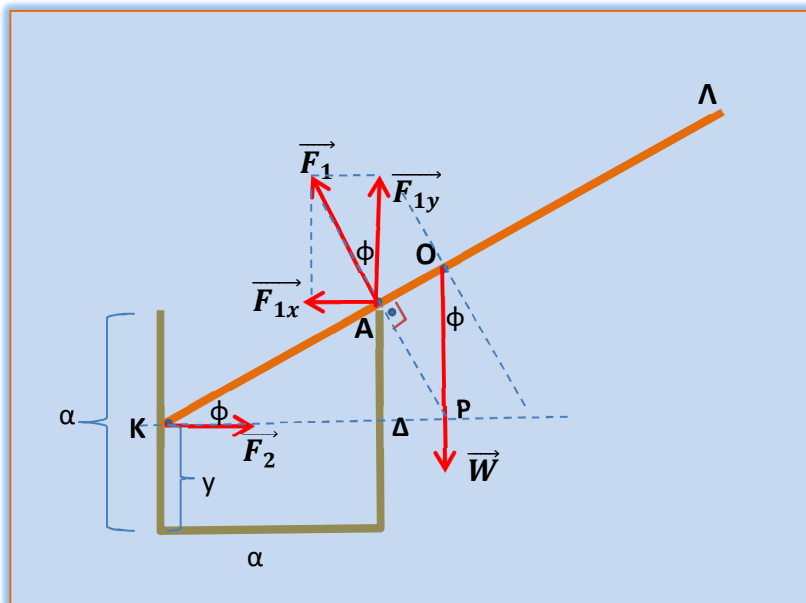
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma \tau_{(K)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{2x} = F_{1x} = F_{1y} = F_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ F_{1y} + F_{2y} = W \\ F_1 \cdot a\sqrt{2} = W \cdot \frac{L}{2} \sin 45^\circ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} F_{2x} = \frac{3\sqrt{2}}{8}W \\ F_{2y} = W - \frac{3W}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = W \cdot \frac{8-3\sqrt{2}}{8} \\ F_1 \cdot \frac{L}{3}\sqrt{2} = W \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow F_1 = \frac{3W}{4} \end{cases}$$

$$F_2 = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2} = \sqrt{\frac{18W^2}{64} + W^2 \cdot \frac{64 - 48\sqrt{2} + 18}{64}} = \frac{W}{4} \sqrt{25 - 16\sqrt{2}}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_{2y}}{F_{2x}} = \frac{8 - 3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 1 = 0,885 \Rightarrow \theta = 41,5^\circ$$

2.



Υπάρχει μία θέση σε απόσταση γ από την ακμή της βάσης, στην οποία η ράβδος ισορροπεί. Αν είναι παρακάτω από αυτή τη θέση, η ράβδος θα ολισθήσει και το άκρο Κ θα ισορροπήσει στην ακμή της βάσης, όπως στο ερώτημα 1. Κι αυτό γιατί η ροπή της F_2 ως προς το Α θα είναι ίση με τη ροπή του βάρους W ως προς το Α, αφού η ροπή της F_1 ως προς το Α είναι μηδέν. Επίσης δεν μπορεί να ισορροπήσει ακουμπώντας το άκρο Κ σε κάποιο σημείο της βάσης, γιατί θα ολισθήσει αφού δεν έχουμε τριβές.

1^{ος} τρόπος :

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \tau_{F_1(K)} = \tau_{W(K)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_2 = F_{1x} = F_1 \cdot \eta\mu\varphi \\ F_{1y} = W \\ F_1 \cdot \frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = W \cdot \frac{L}{2} \sigma\upsilon\nu\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_2 = W\varepsilon\varphi\varphi \\ F_1 = \frac{W}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \\ F_1 = W \cdot \frac{3}{2} \sigma\upsilon\nu^2\varphi \end{cases}$$

$$W \cdot \frac{3}{2} \sigma\upsilon\nu^2\varphi = \frac{W}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^3\varphi = \frac{2}{3} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = \sqrt[3]{2/3} = 0.873 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi = 0,486 \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = 0,557 = \frac{\alpha - y}{a} \Rightarrow y = \mathbf{0.442a} = \mathbf{44.2\% a}$$

2^{ος} τρόπος: Πρέπει η ροπή της F_2 ως προς το Α να είναι ίση με τη ροπή του βάρους W ως προς το Α, αφού η ροπή της F_1 ως προς το Α είναι μηδέν.

$$\tau_{F_2(A)} = \tau_{W(A)} \Rightarrow F_2 \cdot (A\Delta) = W \cdot (OA) \Rightarrow$$

$$F_2 \cdot \alpha \cdot \varepsilon\varphi\varphi = W \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{a}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \right) \Rightarrow$$

$$F_2 \cdot \frac{L}{3} \cdot \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = W \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3\sigma\upsilon\nu\varphi} \right) \Rightarrow F_2 \cdot \frac{L}{3} \cdot \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = W \sigma\upsilon\nu\varphi \frac{3\sigma\upsilon\nu\varphi - 2}{2 \cdot 3\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow$$

