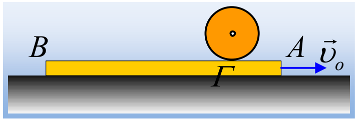
3.4. Στροφορμή. Ομάδα Γ.

21. Μια …δύσκολη περίπτωση, σαν φύλλο εργασίας.



Μια σανίδα ΑΒ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα υ_o. Σε μια στιγμή t=0, αφήνουμε πάνω της σε σημείο Γ, μια σφαίρα, χωρίς ταχύτητα και χωρίς να περιστρέφεται, όπως στο σχήμα. Μεταξύ σανίδας και σφαίρας αναπτύσσεται τριβή.

i) Η τριβή που θα ασκηθεί στη σφαίρα θα είναι:

α) Τριβή ολίσθησης, β) Στατική τριβή.

ii) Η τριβή που θα ασκηθεί στην σφαίρα, θα έχει φορά:

α) προς τα δεξιά, β) προς τα αριστερά.

iii) Μετά από λίγο η ταχύτητα του κέντρου Ο της σφαίρας είναι ίση με 1m/s. Να βρεθούν οι ταχύτητες:

α) του σημείου επαφής Δ της σφαίρας με τη σανίδα.

β) του αντιδιαμετρικού του σημείου Ε.

iv) Σε μια στιγμή t_1 η ταχύτητα του σημείου Δ, γίνεται ίση με την ταχύτητα υ_1 της σανίδας, ενώ η σφαίρα βρίσκεται ακόμη πάνω στη σανίδα.

α) Να σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα τη στιγμή αυτή.

β) Να περιγράψτε την κίνηση της σφαίρας και της σανίδας μετά την στιγμή t_1.

v) Αν η σφαίρα έχει ίση μάζα με τη σανίδα, τότε η τελική ταχύτητα της σανίδας θα είναι:

α) $\upsilon_2 < ½\, \upsilon_0$, β) $\upsilon_2 = ½\, \upsilon_0$, γ) $\upsilon_2 > ½\, \upsilon_0$

v) Η σφαίρα:

α) Θα κινηθεί για πάντα πάνω στη σανίδα.

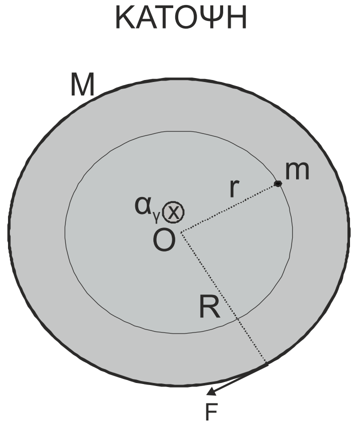
β) Θα εγκαταλείψει κάποια στιγμή τη σανίδα από το άκρο της Α.

γ) Θα εγκαταλείψει κάποια στιγμή τη σανίδα από το άκρο της Β.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο της $I= 2/5\, mR^2$.

22. Ψίχουλο πάνω σε δίσκο



Ομογενής δίσκος μάζας Μ και ακτίνας R είναι αρχικά ακίνητος. Πάνω στο δίσκο και σε απόσταση r από το κέντρο του βρίσκεται ένα ψίχουλο μάζας m αμελητέων διαστάσεων. Το σύστημα μπορεί να περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Τη χρονική στιγμή t=0 ασκούμε στην περιφέρεια του δίσκου δύναμη σταθερού μέτρου F, η οποία εφάπτεται συνεχώς στο δίσκο.

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I= ½\, mR^2$.

α. να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος β. να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του ψίχουλου

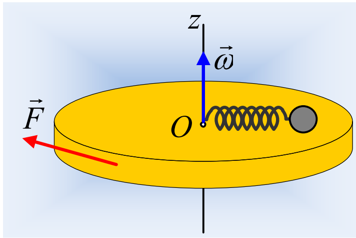
γ. να εξηγήσετε γιατί η στατική τριβή που ασκείται στο ψίχουλο δεν διέρχεται από το κέντρο Ο του δίσκου

δ. να υπολογίσετε τη στατική τριβή που δέχεται το ψίχουλο σε συνάρτηση με το χρόνο

ε. αν ο συντελεστής οριακής τριβής μεταξύ δίσκου και ψίχουλου είναι $\mu_{ορ}$, να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_1, κατά την οποία το ψίχουλο ολισθαίνει.

Δίνονται M, R, m, r, F, $\mu_{ορ}$.

23. Ένα σύστημα σωμάτων σε περιπέτειες…



Μια οριζόντια κυκλική πλατφόρμα μάζας M=20kg και ακτίνας R=2m, στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα z, χωρίς τριβές, ο οποίος περνά από το κέντρο της Ο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω=2rad/s. Πάνω στην πλατφόρμα είναι τοποθετημένη μια μικρή σφαίρα (αμελητέων διαστάσεων) και μάζας 2kg, η οποία είναι δεμένη στο ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100N/m και φυσικού μήκους l_0=92cm, το άλλο άκρο του οποίου δένεται στον άξονα περιστροφής. Μεταξύ σφαίρας και πλατφόρμας δεν αναπτύσσονται τριβές, ενώ η σφαίρα στρέφεται μαζί με την πλατφόρμα, χωρίς να μεταβάλλεται η θέση της ως προς αυτήν.

i) Το μήκος του ελατηρίου είναι:

α) $\ell < \ell_0$, β) $\ell = \ell_0$, γ) $\ell > \ell_0$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Να υπολογιστεί η στροφορμή κάθε σώματος (πλατφόρμα-σφαίρα), καθώς και η στροφορμή του συστήματος κατά (ως προς) τον άξονα z.

