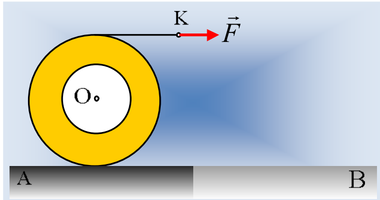
Δυναμική στερεού. Ομάδα Ε΄

3.3.61. Ένας δακτύλιος σε δύο επίπεδα



Από έναν συμπαγή και ομογενή δίσκο ακτίνας R=0,5m, αφαιρούμε το ομόκεντρο τμήμα του ακτίνας R_1, οπότε προκύπτει ένας δακτύλιος μάζας m=8kg. Η ροπή αδράνειας του δακτυλίου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του Ο και είναι κάθετος στο επίπεδό του, δίνεται από την εξίσωση $I_{cm}=\lambda mR^2$. Γύρω από το δακτύλιο αυτό τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα και τον τοποθετούμε σε οριζόντιο επίπεδο Α με το οποίο εμφανίζει συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0{,}05$. Κάποια στιγμή $t_0=0$, τραβάμε το άκρο Κ του νήματος, ασκώντας του οριζόντια δύναμη F, μέτρου F=1,8N με αποτέλεσμα ο δακτύλιος να κυλίεται.

Τη στιγμή $t_1=2s$ ο δακτύλιος, αφού έχει μετατοπισθεί κατά $x_1=0{,}5m$, περνά σε ένα δεύτερο λείο επίπεδο Β, ενώ συνεχίζεται η εξάσκηση της δύναμης F. Να βρεθούν:

i) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας Ο του δακτυλίου τη στιγμή t_1.

ii) Ο συντελεστής λ και η ροπή αδράνειας του δακτυλίου, ως προς τον άξονα περιστροφής του, καθώς και η τριβή που ασκείται στο δακτύλιο.

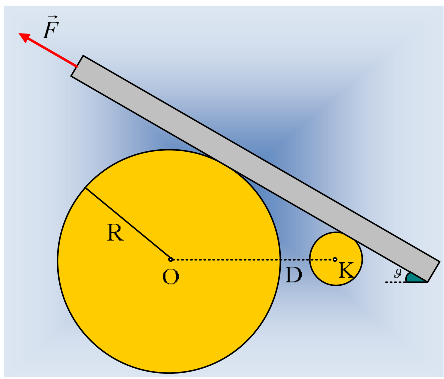
iii) Η ταχύτητα του σημείου επαφής του δακτυλίου με το επίπεδο Β τη στιγμή $t_2=4s$, καθώς και η ταχύτητα του άκρου Κ του νήματος, την ίδια στιγμή.

iv) Η μέγιστη δύναμη F, που θα μπορούσε να ασκηθεί μέσω του νήματος στον κύλινδρο, χωρίς αυτός να ολισθήσει στο επίπεδο Α.

Δίνεται $g=10m/s^2$.

3.3.62. Η ράβδος σε επαφή με δυο κυλίνδρους

Σε ένα κατακόρυφο τοίχο έχουν στηριχθεί οι οριζόντιοι άξονες δυο ομογενών κυλίνδρων του ίδιου ύψους, οι οποίοι περνούν από τα κέντρα Ο και Κ των δύο βάσεών τους. Οι κύλινδροι μπορούν να στρέφονται χωρίς τριβές γύρω από τους άξονές τους. Ο μεγάλος κύλινδρος έχει μάζα Μ και ακτίνα R=0,4m, ενώ το ευθύγραμμο τμήμα ΟΚ είναι οριζόντιο με μήκος (ΟΚ)=D=0,6m.



Μια ράβδος, με μάζα επίσης Μ, ισορροπεί σε επαφή με τους δυο κυλίνδρους οι οποίοι δεν περιστρέφονται, με την επίδραση δύναμης παράλληλης προς τον κατά μήκος άξονα της ράβδου και μέτρου F=40N, ενώ σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία θ=30°, όπως στο σχήμα

i) Να υπολογιστεί η μάζα Μ της ράβδου και του μεγάλου κυλίνδρου.

