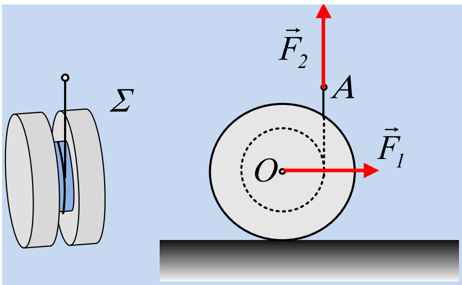
3.5. Έργο – Ενέργεια. Ομάδα Γ΄.

3.5.21. Οι κινήσεις πάνε και έρχονται….

Διαθέτουμε ένα στερεό Σ (ένα καρούλι), αποτελούμενο από δυο δίσκους οι οποίοι συνδέονται με κύλινδρο, γύρω από τον οποίο έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα. Η μάζα του Σ είναι M=20kg και η εξωτερική του ακτίνα R=0,4m. Τοποθετούμε το στερεό Σ λείο οριζόντιο επίπεδο και σε μια στιγμή ασκούμε στο κέντρο μάζας του Ο μια σταθερή οριζόντια δύναμη F_1=20N, ενώ ταυτόχρονα τραβάμε το άκρο Α του νήματος ασκώντας διαρκώς μια σταθερή κατακόρυφη δύναμη F_2=16N, όπως στο σχήμα.



Μετά από λίγο ο άξονας του στερεού (που διέρχεται από το κέντρο Ο) έχει μετατοπισθεί κατά x=2m, ενώ έχει ξετυλιχθεί νήμα μήκους 0,25m. Για την θέση αυτή ζητούνται:

i) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του στερεού Σ.

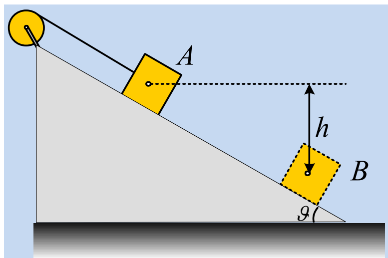
ii) Η γωνιακή του ταχύτητα.

iii) Η ταχύτητα ενός σημείου Β, επαφής του στερεού με το έδαφος.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του στερεού γύρω από τον άξονα περιστροφής του I= $0,4MR^2$.

3.5.22. Οι ενέργειες σε ένα σύστημα και σε έναν «τροχό».

Στην κορυφή ενός λείου κεκλιμένου επιπέδου έχει στερεωθεί μια τροχαλία μάζας m=3kg και ακτίνας R=0,2m, στο αυλάκι της οποίας έχουμε τυλίξει ένα αβαρές μη ελαστικό νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου δένουμε έναν κύβο μάζας Μ=m. Σε μια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο τον κύβο να γλιστρήσει από ένα σημείο Α. Το νήμα είναι παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο, ενώ δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της I= ½ mR^2 και $g=10m/s^2$.



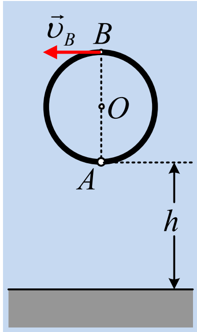
i) Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του κύβου και της τροχαλίας, τη στιγμή που ο κύβος περνά από σημείο Β, τέτοιο ώστε το κέντρο μάζας του να απέχει κατακόρυφα κατά h=2m από τη θέση Α.

ii) Επαναλάβουμε το πείραμα, αντικαθιστώντας τον κύβο με κύλινδρο ίσης μάζας, όπου το νήμα, με κατάλληλο μηχανισμό, συνδέεται στον άξονά του. Να εξετάσετε αν υπάρξει κάποια αλλαγή, στην κίνηση των σωμάτων.

ii) Σε ένα άλλο κεκλιμένο επίπεδο ίδιας κλίσης, αφήνουμε ελεύθερη την παραπάνω τροχαλία (μόνο το δίσκο), η οποία κυλίεται και μετά από λίγο περνά από ένα σημείο Β, τέτοιο ώστε το κέντρο μάζας της να βρίσκεται 2m χαμηλότερα από την αρχική θέση που ξεκίνησε. Να βρεθεί η κινητική της ενέργεια στη θέση Β. Ποιο μέρος της ενέργειας αυτής αντιστοιχεί στην μεταφορική και ποιο στην περιστροφική της κίνηση;

3.5.23. Μια στρεφόμενη στεφάνη.