Σε μια στιγμή t_0=0, ασκείται εφαπτομενικά στην πλατφόρμα μια οριζόντια, σταθερού μέτρου δύναμη F=10N, όπως στο παραπάνω σχήμα.

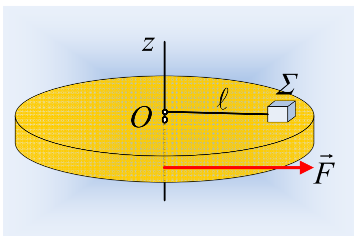
iii) Να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής της στροφορμής κατά (ως προς) τον άξονα z:

α) του συστήματος, β) της σφαίρας, γ) της πλατφόρμας.

iv) Να υπολογιστεί η στροφορμή κάθε σώματος (πλατφόρμα-σφαίρα), καθώς και η στροφορμή του συστήματος κατά (ως προς) τον άξονα z, τη στιγμή t_1=5s.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της πλατφόρμας, ως προς τον άξονά της $I = \frac{1}{2} MR^2$.

24. Μεγαλύτερες περιπέτειες…



Μια οριζόντια κυκλική πλατφόρμα μάζας M=20kg και ακτίνας R=1m, μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα z, χωρίς τριβές, ο οποίος περνά από το κέντρο της Ο. Πάνω στην πλατφόρμα ηρεμεί ένα σώμα Σ μάζας m=2kg, δεμένο στο άκρο νήματος μήκους $\ell = 0{,}8m$, το άλλο άκρο του οποίου μέσω ενός δακτυλίου δένεται στον άξονα z, έτσι ώστε το σώμα Σ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς να τυλίγεται το νήμα στον άξονα. Σε μια στιγμή (t_0=0) ασκείται στην περιφέρεια της πλατφόρμας, εφαπτομενικά, μια οριζόντια σταθερού μέτρου δύναμη F=21,6N, με αποτέλεσμα τη στιγμή t_1=5s η πλατφόρμα να έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ω_1=10rad/s.

i) Να εξετάσετε αν υπάρχει τριβή μεταξύ σώματος Σ και πλατφόρμας, με αποτέλεσμα να τεθεί σε περιστροφή και το σώμα Σ.

ii) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής κατά (ως προς) τον άξονα z:

α) του συστήματος β) της πλατφόρμας και γ) του σώματος Σ.

στο χρονικό διάστημα 0-5s.

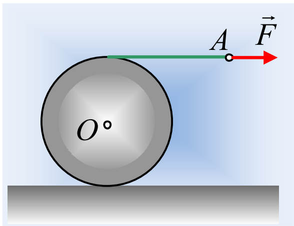
iii) Να υπολογιστεί τη χρονική στιγμή t_1 η στροφορμής κατά (ως προς) τον άξονα z:

α) του συστήματος β) της πλατφόρμας και γ) του σώματος Σ.

iv) Τη στιγμή t_1 η δύναμη F καταργείται, οπότε μετά από λίγο παρατηρούμε ότι το σώμα Σ δεν γλιστράει πάνω στην πλατφόρμα. Να υπολογιστεί τότε η ταχύτητα του σώματος Σ.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της πλατφόρμας, ως προς τον άξονά της I= ½ MR^2.

25. Μια κύλιση με μεταβλητή επιτάχυνση.



Γύρω από έναν τροχό, μάζας m=20kg και ακτίνας R=0,6m, ο οποίος βρίσκεται ακίνητος σε οριζόντιο επίπεδο, έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα. Σε μια στιγμή t_0=0, ασκούμε στο άκρο του νήματος Α, μια οριζόντια δύναμη F το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται με το χρόνο, σύμφωνα με την εξίσωση F=0,9t (μονάδες στο S.I.). Ο τροχός αρχίζει να κυλίεται, ενώ σταματάμε να τραβάμε το νήμα και να ασκούμε δύναμη τη στιγμή t΄=10s.

i) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου Ο του τροχού σε συνάρτηση με το χρόνο και να κάνετε τη γραφική της παράσταση, μέχρι τη χρονική στιγμή t_2=12s.

ii) Να υπολογιστεί η στροφορμή του τροχού κατά (ως προς) τον άξονα περιστροφής του τροχού ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του Ο, τις χρονικές στιγμές:

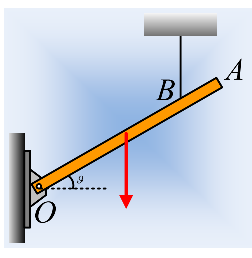
α) t_1=5s και β) t_2=12s.

iii) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του τροχού κατά (ως προς) τον άξονα περιστροφής του τροχού ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του Ο, τις παραπάνω χρονικές στιγμές.

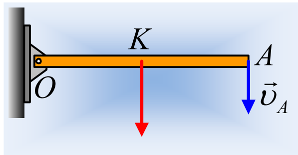
iv) Πόση ενέργεια μεταφέρθηκε στον τροχό μέσω της ασκούμενης δύναμης F και ποια η ισχύς της δύναμης τη στιγμή t_1;

Δίνεται η ροπή αδράνειας ως προς κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του I= ½ mR^2.