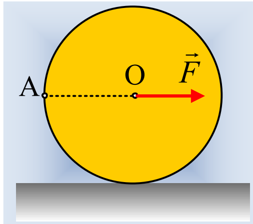
ii) Να βρεθεί η ακτίνα r του μικρού κυλίνδρου καθώς και η μάζα του m.

iii) Αφήνουμε ελεύθερη τη ράβδο και παρατηρούμε ότι δεν ολισθαίνει πάνω στους κυλίνδρους, για όσο χρόνο βρίσκεται σε επαφή μαζί τους. Να βρεθεί η επιτάχυνση με την οποία κινείται.

iv) Να βρεθούν οι δυνάμεις τριβής που ασκούνται στους κυλίνδρους από την ράβδο.

Δίνεται ότι οι κύλινδροι είναι κατασκευασμένοι από το ίδιο υλικό, η ροπή αδράνειας ενός κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I= ½\ m·R^2$ και $g=10m/s^2$.

3.3.63. Η περίοδος σε μια κύλιση



Σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένας ομογενής κύλινδρος ακτίνας $R=(1/4\pi)m$ και μάζας 4kg. Σε μια στιγμή $t_0=0$ ασκείται στο κέντρο μάζας Ο του κυλίνδρου μια σταθερή οριζόντια δύναμη F, με αποτέλεσμα να αρχίσει να κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει).

i) Αν ο κύλινδρος ολοκληρώνει μια πλήρη περιστροφή τη χρονική στιγμή $t_1=T_1=1s$, πόσο χρόνο διαρκεί η $2^η$ περιστροφή του (διάρκεια της $2^{ης}$ περιόδου);

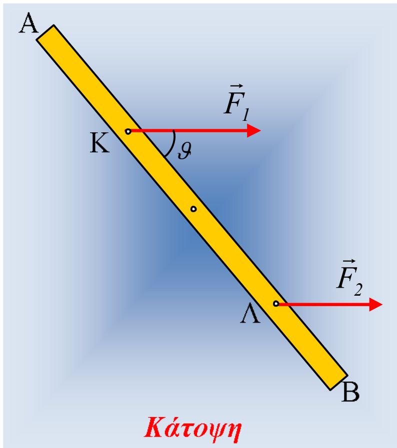
ii) Να υπολογιστεί το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F.

iii) Να βρεθεί το μέτρο της τριβής που ασκείται στον κύλινδρο, καθώς και την επιτάχυνση του σημείου εφαρμογής της, τη χρονική στιγμή t_1.

iv) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ταχύτητας του σημείου Α, στο άκρο μιας αρχικά οριζόντιας ακτίνας, στη διάρκεια της $2^{ης}$ περιστροφής.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου $I= ½\ mR^2$.

3.3.64. Μια ράβδος σε οριζόντιο επίπεδο



Η ομογενής ράβδος του σχήματος, μήκους $(AB)=\ell=4m$ και μάζας 60kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή $t_0=0$ δέχεται την επίδραση δύο σταθερών οριζοντίων παραλλήλων δυνάμεων μέτρων $F_1=60N$ και $F_2=50N$, οι οποίες σχηματίζουν με τη ράβδο γωνία θ (ημθ=0,8), όπως στο σχήμα, όπου (ΑΚ)=1m και (ΑΛ)=3,2m.

i) Να βρεθεί η ροπή (κατεύθυνση και μέτρο) κάθε δύναμη ως προς το άκρο Α της ράβδου, καθώς και η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς Α.