Μια στεφάνη μάζας M=0,8kg και ακτίνας R=0,5m στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος περνά από το άκρο Α μιας διαμέτρου της ΑΒ και ο οποίος βρίσκεται σε ύψος h=1,35 από το έδαφος, χωρίς τριβές. Σε μια στιγμή η διάμετρος ΑΒ είναι κατακόρυφη και το άκρο Β έχει ταχύτητα υ_B=4m/s.



i) Να βρεθεί η κατεύθυνση της δύναμης, που ασκεί ο άξονας στη στεφάνη στη θέση αυτή και στη συνέχεια να υπολογιστεί το μέτρο της.

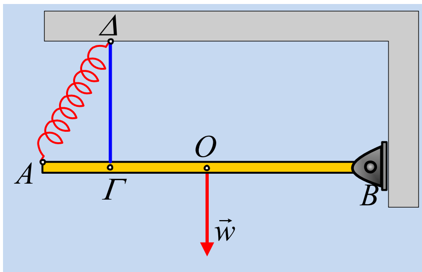
ii) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σημείου Β, στη θέση που η διάμετρος ΑΒ γίνεται οριζόντια για πρώτη φορά.

iii) Στην παραπάνω θέση, η στεφάνη απελευθερώνεται από τον άξονα και πέφτει στο έδαφος. Να βρεθεί η ταχύτητα του κέντρου Ο της στεφάνης τη στιγμή της πρόσκρουσης.

Δίνεται g=10m/s^2.

3.5.24. Μια ράβδος στρέφεται επιμηκύνοντας το ελατήριο.

Μια ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους $\ell = 1$m και μάζας M= 15kg, μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από άρθρωση στο άκρο της Β και ισορροπεί σε οριζόντια θέση δεμένη στο άκρο κατακόρυφου νήματος σε σημείο της Γ, όπου (ΑΓ)=0,2m. Παίρνουμε ένα ιδανικό ελατήριο με σταθερά k=225N/m και φυσικό μήκος ℓ_o=(4/15)m και τεντώνοντάς το, συνδέουμε τα άκρα του στο άκρο Α της ράβδου και στο σημείο πρόσδεσης του νήματος Δ, οπότε ο άξονας του ελατηρίου σχηματίζει με τη ράβδο γωνία φ, όπου ημφ=0,8 (συνφ=0,6).



i) Να βρεθεί η τάση του νήματος.

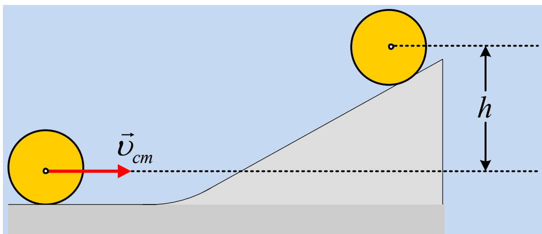
ii) Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα. Να υπολογισθεί η αρχική επιτάχυνση του άκρου Α της ράβδου.

iii) Να βρεθεί ως προς το άκρο Β της ράβδου, η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου, τη στιγμή που το ελατήριο θα γίνει κατακόρυφο, αν δεν αναπτύσσονται τριβές στην άρθρωση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς την άρθρωση I_B= 1/3 $M\ell^2$ και g=10m/s^2.

3.5.25. Η άνοδος μιας σφαίρας.

Μια σφαίρα μάζας 1kg κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα κέντρου μάζας υ_{cm}=4m/s και στην πορεία της συναντά ένα κεκλιμένο επίπεδο, κλίσεως θ=30°, κατά μήκος του οποίου συνεχίζει την κίνησή της. Η κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου έχει εξομαλυνθεί ώστε να μην



διαταραχθεί το ομαλό πέρασμά της από το ένα επίπεδο στο άλλο. Αν η προς τα πάνω κίνηση της σφαίρας σταματήσει όταν το κέντρο της Ο ανέβει κατά h=1m, τότε:

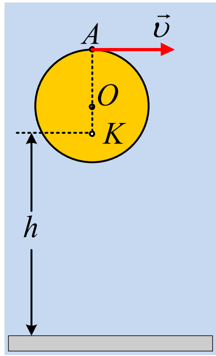
i) Να αποδείξετε ότι κατά την άνοδό της στο κεκλιμένο επίπεδο, η σφαίρα δέχεται δύναμη τριβής από το επίπεδο.

ii) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια της σφαίρας τη στιγμή που σταματά η άνοδός της στο κεκλιμένο επίπεδο.

iii) Να υπολογιστεί το έργο της ασκούμενης τριβής κατά την άνοδο της σφαίρας.

Για την σφαίρα ως προς μια διάμετρό της I= $\frac{2}{5}mR^2$ και g=10m/s^2.

3.5.26. Ο δίσκος και η ταχύτητα ενός σημείου.