26. Άλλη μια ράβδος στρέφεται



Η ομογενής ράβδος του σχήματος μάζας M=3kg και μήκους l=2m, είναι αρθρωμένη στο άκρο της Ο, γύρω από το οποίο μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές. Η ράβδος ισορροπεί, κρεμασμένη στο άκρο κατακόρυφου νήματος, το οποίο έχει προσδεθεί στο σημείο Β, όπου (ΒΑ)=0,4m, σχηματίζοντας γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση. Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα, οπότε η ράβδος κατέρχεται και τη στιγμή που γίνεται οριζόντια, το άκρο της Α έχει ταχύτητα υ_A=6m/s.



i) Για την αρχική θέση (πριν να κοπεί το νήμα), να βρεθεί η τάση του νήματος, καθώς και η γωνία θ που σχηματίζει η ράβδος με την οριζόντια διεύθυνση.

ii) Να βρεθεί η κατακόρυφη επιτάχυνση του μέσου Κ της ράβδου καθώς και η οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση, στην οριζόντια θέση.

iii) Αναφερόμενοι στην οριζόντια θέση, δυο μαθητές, ο Χ και ο Υ, θέλουν να υπολογίσουν τη στροφορμή και το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής ως προς το άκρο Ο (ισοδύναμα ως προς σταθερό οριζόντιο άξονα z κάθετο στο επίπεδο περιστροφής που περνά από το άκρο Ο). Ο Χ θεωρεί την κίνηση στροφική γύρω από τον άξονα z, ο Υ θεωρεί την κίνηση σύνθετη, μια μεταφορική του κέντρου μάζας και μια περιστροφή γύρω από κάθετο άξονα που περνά από το Κ.

Ποιες είναι οι απαντήσεις που θα δώσουν;

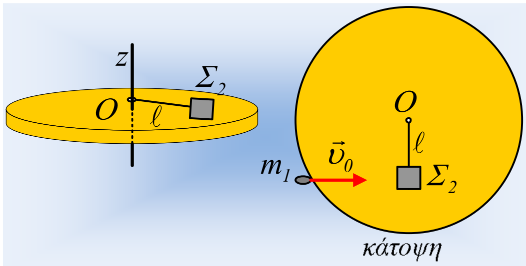
iv) Να υπολογιστεί επίσης η στροφορμή και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της ως προς:

α) σταθερό οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο περιστροφής που περνά από το μέσον της Κ της ράβδου.

β) σταθερό οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο περιστροφής, ο οποίος περνά από το άκρον Α της ράβδου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I_{cm}= (1/12)\cdot M\ell^2$ και $g=10m/s^2$.

27. Δυο διαδοχικές «κρούσεις»



Ένας οριζόντιος δίσκος μάζας M=18kg και ακτίνας R=1m μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα z, που περνά από το κέντρο του Ο. Στον άξονα περιστροφής έχουμε περάσει ένα μικρό δακτυλίδι, το οποίο μέσω αβαρούς (τεντωμένου) νήματος μήκους l=0,5m συνδέεται με σώμα Σ_2, το οποίο εμφανίζει με το δίσκο συντελεστή τριβής μ=0,4 και το οποίο ηρεμεί. Σε μια στιγμή ένα βλήμα το οποίο κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου υ_0=200m/s κάθετα στο νήμα, σφηνώνεται στο σώμα Σ_2, δημιουργώντας ένα συσσωμάτωμα Σ μάζας m=4kg, το οποίο αποκτά αρχική ταχύτητα υ_Σ=20m/s.

i) Να υπολογίσετε την απώλεια της μηχανικής ενέργειας η οποία οφείλεται στην κρούση.

ii) Ποια η τάση του νήματος, αμέσως μετά την κρούση;

iii) Κάποια στιγμή η ταχύτητα του συσσωματώματος έχει μέτρο u=10m/s. Για τη στιγμή αυτή να υπολογιστούν:

α) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος Σ.

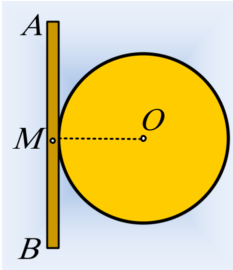
β) Ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου.

iv) Πόση είναι η συνολική μηχανική ενέργεια που εμφανίζεται ως θερμική, εξαιτίας της τριβής μεταξύ του Σ και του δίσκου, μέχρι που να σταματήσει η ολίσθηση του συσσωματώματος πάνω στο δίσκο;

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα z, $I= \frac{1}{2} MR^2$ και $g=10m/s^2$.

28. Η ράβδος στο «πλευρό» του δίσκου.

Ο ξύλινος δίσκος του σχήματος μάζας (56/9)kg και ακτίνας R=0,3m, μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδό του και διέρχεται από το κέντρο του Ο. Καρφώνουμε στο άκρο μιας ακτίνας του δίσκου, το μέσον Μ μιας ομογενούς ράβδου ΑΒ μάζας 12kg και μήκους 0,8m, κατασκευάζοντας έτσι το στερεό s. Αφήνουμε το στερεό s ελεύθερο να κινηθεί από τη θέση, όπου η ράβδος ΑΒ είναι κατακόρυφη, όπως στο σχήμα.



i) Για τη στιγμή αμέσως μόλις αφέθηκε το στερεό να κινηθεί, να βρεθούν:

α) Η γωνιακή επιτάχυνση του s.

β) Οι επιταχύνσεις των άκρων Α και Β της ράβδου.

γ) Οι ρυθμοί μεταβολής της στροφορμής, ως προς τον άξονα περιστροφής στο Ο:

a) του στερεού s, b) του δίσκου, c) της ράβδου.

ii) Για τη στιγμή που η ράβδος γίνεται οριζόντια για πρώτη φορά, να βρεθούν:

α) Οι ταχύτητες των άκρων Α και Β της ράβδου.