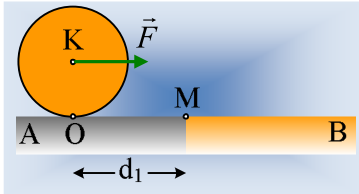
ii) Να υπολογιστούν οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις των σημείων Κ και Λ (σημεία εφαρμογής των δύο δυνάμεων) τη χρονική στιγμή $t_1=1,2s$.

iii) Αν τη χρονική στιγμή $t_2=3s$ πάψει να ασκείται στη ράβδο η δύναμη F_2, ποια η επιτάχυνση του σημείου Κ, αμέσως μετά (τη στιγμή t_2^+);

iv) Ερώτημα μόνο για Καθηγητές: Να βρεθεί η κεντρομόλος επιτάχυνση του σημείου Κ την παραπάνω στιγμή (t_2^+).

Δίνεται $g=10m/s^2$, ενώ η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο σε αυτή άξονα που περνά από το μέσον της I= (1/12)ml^2.

3.3.65. Ένας κύλινδρος σε δύο επίπεδα



Ένας ομογενής κύλινδρος μάζας 100kg και ακτίνας R=0,5m, ηρεμεί στο σημείο Ο ενός οριζοντίου επιπέδου Α, απέχοντας απόσταση d_1=5m από το σημείο Μ, όπου το επίπεδο Α δίνει τη θέση του σε ένα δεύτερο λείο οριζόντιο Β. Σε μια στιγμή ασκείται στο κέντρο Κ του κυλίνδρου μια σταθερή οριζόντια δύναμη F, όπως στο σχήμα, με αποτέλεσμα να αρχίσει να κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει) και τη στιγμή t_1=5s να φτάνει στο σημείο Μ.

i) Να εξηγήσετε γιατί το επίπεδο Α δεν είναι λείο.

ii) Να υπολογίσετε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F, καθώς και την ταχύτητα του κυλίνδρου τη στιγμή t_1.

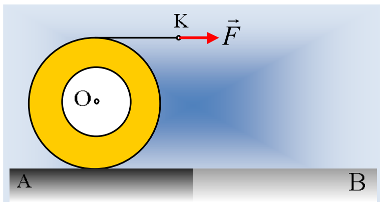
iii) Θα συνεχιστεί η κύλιση και κατά την κίνησή του στο επίπεδο Β; Να δικαιολογήσετε αναλυτικά την απάντησή σας.

iv) Να βρείτε πόσο απέχει από την αρχική του θέση, το κέντρο Κ του κυλίνδρου, τη στιγμή t_2=10s.

v) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις της γωνιακής ταχύτητας και της ταχύτητας του κέντρου Κ, σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι τη στιγμή t_2.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του (οριζόντιος άξονας που ενώνει τα κέντρα των βάσεών του) I= ½ mR^2.

3.3.66. Ένας δακτύλιος σε δύο επίπεδα



Από έναν συμπαγή και ομογενή δίσκο ακτίνας R=0,5m, αφαιρούμε το ομόκεντρο τμήμα του ακτίνας R_1, οπότε προκύπτει ένας δακτύλιος μάζας m=8kg. Η ροπή αδράνειας του δακτυλίου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του Ο και είναι κάθετος στο επίπεδό του, δίνεται από την εξίσωση $I_{cm}=\lambda mR^2$. Γύρω από το δακτύλιο αυτό τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα και τον τοποθετούμε σε οριζόντιο επίπεδο Α με το οποίο εμφανίζει συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s$=0,05. Κάποια στιγμή t_0=0, τραβάμε το άκρο Κ του νήματος, ασκώντας του οριζόντια δύναμη F, μέτρου F=1,8N με αποτέλεσμα ο δακτύλιος να κυλίεται.

Τη στιγμή t_1=2s ο δακτύλιος, αφού έχει μετατοπισθεί κατά x_1=0,5m, περνά σε ένα δεύτερο λείο επίπεδο Β, ενώ συνεχίζεται η εξάσκηση της δύναμης F. Να βρεθούν:

i) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας Ο του δακτυλίου τη στιγμή t_1.