Ένας ομογενής δίσκος μάζας Μ και ακτίνας R μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από ένα σημείου του Κ, το οποίο απέχει από το κέντρο του Ο απόσταση (ΚΟ)= ½ R. Ένα σημείο Α στην περιφέρεια του δίσκου έχει ταχύτητα υ, τη στιγμή που η ακτίνα ΑΟ είναι κατακόρυφη, όπως στο σχήμα. Αν η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς κάθετο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας του Ο, δίνεται από την εξίσωση I= ½ MR^2, να υπολογιστούν συναρτήσει των Μ, R, g και υ:

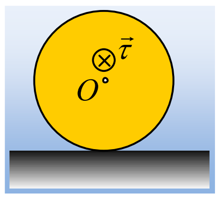
i) Η κινητική ενέργεια του δίσκου στην παραπάνω θέση.

ii) Η μέγιστη ταχύτητα του σημείου Α στη διάρκεια της περιστροφής του δίσκου.

iii) Αν τη στιγμή που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, ο άξονας περιστροφής σπάσει και ο δίσκος φτάνει στο έδαφος με πρώτο σημείο επαφής το σημείο Α, να βρεθεί το ελάχιστο ύψος h από το έδαφος, που βρισκόταν ο άξονας περιστροφής.

iv) Η τελική κινητική ενέργεια του δίσκου, στην παραπάνω περίπτωση.

3.5.27. Όταν η τριβή επιταχύνει έναν τροχό.



Ένας τροχός μάζας Μ=10kg και ακτίνας R=0,4m ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής μ_s=μ=0,2. Σε μια στιγμή t_0=0, δέχεται μέσω κατάλληλου μηχανισμού μια σταθερή ροπή, μέτρου τ=16Nm, όπως στο σχήμα.

i) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του άξονα του τροχού και η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.

ii) Η ταχύτητα υ_{cm} του άξονα Ο του τροχού και η γωνιακή του ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_1=4s.

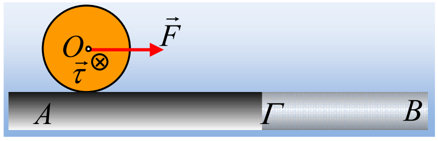
iii) Πόση ενέργεια μεταφέρεται στον τροχό μέσω της ασκούμενης ροπής;

iv) Να υπολογιστεί η μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της τριβής, στο παραπάνω χρονικό διάστημα;

v) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της ροπής την οποία θα μπορούσαμε να ασκήσουμε στον τροχό για να μην παρατηρηθεί ολίσθηση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του I= ½ MR^2 και g=10m/s^2.

3.5.28. Μια ροπή και μια δύναμη επιταχύνουν.



Ένας τροχός μάζας Μ και ακτίνας R=0,5m ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο Α. Σε μια στιγμή δέχεται μέσω του άξονα μια σταθερή ροπή μέτρου τ=1,5N·m και μια σταθερή οριζόντια δύναμη στον άξονά του F=4N, όπως στο σχήμα. Μετά από λίγο, αφού μετακινηθεί κατά x=8m, περνάει σε Β επίπεδο, το οποίο παρουσιάζει με τον τροχό συντελεστή τριβής μ=0,2, στη θέση Γ.

i) Να υπολογιστεί η ενέργεια που μεταφέρεται στον τροχό μέσω της ασκούμενης ροπής, μέχρι τη θέση Γ.

ii) Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του τροχού στη θέση Γ.

iii) Αν η μάζα του τροχού είναι ίση με 4kg, για τη χρονική στιγμή ελάχιστα πριν περάσει ο τροχός στο Β επίπεδο, να βρεθούν:

α) Η ισχύς της δύναμης F και ο ρυθμός μεταβολής της μεταφορικής κινητικής ενέργειας του τροχού.

β) Ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής.

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του τροχού, ως προς τον άξονά του.

iv) Για τη στιγμή, αμέσως μόλις περάσει ο τροχός στο Β επίπεδο να υπολογιστούν:

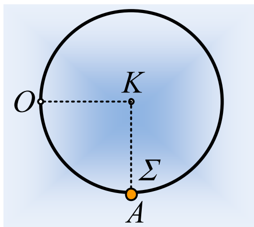
α) Ο ρυθμός μεταβολής της μεταφορικής κινητικής ενέργειας του τροχού.

β) Ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής.

γ) Ο ρυθμός με τον οποίο μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της τριβής.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του $I= \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10m/s^2$.

3.5.29. Η στεφάνη και η σημειακή μάζα.