β) Η στροφορμή της ράβδου ως προς:

a) Τον άξονα περιστροφής στο Ο,

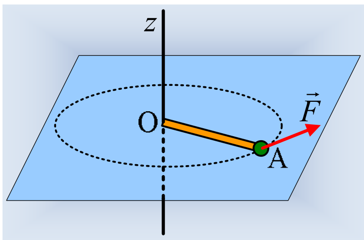
b) Οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο του σχήματος, ο οποίος περνά από το μέσον της Μ.

γ) Η κινητική ενέργεια της ράβδου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_1= ½\, m_1R^2$, η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της Μ $I_2= (1/12)m_2l^2$ και $g=10m/s^2$.

29. Ένα σύστημα σωμάτων σαν στερεό.

Στο άκρο Α μιας ομογενούς ράβδου μήκους l=2m και μάζας Μ=6kg, έχει προσκολληθεί ένα σώμα Σ μάζας m=1kg, το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο, δημιουργώντας ένα στερεό s. Το στερεό s ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ενώ μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο άξονα z, που περνά από το άλλο άκρο Ο της ράβδου. Σε μια στιγμή $t_0=0$ στο σώμα Σ ασκείται μια σταθερού μέτρου δύναμη F=3N, η οποία είναι συνεχώς κάθετη στη ράβδο, με αποτέλεσμα το στερεό s να αρχίσει να περιστρέφεται. Να βρεθούν:



i) Η γωνιακή επιτάχυνση του στερεού s.

ii) Η ταχύτητα του σώματος Σ τη στιγμή $t_1=10s$.

iii) Η στροφορμή τη στιγμή t_1 κατά (ως προς) τον άξονα z:

α) του σώματος Σ, β) της ράβδου, γ) του στερεού s.

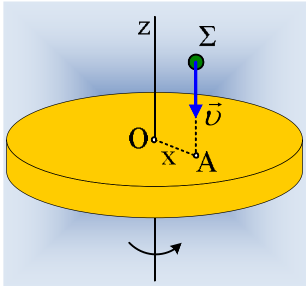
iv) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής κατά (ως προς) τον άξονα z:

α) του σώματος Σ, β) της ράβδου, γ) του στερεού s.

v) Το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο άξονας στη ράβδο της στιγμή t_1.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I_{cm}=(1/12)ml^2$.

30. Η στροφορμή και μια κρούση



Ένας οριζόντιος δίσκος μάζας M=2kg και ακτίνας R=2m στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος περνά από το κέντρο του O, με γωνιακή ταχύτητα ω=0,5rad/s. Ένα σώμα Σ, που θεωρείται υλικό σημείο μάζας m=1kg, αφήνεται να πέσει από ύψος h=0,8m, πάνω από το δίσκο και προσκολλάται σε αυτόν, στο σημείο A, σε απόσταση x=1m από το κέντρο O του δίσκου.

i) Να βρεθεί ελάχιστα πριν την κρούση του σώματος Σ με το δίσκο:

α) Η ταχύτητα του σώματος Σ καθώς και η στροφορμή του κατά (ως προς) τον άξονα z.

β) Η στροφορμή του σώματος Σ ως προς το κέντρο O του δίσκου, καθώς και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της.

ii) Ποια η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος, μετά την προσκόλληση του Σ πάνω στο δίσκο.

iii) Να υπολογιστεί η μεταβολή της στροφορμής:

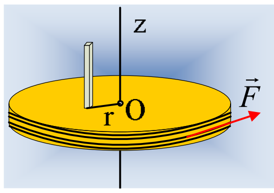
α) του σώματος Σ και β) του δίσκου

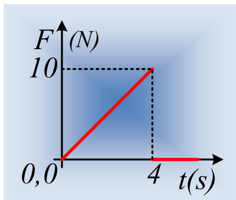
που οφείλεται στην κρούση, ως προς το κέντρο O του δίσκου.

iv) Να υπολογιστεί η απώλεια μηχανικής ενέργειας που οφείλεται στην κρούση.

Δίνεται $g=10m/s^2$ ενώ η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονά του z, $I= ½ MR^2$.

31. Ο δίσκος περιστρέφεται από μεταβλητή δύναμη





Ο οριζόντιος ομογενής δίσκος του σχήματος, μάζας M=37/8kg και ακτίνας R=4m, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος περνά από το κέντρο του O. Σε απόσταση r=1m από το κέντρο O, βρίσκεται κολλημένη μια όρθια λεπτή πρισματική ράβδος, μήκους l=2m και μάζας m=3kg. Γύρω από τον δίσκο τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα και κάποια στιγμή $t_0=0$, ασκούμε στο άκρο του οριζόντια δύναμη F, το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως στο διάγραμμα.

i) Για τη χρονική *στιγμή* $t_1=2s$, να βρεθούν:

α) Η ροπή αδράνειας του στερεού δίσκος-ράβδος.

β) Η στροφορμή του συστήματος και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του, ως προς τον άξονα z.

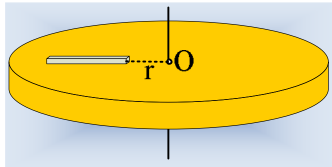
γ) Η ισχύς της δύναμης F, καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου και του δίσκου.

ii) Για το χρονικό διάστημα από t_1=2s έως t_2=4s να υπολογιστούν:

α) Η μεταβολή της στροφορμής του συστήματος δίσκος-ράβδος.

β)Το έργο της δύναμης F.