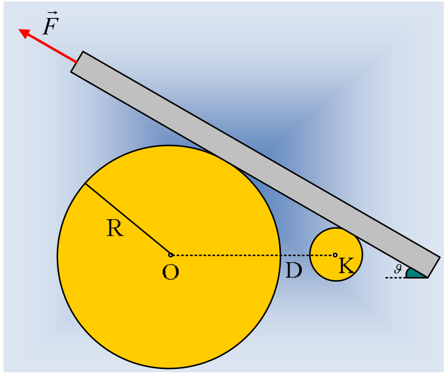
ii) Ο συντελεστής λ και η ροπή αδράνειας του δακτυλίου, ως προς τον άξονα περιστροφής του, καθώς και η τριβή που ασκείται στο δακτύλιο.

iii) Η ταχύτητα του σημείου επαφής του δακτυλίου με το επίπεδο Β τη στιγμή t_2=4s, καθώς και η ταχύτητα του άκρου Κ του νήματος, την ίδια στιγμή.

iv) Η μέγιστη δύναμη F, που θα μπορούσε να ασκηθεί μέσω του νήματος στον κύλινδρο, χωρίς αυτός να ολισθήσει στο επίπεδο Α.

Δίνεται $g=10m/s^2$.

3.3.67. Η ράβδος σε επαφή με δυο κυλίνδρους



Σε ένα κατακόρυφο τοίχο έχουν στηριχθεί οι οριζόντιοι άξονες δυο ομογενών κυλίνδρων του ίδιου ύψους, οι οποίοι περνούν από τα κέντρα Ο και Κ των δύο βάσεών τους. Οι κύλινδροι μπορούν να στρέφονται χωρίς τριβές γύρω από τους άξονές τους. Ο μεγάλος κύλινδρος έχει μάζα Μ και ακτίνα R=0,4m, ενώ το ευθύγραμμο τμήμα ΟΚ είναι οριζόντιο με μήκος (ΟΚ)=D=0,6m. Μια ράβδος, με μάζα επίσης Μ, ισορροπεί σε επαφή με τους δυο κυλίνδρους οι οποίοι δεν περιστρέφονται, με την επίδραση δύναμης παράλληλης προς τον κατά μήκος άξονα της ράβδου και μέτρου F=40N, ενώ σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία θ=30°, όπως στο σχήμα

i) Να υπολογιστεί η μάζα Μ της ράβδου και του μεγάλου κυλίνδρου.

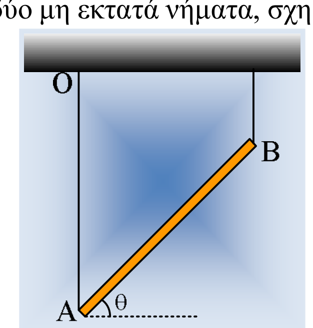
ii) Να βρεθεί η ακτίνα r του μικρού κυλίνδρου καθώς και η μάζα του m.

iii) Αφήνουμε ελεύθερη τη ράβδο και παρατηρούμε ότι δεν ολισθαίνει πάνω στους κυλίνδρους, για όσο χρόνο βρίσκεται σε επαφή μαζί τους. Να βρεθεί η επιτάχυνση με την οποία κινείται.

iv) Να βρεθούν οι δυνάμεις τριβής που ασκούνται στους κυλίνδρους από την ράβδο.

Δίνεται ότι οι κύλινδροι είναι κατασκευασμένοι από το ίδιο υλικό, η ροπή αδράνειας ενός κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I= ½\ m·R^2$ και $g=10m/s^2$.