Μια στεφάνη ακτίνας 0,2m και μάζας m=1kg, η οποία θεωρείται συγκεντρωμένη στην περιφέρειά της, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από ένα σημείο Ο της περιφέρειάς της. Σε ένα σημείο Α της περιφέρειας της στεφάνης, όπου η γωνία ΟΚΑ είναι ορθή, έχει προσδεθεί ένα σώμα Σ, ίσης μάζας με τη στεφάνη, το οποίο θεωρείται υλικό σημείο, δημιουργώντας έτσι το στερεό s. Στρέφουμε το στερεό s, ώστε η ακτίνα της ΚΑ της στεφάνης να είναι κατακόρυφη και σε μια στιγμή (t_0=0) το αφήνουμε να περιστραφεί.

i) Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του στερεού s, ως προς τον άξονα περιστροφής στο Ο.

ii) Ποια η αρχική επιτάχυνση του σώματος Σ, μόλις αφήσουμε το στερεό να κινηθεί;

iii) Μετά από λίγο, τη στιγμή t_1, η ακτίνα ΚΑ γίνεται οριζόντια για πρώτη φορά.

Για τη στιγμή αυτή να βρεθούν:

α) Η γωνιακή ταχύτητα του στερεού και η ταχύτητα του σώματος Σ.

β) Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του στερεού s, ως προς τον άξονα περιστροφής του.

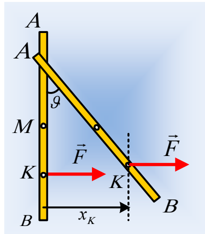
γ) Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος Σ, ως προς το σημείο Ο.

δ) Η κινητική ενέργεια και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας, του στερεού s.

ε) Η κινητική ενέργεια και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας, της στεφάνης.

Δίνεται g=10m/s^2.

3.5.30. Η επιτάχυνσης μιας σανίδας στον πάγο



Σε μια παγωμένη λίμνη ηρεμεί οριζόντια, μια ομογενής σανίδα AB μήκους l=4m και μάζας m=12kg. Σε μια στιγμή t_0=0, δέχεται την επίδραση μιας **σταθερής** οριζόντιας δύναμης μέτρου F=6N, η οποία ασκείται στο σημείο Κ, όπου (ΒΚ)=1m και αρχικά είναι κάθετη στη σανίδα. Τη χρονική στιγμή t_1=2s το σημείο εφαρμογής της δύναμης Κ, έχει μετατοπισθεί κατά x_K=1,6m στην διεύθυνση της ασκούμενης δύναμης, ενώ η σανίδα έχει περιστραφεί κατά γωνία θ, όπως στο σχήμα. Κατά την κίνηση της σανίδας δεν εμφανίζονται τριβές.

i) Να βρεθεί η επιτάχυνση του σημείου Κ, αμέσως μόλις ασκηθεί η δύναμη (για t=0$^+$).

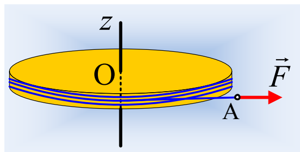
ii) Να υπολογιστεί η γωνία περιστροφής θ της σανίδας.

iii) Πόση ενέργεια μεταφέρεται στη σανίδα μέσω του έργου της δύναμης από 0-t_1;

iv) Με ποιο ρυθμό μεταφέρεται ενέργεια στη σανίδα τη στιγμή t_1;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της σανίδας ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της I_{cm}=(1/12)ml^2.

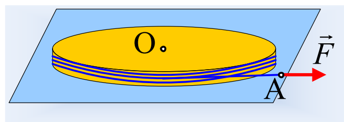
3.5.31. Το έργο και η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου



Ένας ομογενής δίσκος μάζας 40kg και ακτίνας 0,5m μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου και περνά από το κέντρο του Ο. Γύρω από το δίσκο τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα, στο άκρο Α του οποίου, ασκούμε μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F=10Ν.

i) Να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου τη στιγμή t_1 όπου το άκρο Α του νήματος έχει μετατοπισθεί κατά x_1=4m.

ii) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου τη στιγμή t_1;



Απελευθερώνουμε τον παραπάνω δίσκο από τον άξονα και τον τοποθετούμε σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

iii) Να βρεθεί ξανά η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου τη στιγμή που το άκρο Α του νήματος έχει μετατοπισθεί κατά 4m.

iv) Ποιος θα είναι τώρα ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δίσκου την παραπάνω στιγμή;

v) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά τώρα μεταβάλλουμε το μέτρο της δύναμης σε συνάρτηση με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση F=2t (S.I.), διατηρώντας σταθερή την κατεύθυνσή της. Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1=10s.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου, ως προς κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του I= ½ mR^2.