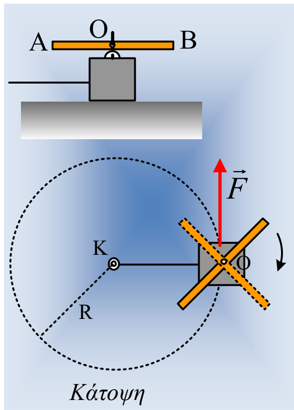
iii) Τη χρονική στιγμή t_3=5s, η ράβδος ανατρέπεται και προσκολλάται πάνω στο δίσκο, στη διεύθυνση μιας ακτίνας, όπως στο σχήμα. Να υπολογιστεί η τελική κινητική ενέργεια της ράβδου.



Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_κ$= ½ MR^2, ενώ η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I_ρ$= $(1/12)ml^2$.

32. Μια σανίδα περιστρέφεται μαζί με τη βάση

Μια λεπτή ομογενής σανίδα ΑΒ μήκους 2m και μάζας m=3kg, μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το μέσον της Ο και ο οποίος στηρίζεται σε βάση μάζας Μ, η οποία ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο (πάνω σχήμα). Η βάση έχει προσδεθεί στο άκρο νήματος, μήκους l_1=2m το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί σε σταθερό σημείο Κ. Θέτουμε τη σανίδα σε περιστροφή, με ωρολογιακή φορά και με γωνιακή ταχύτητα ω=2rad/s. Στη συνέχεια ασκώντας στη βάση σταθερού μέτρου οριζόντια δύναμη F=5N, η διεύθυνση της οποίας παραμένει διαρκώς κάθετη στο νήμα, την θέτουμε σε κυκλική κίνηση γύρω από το σημείο Κ, μέχρι να διατρέξει (η βάση) μήκος τόξου s=16m αποκτώντας ταχύτητα $υ_1$=4m/s. Τη στιγμή αυτή η δύναμη παύει να ασκείται. Να υπολογιστούν:



i) Το έργο της δύναμης F και η αύξηση της κινητικής ενέργειας της σανίδας εξαιτίας της κίνησης της βάσης στήριξής της.

ii) Η μάζα Μ της βάσης.

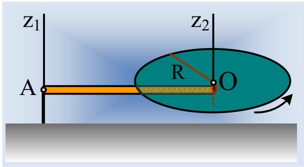
iii) Η τελική στροφορμή της σανίδας ως προς κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το μέσον της Ο.

iv) Η τελική στροφορμή της σανίδας ως προς το κέντρο Κ περιστροφής.

v) Η ολική στροφορμή του συστήματος βάση-σανίδα ως προς κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο Κ της κυκλικής τροχιάς.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της σανίδας ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της I= $(1/12)ml^2$.

33. Η «ιδιοστροφορμή» μετατρέπεται σε στροφορμή



Μια οριζόντια ομογενής σανίδα ΑΟ μήκους l=2m και μάζας m=3kg μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα z_1, ο οποίος περνά από το άκρο της Α, χωρίς τριβές. Στο άλλο της άκρο Ο, έχει συνδεθεί κατακόρυφος άξονας z_2, γύρω από τον οποίο μπορεί να περιστρέφεται οριζόντιος δίσκος ακτίνας R=1m και μάζας M=4kg. Θέτουμε τον δίσκο σε περιστροφή, όπως στο σχήμα (ο δίσκος είναι σε οριζόντιο επίπεδο ελαφρά πάνω από τη σανίδα, οπότε δεν εφάπτεται με αυτήν), με αρχική γωνιακή ταχύτητα 2rad/s, ενώ η ράβδος συγκρατείται ακίνητη σε οριζόντια θέση και παρατηρούμε ότι εξαιτίας των τριβών μεταξύ του άξονα z_2 και του δίσκου, αυτός επιβραδύνεται και σταματά μετά από χρόνο t_1=40s.

i) Να υπολογιστούν η αρχική στροφορμή του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του z_2 και η ροπή της τριβής που τον επιβραδύνει, θεωρώντας την σταθερή. Να σχεδιάστε πάνω στο σχήμα τα διανύσματα:

α) της αρχικής στροφορμής και β) της ροπής που δέχτηκε ο δίσκος από τον άξονα.

ii) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά τώρα αφήνουμε ελεύθερη τη ράβδο να κινηθεί και παρατηρούμε ότι αυτή αρχίζει να περιστρέφεται.

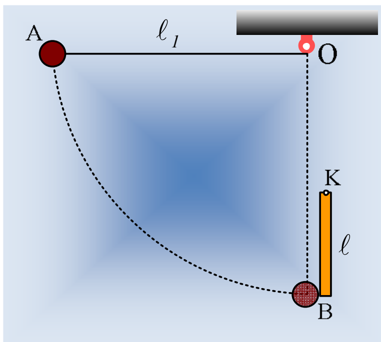
α) Να ερμηνευθεί η περιστροφή της ράβδου γύρω από τον άξονα z.

β) Να υπολογιστεί η τελική γωνιακή ταχύτητα της ράβδου.

γ) Πόση μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας των τριβών;

Δίνεται ότι η ιδιοστροφορμή (το spin) ενός στερεού είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε άξονα, παράλληλο προς τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του. Δίνονται επίσης οι ροπές αδράνειας των στερεών, ως προς τους άξονες περιστροφής τους. Για τη ράβδο I_1= (1/3)ml^2 και για το δίσκο I_2= ½ MR^2).