3.3.68. Μια ράβδος ισορροπεί-επιταχύνεται



Μια ομογενής ράβδος ΑΒ μάζας 10kg και μήκους l, ισορροπεί κρεμασμένη από δύο μη εκτατά νήματα, σχηματίζοντας γωνία θ= 45° με την οριζόντια διεύθυνση.

i) Υποστηρίζεται η άποψη, ότι «το βάρος πέφτει περισσότερο στο μακρύτερο νήμα». Συμφωνείτε ή όχι με την άποψη αυτή;

ii) Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα στο άκρο Β.

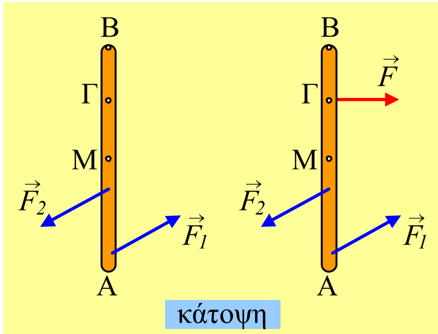
α) Να υπολογίσετε την τάση του νήματος που συνδέεται στο άκρο Α της ράβδου, αμέσως μετά το κόψιμο του δεξιού νήματος.

β) Το νήμα ΟΑ θα παραμείνει κατακόρυφο ή θα εκτραπεί δεξιά ή αριστερά;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I= (1/12)ml^2$ και $g=10m/s^2$.

3.3.69. Η ράβδος και το ζεύγος δυνάμεων.

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ηρεμεί μια οριζόντια ομογενής ράβδος ΑΒ, μήκους ℓ=2m και μάζας 6kg, η οποία μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος περνά από το άκρο της Β. Στη ράβδο ασκείται ένα ζεύγος δυνάμεων, όπως στο σχήμα και μια οριζόντια σταθερή δύναμη $\vec{F}$, μέτρου F=4N η οποία ασκείται κάθετα στη ράβδο στο σημείο Γ, όπου (ΒΓ)=0,5m.



i) Να σχεδιαστεί η δύναμη $\vec{F}$ και να υπολογιστεί η ροπή του ζεύγους των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

ii) Υποστηρίζεται η άποψη, ότι ένα στερεό στο οποίο ασκείται ένα ζεύγος δυνάμεων, δεν μπορεί να ισορροπεί με την άσκηση μιας μόνο επιπλέον δύναμης. Χρειάζεται να ασκηθεί ένα ακόμη ζεύγος δυνάμεων. Να εξετάσετε την ορθότητα ή μη της πρότασης αυτής, χρησιμοποιώντας την παραπάνω ράβδο.

iii) Να υπολογιστεί η αρχική επιτάχυνση (t=0) του άκρου Α της ράβδου, αν η δύναμη $\vec{F}$ έχει την κατεύθυνση του δεξιού σχήματος, κάθετη στη ράβδο, ενώ η ράβδος ΑΒ:

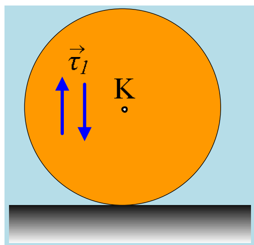
α) Μπορεί να στρέφεται γύρω από τον άξονα z, στο άκρο Β.

β) Έχει αποδεσμευτεί από τον άξονα αυτόν και είναι ελεύθερη.

3.3.70. Η επιτάχυνση και η επιβράδυνση ενός τροχού

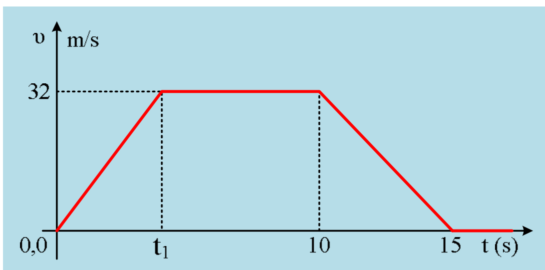
Ένας τροχός αυτοκινήτου επιταχύνεται, μέσω άσκησης ροπής ζεύγους δυνάμεων, από τη μηχανή. Αλλά και το φρενάρισμα επιτυγχάνεται με την άσκηση ροπής ζεύγους, μέσω των φρένων. Βέβαια και στις δύο περιπτώσεις παίζει πρωτεύοντα ρόλο και η τριβή που αναπτύσσεται, ενώ στη διαδικασία εμπλέκονται όλοι οι τροχοί και το αμάξωμα του αυτοκινήτου. Παρακάτω όμως θα μελετήσουμε τη διαδικασία, για έναν μόνο τροχό.