$$F_2 \cdot \eta\mu\varphi = W \cdot \frac{3\sigma\upsilon\nu^2\varphi - 2\sigma\upsilon\nu\varphi}{2} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_2 = F_{1x} = F_1 \cdot \eta\mu\varphi \\ F_{1y} = W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_2 = W \varepsilon\varphi\varphi \\ F_1 = \frac{W}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \end{cases} \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$W \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \cdot \eta\mu\varphi = W \cdot \frac{3\sigma\upsilon\nu^2\varphi - 2\sigma\upsilon\nu\varphi}{2} \Rightarrow 2\eta\mu^2\varphi = 3\sigma\upsilon\nu^3\varphi - 2\sigma\upsilon\nu^2\varphi \Rightarrow$$

$$2 - 2\sigma\upsilon\nu^2\varphi = 3\sigma\upsilon\nu^3\varphi - 2\sigma\upsilon\nu^2\varphi \Rightarrow 3\sigma\upsilon\nu^3\varphi = 2 \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \sqrt[3]{2/3} = 0.873 \Rightarrow \varphi = 29,12^\circ \cong 30^\circ$$

Θα εξετάσουμε αν στην περιοχή γωνιών $29,12^\circ < \varphi \leq 45^\circ \Leftrightarrow$

$0,707 < \sigma\upsilon\nu\varphi \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.873$ ισορροπεί η ράβδος.

$$\text{Έστω } \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{3}{4} = 0,75 \Rightarrow \eta\mu\varphi = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} = 0,968, \quad \varepsilon\varphi\varphi = 0,774$$

και υποθέτουμε ότι ισορροπεί η ράβδος.

$$\tau_{F_2(A)} = \tau_{W(A)} \Rightarrow F_2 \cdot (A\Delta) = W \cdot (OA) \Rightarrow$$

$$F_2 \cdot \alpha \cdot \varepsilon\varphi\varphi = W \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{a}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \right) \Rightarrow$$

$$F_2 \cdot \frac{L}{3} \cdot 0,774 = W \cdot 0,75 \cdot L \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \Rightarrow F_2 \cdot 0.258 = \frac{3}{16} W \Rightarrow F_2 = 0.726W$$

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_2 = F_{1x} = F_1 \cdot \eta\mu\varphi \\ F_{1y} = W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_2 = 0.774W \neq 0.726W \\ F_1 = \frac{W}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = 0.75W \end{cases}$$

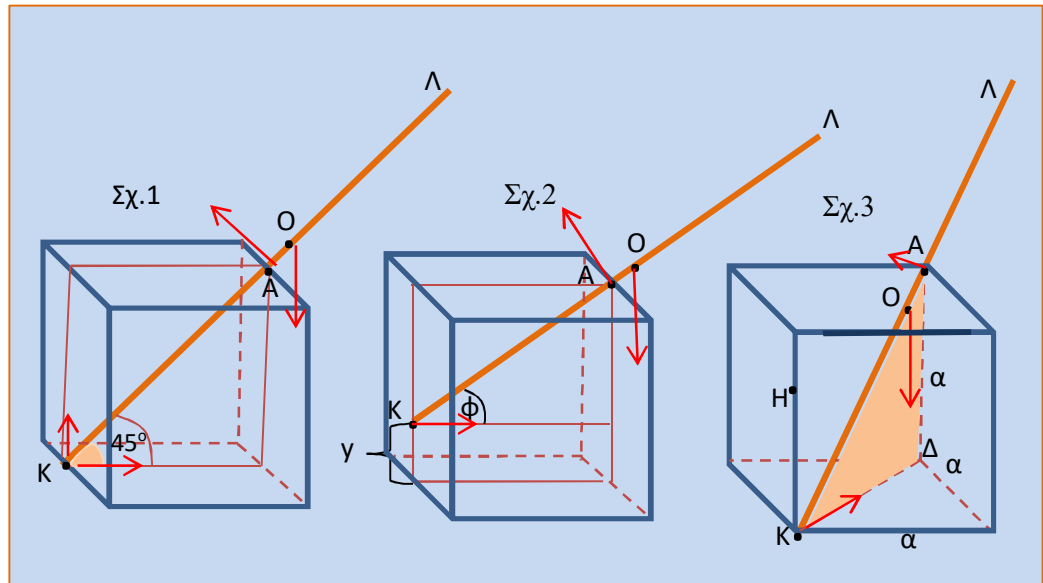
Άρα **δεν υπάρχει άλλη θέση μεταξύ της κόχης του κύβου και έως**

$y = 0.442a$ που να ισορροπεί η ράβδος!!

Πήραμε μια τυχαία γωνία στην παραπάνω περιοχή και αποδείξαμε ότι δεν μπορεί να ισορροπήσει. **Τι γίνεται αν αφήναμε τη ράβδο σε κάποια θέση;**

Η ράβδος θα ολισθήσει στο λείο τοίχωμα και θα ισορροπήσει στην ακμή της βάσης του κύβου!

Υπάρχουν 3 θέσεις ισορροπίας της ράβδου, το K να ακουμπά στην ακμή τη βάσης (σχ.1), σε ύψος y (σχ.2) και στο (σχ.3) στη διαγώνιο του κύβου.



Στο τρίτο σχήμα που ισορροπεί η ράβδος, είναι $(AK) = \sqrt{A\Delta^2 + K\Delta^2}$
 $(AK) = \alpha\sqrt{3} = \frac{L\sqrt{3}}{3} > \frac{L}{2}$ και μπορεί να ισορροπήσει σε μια ορισμένη θέση H , που υπολογίζεται με παρόμοιο τρόπο.

Κορκίζογλου Πρόδρομος