34. Η κρούση και η διατήρησης της στροφορμής



Μια μικρή σφαίρα μάζας m=1kg, την οποία θεωρούμε υλικό σημείο, κρέμεται στο άκρο αβαρούς νήματος μήκους l_1=5m, από σταθερό σημείο Ο. Στην ίδια κατακόρυφο ισορροπεί μια ομογενής ράβδος ΚΒ, μήκους l=2m και μάζας Μ=6kg, όπου το άκρο της Β εφάπτεται της σφαίρας. Η ράβδος μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρον της Κ.

Μετακινούμε τη σφαίρα φέρνοντάς την στη θέση Α, όπου το νήμα είναι τεντωμένο και οριζόντιο και την αφήνουμε να κινηθεί. Φτάνοντας στην κατακόρυφο, συγκρούεται με το άκρο της ράβδου και αμέσως μετά, κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου $υ_1$=2m/s.

i) Να βρεθεί η ταχύτητα της σφαίρας πριν την κρούση, καθώς και η μεταβολή της ορμής της, η οποία οφείλεται στην κρούση.

ii) Θέλουμε να υπολογίσουμε τη γωνιακή ταχύτητα την οποία αποκτά η ράβδος λόγω της κρούσης. Για το σκοπό αυτό θα εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα, ως προς οριζόντιο άξονα, ο οποίος περνά:

α) Από το σημείο Ο,

β) από το σημείο Κ περιστροφής της ράβδου,

γ) από το μέσον Μ της ράβδου.

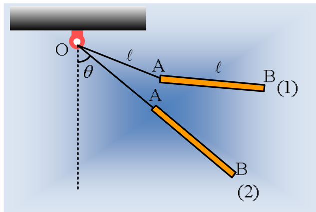
Να δικαιολογήσετε με ποιον ή ποιους από τους παραπάνω άξονες, μπορείτε να δουλέψετε και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου.

iii) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής της ράβδου, η οποία οφείλεται στην κρούση. Η ορμή του συστήματος σφαίρα-ράβδος διατηρήθηκε κατά την κρούση αυτή;

iv) Να υπολογιστεί η απώλεια μηχανικής ενέργειας που οφείλεται στην κρούση.

Δίνεται $g=10m/s^2$ ενώ η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I= 1/3\ Ml^2$.

35. Η κίνηση της ράβδου στο άκρο νήματος



Η ομογενής ράβδος ΑΒ, μάζας m και μήκους ℓ, κρατείται στη θέση (1) του διπλανού σχήματος, με το άκρο της Α δεμένο στο άκρο (τεντωμένου) αβαρούς και μη εκτατού νήματος, του ίδιου μήκους ℓ, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί σε σταθερό σημείο Ο. Σε μια στιγμή αφήνουμε τη ράβδο να κινηθεί σε κατακόρυφο επίπεδο και μετά από λίγο περνά από τη θέση (2) όπου ο άξονας της ράβδου είναι συνέχεια του νήματος σχηματίζοντας γωνία θ με την κατακόρυφο.

Στη θέση αυτή το μέσον Κ της ράβδου έχει ταχύτητα μέτρου υ και το άκρο Α ταχύτητα μέτρου $υ_A=0,4υ$.

Για τη θέση (2):

i) Να σχεδιάσετε πάνω στο σχήμα τις παραπάνω ταχύτητες των σημείων Α και Κ και να δικαιολογήσετε τις κατευθύνσεις τους.

ii) Η κινητική ενέργεια της ράβδου υπολογίζεται από την εξίσωση:

α) $K=0,5mυ^2$, β) $K=0,56mυ^2$, γ) $K=1,86mυ^2$, δ) $K=3,36mυ^2$.

iii) Το μέτρο της στροφορμής της ράβδου, ως προς οριζόντιο άξονα που περνά από το μέσον της Κ (η ιδιοστροφορμή της) δίνεται από την εξίσωση:

α) $L_K=0,1\,mυ\ell$, β) $L_K=0,4\,mυ\ell$, γ) $L_K=mυ\ell$, δ) $L_K=1,6\,mυ\ell$.

iv) Το μέτρο της στροφορμής της ράβδου, ως προς οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο Ο του νήματος, δίνεται από την εξίσωση:

α) $L_o=mυ\ell$, β) $L_o=1,5\,mυ\ell$, γ) $L_o=1,6\,mυ\ell$, δ) $L_o=1,8\,mυ\ell$.

v) Αν για τη γωνία που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο δίνεται ότι ημθ=0,6 και συνθ=0,8, τότε:

Va) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς οριζόντιο άξονα που περνά από το μέσον της Κ είναι:

α) $\frac{dL_κ}{dt}=0$, β) $\frac{dL_κ}{dt}=0,6mg\ell$, γ) $\frac{dL_κ}{dt}=0,9mg\ell$, δ) $\frac{dL_κ}{dt}=1,2mg\ell$.

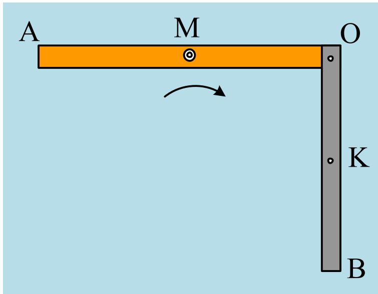
Vb) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο Ο του νήματος είναι:

α) $\frac{dL_o}{dt}=0$, β) $\frac{dL_o}{dt}=0{,}6mg\ell$, γ) $\frac{dL_o}{dt}=0{,}9mg\ell$, δ) $\frac{dL_o}{dt}=1{,}2mg\ell$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I=\frac{1}{12}m\ell^2$.