Έστω λοιπόν ο τροχός του σχήματος, με μάζα 10kg και ακτίνα R=0,5m, ο οποίος ηρεμεί σε οριζόντιο δρόμο με τον οποίο εμφανίζει συντελεστές τριβής $\mu_s=\mu=0{,}8$.



i) Ποια είναι η μέγιστη ροπή που μπορεί να ασκηθεί, μέσω ζεύγους δυνάμεων από τη μηχανή, ώστε ο τροχός να κυλίεται (χωρίς να ολισθήσει) κατά την επιτάχυνσή του, μέχρι να αποκτήσει ταχύτητα υ_{cm}=32m/s, με φορά προς τα δεξιά. Ποιος ο ελάχιστος χρόνος t_1 για την απόκτηση της παραπάνω ταχύτητας;

ii) Στο διπλανό διάγραμμα δίνεται η ταχύτητα του αυτοκινήτου (και άρα του κέντρου μάζας του τροχού) σε συνάρτηση με το χρόνο, όπου μέχρι τη στιγμή t_1 ο τροχός επιταχύνθηκε με τη μέγιστη επιτρεπόμενη ροπή.



Να βρεθούν:

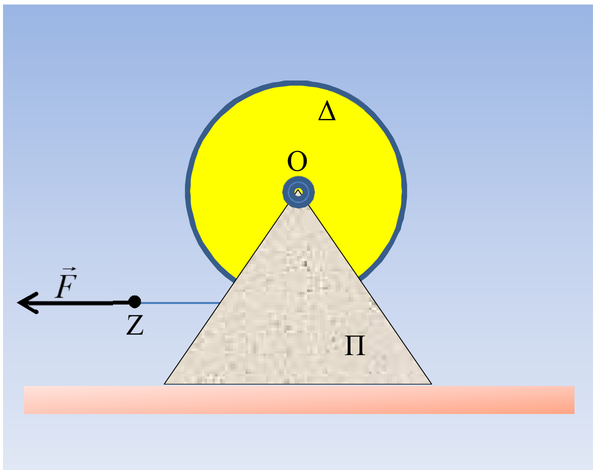
α) Η ασκούμενη τριβή στον τροχό τις χρονικές στιγμές ½ t_1, t_2=8s και t_3=12s.

β) Η ροπή του ζεύγους που ασκήθηκε στον τροχό κατά το φρενάρισμα.

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της ασκούμενης ροπής ζεύγους, από τη στιγμή t_0=0 μέχρι τη στιγμή που σταματά το αυτοκίνητο.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς κάθετο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο του $I_{cm}= ½\ mR^2$ και $g=10m/s^2$.

3.3.71. Ο δίσκος και η κινούμενη πυραμίδα



Στη διάταξη του σχήματος, ο άξονας περιστροφής του δίσκου Δ είναι οριζόντιος, έχει στερεωθεί στην κορυφή Ο της τετραγωνικής ομογενούς πυραμίδας Π, η οποία έχει μάζα $M = 6kg$, ύψος $h = 0,4m$ και μπορεί να ολισθαίνει σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ο δίσκος έχει μάζα $m = 4kg$ και φέρει αυλάκι, στο οποίο έχει τυλιχτεί πολλές φορές αβαρές και μη εκτατό νήμα. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκούμε στο άκρο Ζ του νήματος οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 2N$ προς τα αριστερά, ο δίσκος αρχίζει να στρέφεται δεξιόστροφα και το σύστημα αρχίζει να κινείται.