36. Δυο ράβδοι, ένα στερεό



Έχουμε δημιουργήσει ένα επίπεδο στερεό s, καρφώνοντας δύο ομογενείς ράβδους ΑΟ και ΟΒ, κάθετα μεταξύ. Η ράβδος ΑΟ με μήκος ℓ_1=1,6m και η ΟΒ με μήκος ℓ_2=1,2m και μάζα m=10kg. Το στερεό s στρέφεται δεξιόστροφα, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το μέσον Μ της ΑΟ, σε κατακόρυφο επίπεδο και κάποια στιγμή περνά από τη θέση που δείχνει το διπλανό σχήμα, όπου η ράβδος ΑΟ είναι οριζόντια. Τη στιγμή αυτή το μέσον Κ της ράβδου ΟΒ, έχει ταχύτητα μέτρου $υ_K$=2m/s, ενώ ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητάς του είναι ίσος με 5m/s^2. Για τη θέση αυτή:

i) Να σημειωθούν πάνω στο σχήμα, τα διανύσματα των ταχυτήτων και των ρυθμών μεταβολής των μέτρων τους, για τα σημεία Κ και Ο.

ii) Να υπολογιστεί το μέτρο της ταχύτητας του κοινού άκρου Ο των δύο ράβδων, καθώς και ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του Ο.

iii) Ποια η επιτάχυνση του μέσου Κ της ράβδου ΟΒ;

iv) Να βρεθεί η στροφορμή καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ΟΒ:

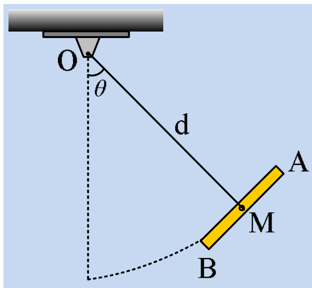
α) Ως προς το μέσον της Κ.

β) Ως προς τον άξονα περιστροφής του στερεού s, στο Μ.

iv) Να βρεθεί επίσης η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του στερεού s, ως προς τον άξονα περιστροφής του.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της I_{cm}= $m\ell^2/12$ και g=10m/s^2.

37. Μια ράβδος στο άκρο νήματος



Μια ομογενής ράβδος μήκους ℓ=0,4m και μάζας m=0,6kg έχει προσδεθεί στο μέσον της Μ, μέσω αμελητέου βάρους και μη εκτατού νήματος, μήκους d=1m, με σταθερό σημείο Ο. Η ράβδος συγκρατείται στη θέση που δείχνει το σχήμα, όπου το νήμα είναι τεντωμένο σχηματίζοντας γωνία θ με την κατακόρυφο, όπου ημθ=0,6, ενώ το νήμα είναι κάθετο στη ράβδο. Σε μια στιγμή αφήνουμε τη ράβδο ελεύθερη να κινηθεί. Να βρεθούν:

i) Οι αρχικές επιταχύνσεις του μέσου Μ και των δύο άκρων Α και Β της ράβδου.

ii) Ο αρχικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου, ως προς οριζόντιο άξονα:

α) Ο οποίος περνά από το σημείο πρόσδεσης Ο.

β) Ο οποίος είναι κάθετος στη ράβδο, στο μέσον της Μ.

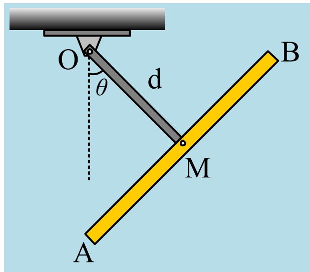
iii) Να σχεδιάστε τη ράβδο τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο και για τη θέση αυτή να υπολογιστούν:

α) Οι ταχύτητες των άκρων Α και Β της ράβδου.

β) Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς το σημείο Ο.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της I_{cm}= $m\ell^2/12$ και $g=10m/s^2$.

38. Μια ράβδος στο άκρο αβαρούς … ράβδου



Μια ομογενής ράβδος ΑΒ, μήκους ℓ=2m και μάζας m=0,6kg έχει καρφωθεί στο άκρο δεύτερης ράβδου ΟΜ αμελητέου βάρους και μήκους d=1m, δημιουργώντας ένα στερεό s, με κάθετες τις δύο ράβδους. Το στερεό αυτό μπορεί να περιστρέφεται, σε κατακόρυφο επίπεδο, χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο Ο της αβαρούς ράβδου. Το στερεό s συγκρατείται στη θέση που δείχνει το σχήμα, όπου η ράβδος ΟΜ σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο, όπου ημθ=0,6 (συνθ=0,8). Σε μια στιγμή αφήνουμε το στερεό μας ελεύθερο να κινηθεί. Να βρεθούν:

i) Οι αρχικές επιταχύνσεις του μέσου Μ και των δύο άκρων Α και Β της ράβδου.

ii) Ο αρχικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ΑΒ, ως προς οριζόντιο άξονα:

α) Ο οποίος περνά από το σημείο πρόσδεσης Ο.

β) Ο οποίος είναι κάθετος στη ράβδο ΑΒ, στο μέσον της Μ.

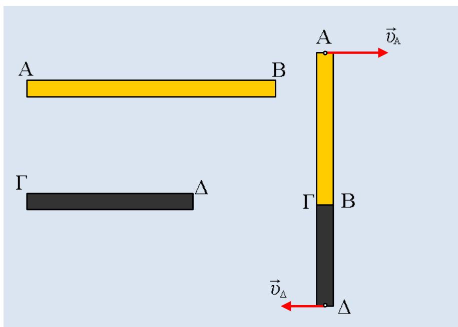
iii) Να σχεδιάστε το στερεό s τη στιγμή που η αβαρής ράβδος γίνεται κατακόρυφη και για τη θέση αυτή να υπολογιστούν:

α) Οι ταχύτητες των άκρων Α και Β της ράβδου ΑΒ.