α) Υπολογίστε την επιτάχυνση της κορυφής Ο της πυραμίδας.

β) Βρείτε τη γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου και το μήκος του νήματος, που θα ξετυλιχτεί μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 2s$.

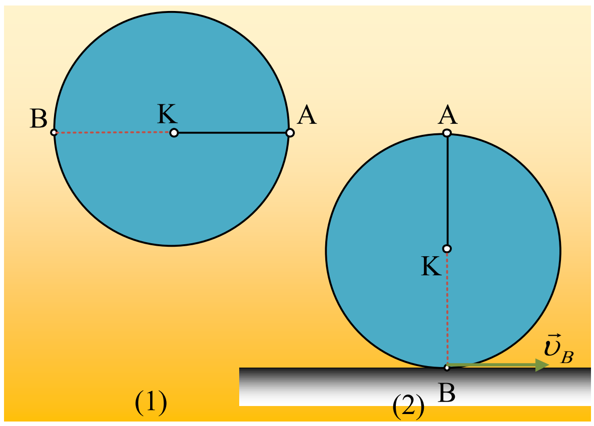
γ) Βρείτε τη μετατόπιση του άκρου Ζ του νήματος τη χρονική στιγμή t_1.

δ) Υπολογίστε το μέτρο της δύναμης που δέχεται ο δίσκος από τον άξονα περιστροφής του.

ε) Ποια θα ήταν η μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης $\vec{F}$ που θα έπρεπε να ασκήσουμε στο άκρο Ζ του νήματος ώστε το στερεό να μην ανατρέπεται, αν η πλευρά της βάσης της πυραμίδας είναι $L = 0,3m$;

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = \frac{1}{2}mR^2$, ο χώρος που καταλαμβάνει ο δίσκος εντός της πυραμίδας είναι αμελητέος, το κέντρο μάζας της πυραμίδας βρίσκεται πάνω στο φορέα του ύψους της σε απόσταση $h/4$ από τη βάση και $g = 10m/s^2$.

3.3.72. Η κίνηση ενός δίσκου.



Ο ομογενής δίσκος του σχήματος, κέντρου Κ και ακτίνας R=8/15 m μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος περνά από το σημείο Α, στο άκρο της ακτίνας ΚΑ, χωρίς τριβές. Συγκρατούμε το δίσκο σε τέτοια θέση, ώστε η ακτίνα ΚΑ να είναι οριζόντια (θέση 1) και σε μια στιγμή τον αφήνουμε να κινηθεί.

i) Για τη στιγμή αμέσως μόλις αφεθεί ελεύθερος ο δίσκος να κινηθεί, να βρεθούν η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου καθώς και οι επιταχύνσεις του κέντρου Κ του δίσκου, καθώς και του σημείου Β, αντιδιαμετρικού του σημείου Α.

Μετά από λίγο η ακτίνα ΚΑ γίνεται κατακόρυφη (σχήμα 2), οπότε τη στιγμή αυτή το σημείο Β έρχεται σε επαφή με λείο οριζόντιο επίπεδο, έχοντας ταχύτητα $υ_B$=16/3 m/s. Στη θέση αυτή ο δίσκος αποδεσμεύεται από τον άξονα περιστροφής του στο Α και κινείται πλέον ελεύθερα στο οριζόντιο επίπεδο.

ii) Να υπολογιστούν οι επιταχύνσεις των σημείων Κ και Β ελάχιστα πριν την αποδέσμευση του δίσκου από τον άξονα και αμέσως μετά.

iii) Να υπολογιστεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου Β μετά από χρονικό διάστημα Δt= (π/10)s, από τη στιγμή της αποδέσμευσης του δίσκου από τον άξονα.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας Κ I_{cm}= ½ MR^2.