β) Η στροφορμή της ράβδου ΑΒ ως προς οριζόντιο άξονα κάθετο στη ράβδο που περνά από το μέσον της Μ καθώς και η αντίστοιχη στροφορμή ως προς τον άξονα περιστροφής στο σημείο Ο.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς ράβδου

39. Δύο ράβδοι δημιουργούν ένα στερεό s.



Διαθέτουμε δύο ομογενείς ράβδους, την ΑΒ μήκους ℓ_1=3m και μάζας m_1=2kg και την ΓΔ μήκους ℓ_2=2m και μάζας m_2. Συγκολλούμε τα άκρα Β και Γ των δύο ράβδων δημιουργώντας μια νέα ράβδο, το στερεό s.

Αφήνουμε ελεύθερο το στερεό s σε λείο οριζόντιο επίπεδο και σε μια στιγμή ασκούμε πάνω του ένα ζεύγος δυνάμεων με κατακόρυφη ροπή τ=4N·m για ορισμένο χρονικό διάστημα.

i) Το στερεό s θα εκτελέσει:

α) Μεταφορική κίνηση, β) Στροφική κίνηση, γ) Σύνθετη κίνηση.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

ii) Αν τα άκρα Α και Δ έχουν ταχύτητες μέτρων $υ_A$=6m/s και $υ_Δ$=4m/s να βρεθούν:

α) Το κέντρο μάζας του στερεού s.

β) Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του στερεού.

iii) Αν το ζεύγος που επιτάχυνε το στερεό s, ασκήθηκε πάνω του μέχρι να το στρέψει κατά γωνία φ=5rad, να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του στερεού s καθώς και η μάζα της ράβδου ΓΔ.

iv) Κάποια στιγμή (t_0=0) το στερεό s βρίσκεται στη θέση που δείχνει το παραπάνω σχήμα. Τη στιγμή αυτή γίνεται αποκόλληση των δύο ράβδων, οι οποίες πλέον συνεχίζουν να κινούνται ανεξάρτητα η μια της άλλης. Να βρεθούν τη χρονική στιγμή t_1=(5π/4)s≈3,9s:

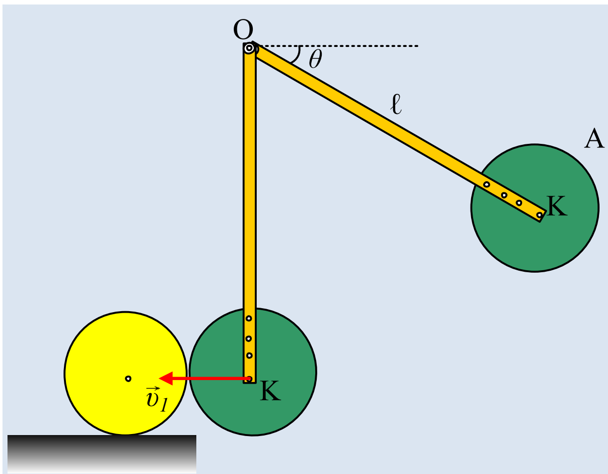
α) Η απόσταση των άκρων Β και Γ των δύο ράβδων.

β) Η συνολική στροφορμή του συστήματος των δύο ράβδων ως προς τον κατακόρυφο νοητό άξονα που αρχικά στρέφεται το στερεό s.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου, ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I=m\ell^2/12$.

40. Σειρά για μια ιδιαίτερη ελαστική κρούση

Μια ομογενής ράβδος μήκους ℓ=1m και μάζας Μ=2,88kg μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της Ο, χωρίς τριβές. Στο άλλο άκρο της ράβδου έχουμε καρφώσει ένα δίσκο μάζας m=2kg και ακτίνας R=0,2m, όπου το κέντρο του Κ ταυτίζεται με το άκρο της ράβδου, έχοντας έτσι κατασκευάσει ένα στερεό s, το οποίο συγκρατείται στη θέση Α του σχήματος, όπου η ράβδος σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ. Σε μια στιγμή αφήνουμε το στερεό s να περιστραφεί, με αποτέλεσμα τη στιγμή t_1 που η ράβδος γίνεται κατακόρυφη, το κέντρο του δίσκου έχει ταχύτητα $υ_1$=4m/s.



Τη στιγμή αυτή ο δίσκος συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με σφαίρα της ίδιας ακτίνας με το δίσκο, η οποία ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο και η οποία, μετά την κρούση, αποκτά την μέγιστη δυνατή κινητική ενέργεια.

i) Να αποδειχτεί ότι για την αρχική γωνία, που σχηματίζει η ράβδος με την οριζόντια διεύθυνση, ισχύει ημθ=0,3 (συνθ=0,95).

ii) Να βρεθεί ο αρχικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του δίσκου, τη στιγμή που το στερεό s αφήνεται να κινηθεί, ως προς:

α) Οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο της Κ.

β) Τον άξονα περιστροφής του στερεού στο Ο.

iii) Ποια η στροφορμή του δίσκου και ποιος ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του, ως προς τον άξονα στο Ο, ελάχιστα πριν την κρούση;

iv) Να υπολογιστεί η ταχύτητα την οποία θα αποκτήσει η σφαίρα, μετά την κρούση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I_ρ$= 1/3 $Mℓ^2$ και η αντίστοιχη ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του Κ, $I_κ$= ½ mR^2 και $g=10m/s^2$.